Практическое занятие #1. Сопряженное пространство

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- линейная форма;
- коэффициенты линейной формы, теорема о задании линейной формы;
- равные линейные формы, нулевая линейная форма;
- сумма линейных форм;
- произведение линейной формы на число;
- сопряженное пространство;
- сопряженный (двойственный, взаимный) базис;
- теорема о преобразовании сопряженного базиса;
- преобразование координат линейной формы при преобразовании базиса;
- изоморфизм пространств V и V^*;
- второе сопряженное пространство, изоморфизм пространств V и V^{**}.

Задание 1: линейные формы в арифметическом пространстве

Являются ли следующие отображения $\phi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ линейными формами:

- $\varphi_1 : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto x^2$;
- $\varphi_2 : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto |x^1 - x^2|$;
- $\varphi_3 : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto \max\{x^i\}$;
- $\varphi_4 : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto x^1 x^2 + x^3$;
- $\varphi_5 : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto 2x^3 - x^1$;
- $\varphi_6 : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto \sum_{i=1}^3 x^i$;

В случае, если данные отображения являются линейными формами, найдите их коэффициенты в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$.

P.S. Во всех случаях верхние индексы означают именно индексацию компонент вектора, а не степени.

Задание 2: линейные формы в матрицах

В пространстве $M_n(\mathbb{R})$ рассмотрите функции следа и определителя. Являются ли они линейными? Если отображения являются линейными, постройте ее координатную строку (набор коэффициентов) в базисе из матричных единиц.

Для примера можно рассмотреть пространство $M_2(\mathbb{R})$.

Какими способами можно задать линейную форму в пространстве прямоугольных матриц, например, $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$? Приведите хотя бы два примера.

Задание 3: базис сопряженного пространства

Докажите, что линейные формы $f^1(x) = 4x^1 + 2x^2 - x^3$, $f^2(x) = 5x^1 + 3x^2 - 2x^3$, $f^3(x) = 3x^1 + 2x^2 - x^3$, образуют базис пространства $(\mathbb{R}^3)^*$.

Найдите коэффициенты линейной формы $\phi(x) = 5x^1 - 4x^2 + 2x^3$ относительно этого базиса.

Задание 4: поиск сопряженного базиса

Допустим в пространстве $V = \mathbb{R}^3$ определен базис

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1)^T \\ v_2 &= (1, 2, 4)^T \\ v_3 &= (1, 3, 5)^T \end{aligned}$$

Найдите сопряженный к нему базис в V^*. Затем найдите базис второго сопряженного пространства V^{**}.

Проверьте утверждение, что для любой линейной формы $f \in V^*$ выполняется соотношение

$$\hat{v(}f) = f(v),$$

где $\hat{v} \in V^{**}$ и $v \in V$, но имеют одинаковые координатные представления в рассмотренных базисах своих пространств. Можно взять линейную форму $F \in V^*$ с произвольными коэффициентами.

Задание 5: ядро линейной формы

Рассмотрите линейную форму

$$V = \mathbb{R}^4, \quad f \in V^*, \quad f(x) = 2x^1 - 3x^2 - x^3 + x^4$$

Найдите ядро этой линейной формы и покажите, что оно образует линейное подпространство $\ker f \leqslant V$.

Найдите векторы, которые лежат в пересечении ядер этой линейной формы и линейной формы $\phi(x) = x^1 - 2x^2 + 2x^3 + 3x^4$.