Практическое занятие #0. Повторение

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- линейное пространство;
- базис линейного пространства;
- преобразование базиса и координат;
- однородные и неоднородные СЛАУ.

Задание 1: воспоминания о линейных пространствах

Являются ли следующие структуры линейным пространством:

- множество последовательностей чисел из $\mathbb{R}$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на скаляр? с покомпонентными операциями умножения и возведения в степень?
- множество вырожденных матриц со стандартными операциями сложения и умножения на скаляп? множество невырожденных матриц с теми же операциями?
- множество диагональных, нильтреугольных (верхнетреугольные матрицы с нулевой диагональю), унитреугольных (верхнетреугольные матрицы с единицами на диагонали)?
- множество полиномов степени выше n? множество полиномов степени не выше n? множество полиномов степени строго n? Операции стандартные.
- множество полиномов вида $ax^2 + bxy + cy^2$ с произвольными $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Задание 2: базисы линейных пространств

Выделите базисы в тех примерах структур из прошлого задания, которые являются линейными пространствами.

Задание 3: разложение по базису матриц

Рассмотрите набор матриц и покажите, что он является базисом в пространстве квадратных матриц 2-го порядка:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Дана матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдите коэффициенты разложения этой матрицы по данному базису.

P.S. для решения задачи наиболее оптимальный ход заключается в "координатизации" всех матриц (получение их изоморфного координатного представления в стандартном базисе матриц), а затем нахождение коэффициентов разложения как решения неоднородной СЛАУ.

Задание 4: преобразование базиса

Постройте матрицу перехода из базиса

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

в базис из предыдущего задания.

Задание 5: преобразование координат

Преобразуйте коэффициенты разложения матрицы Q по базису $\{A_i\}$ в коэффициенты разложения по базису $\{S_i\}$, используя матрицу перехода.

Задание 6: системы уравнений

Решите следующие системы уравнений:

- $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Запишите общее решение.