Практическое занятие #3. ПЛФ и тензоры

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- полилинейные формы;
- операции с полилинейными формами;
- тензор полилинейной формы;
- умножение тензоров.

Замечание о записи тензоров

Тензор полилинейной формы, в зависимости от ее аргументов, может принимать достаточно сложный вид касаемо его записи.

Действительно, если ПЛФ имеет только один аргумент, то ее тензор, имеющий только один индекс, может быть представлен в виде строки (столбца).

Если ПЛФ имеет два аргумента, то в зависимости от их природы, тензор будет иметь либо два нижних, либо два верхних индекса, либо один верхний и один нижний индекс. Таким образом естественным представлением для такого тензора является матрица.

Однако если ПЛФ имеет три аргумента (любой природы), то ее тензор должен записываться в виде куба чисел. Еще более сложная ситуация возникает с тензорами, которые имеют 4 индекса и более.

Исходя из этих рассуждений, необходим универсальный способ для записи тензоров "на бумаге". В курсе принимаются следующие договоренности:

- Тензор с одним нижним индексом:
$$a_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$
- Тензор с одним верхним индексом:
$$b^i = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$
- Тензоры с двумя верхними (нижними) индексами
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad c^{ij} = \begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} & c^{13} \\ c^{21} & c^{22} & c^{23} \\ c^{31} & c^{32} & c^{33} \end{pmatrix}$$

- Тензоры с верхним+нижним индексом

$$c^i_j = \begin{pmatrix} c^1_1 & c^1_2 & c^1_3 \\ c^2_1 & c^2_2 & c^2_3 \\ c^3_1 & c^3_2 & c^3_3 \end{pmatrix}$$

- Тензоры с тремя индексами

$$d_{ijk} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} d_{111} & d_{121} & d_{131} & d_{112} & d_{122} & d_{132} & d_{113} & d_{123} & d_{133} \\ d_{211} & d_{221} & d_{231} & d_{212} & d_{222} & d_{232} & d_{213} & d_{223} & d_{233} \\ d_{311} & d_{321} & d_{331} & d_{312} & d_{322} & d_{332} & d_{313} & d_{323} & d_{333} \end{array}\right)$$

$$d^{ij}_k = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} d^{11}_1 & d^{12}_1 & d^{13}_1 & d^{11}_2 & d^{12}_2 & d^{13}_2 & d^{11}_3 & d^{12}_3 & d^{13}_3 \\ d^{21}_1 & d^{22}_1 & d^{23}_1 & d^{21}_2 & d^{22}_2 & d^{23}_2 & d^{21}_3 & d^{22}_3 & d^{23}_3 \\ d^{31}_1 & d^{32}_1 & d^{33}_1 & d^{31}_2 & d^{32}_2 & d^{33}_2 & d^{31}_3 & d^{32}_3 & d^{33}_3 \end{array}\right)$$

- Тензоры с 4-мя индексами

$$h^{ij}_{kl} = \left(\begin{array}{cc|cc} h^{11}_{11} & h^{12}_{11} & h^{11}_{12} & h^{12}_{12} \\ h^{21}_{11} & h^{22}_{11} & h^{21}_{12} & h^{22}_{12} \\ \hline h^{11}_{21} & h^{12}_{21} & h^{11}_{22} & h^{12}_{22} \\ h^{21}_{21} & h^{22}_{21} & h^{21}_{22} & h^{22}_{22} \end{array}\right)$$

При записи этих тензоров можно руководствоваться следующими правилами:

- Чтение индексов происходит последовательно, начиная со всех верхних, а затем все нижние. Иными словами в h^{ij}_{kl} порядок чтения индексов будет (i, j, k, l).
- Если индекс только один нижний (верхний), то тензор записывается в строку (столбец);
- Если два индекса, то первый из них (в порядке чтения из п.1) индексирует строки матрицы, а второй — столбцы.
- Если в тензоре три индекса, то первые два (в порядке чтения) индексируют элементы внутри блоков, при этом последний — сами блоки.
- Если в тензоре четыре индекса, то первые два индексируют элементы внутри блока, а последние два — сами блоки. При этом третий индексирует "горизонтальные слои" (гиперстроки), а четвертый — "вертикальные слои" (гиперстолбцы).

Тензоры с количеством индексов больше, чем 4, рассматриваться будут редко и при необходимости будут даны дополнительные пояснения.

Задание 1: умножение ПЛФ

Пусть даны следующие отображения.

- линейная форма:
$$A(x_1) = 2\xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3$$
- билинейная форма:
$$B(x_1, x_2) = \xi_1^1\xi_2^1 + 2\xi_1^1\xi_2^3 - 2\xi_1^2\xi_2^1 - \xi_1^2\xi_2^2 - 3\xi_1^2\xi_2^3 + 3\xi_1^3\xi_2^1 + 4\xi_1^3\xi_2^3,$$
где
$$x_1 = (\xi_1^1 \quad \xi_1^2 \quad \xi_1^3)^T$$
$$x_2 = (\xi_2^1 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2^3)^T$$

Запишите трилинейные формы:
$$C(x_1, x_2, x_3) = A(x_1) \cdot B(x_2, x_3)$$
$$D(x_1, x_2, x_3) = B(x_1, x_2) \cdot A(x_3)$$

На этом примере убедитесь, что произведение ПЛФ некоммутативно.

Задание 2: тензор ПЛФ

Для трилинейных форм из предыдущего примера найдите их тензоры в базисах:
$$\begin{cases} e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases} \qquad \begin{cases} e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ e'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

Задание 3: произведение тензоров

Для полилинейных отображений A и B найдите их тензоры a_i и b_{jk} во втором базисе из предыдущего задания.

Затем найдите произведения
$$c_{ijk} = a_i \otimes b_{jk}$$
$$d_{jki} = b_{jk} \otimes a_i$$

Сравните полученные таким образом тензоры с теми, что были получены в предыдущем задании.

Задание 4: произведение тензоров (1,1)

Найдите произведение тензоров в разном порядке:
$$a_j^i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_l^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 5: получение тензора (1,1) из одноранговых

Найдите сопряженный базис $\{f'^1, f'^2, f'^3\}$ ко второму базису из Задания 2.

Затем найдите следующие тензоры и соответствующее им матричное представление P_i:

$$f'^1 \otimes e'_1 \leftrightarrow P_1$$
$$f'^2 \otimes e'_2 \leftrightarrow P_2$$
$$f'^3 \otimes e'_3 \leftrightarrow P_3$$

Убедитесь в том, что выполняются свойства:

$$P_1 + P_2 + P_3 = E$$
$$P_i^2 = P_i$$
$$P_i P_j = O, \quad i \neq j$$

Это полезное свойство тензоров будет использоваться нами в следующих частях курса.