Практическое занятие #5. Линейные отображения

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- линейные отображения;
- матрица линейного отображения;
- изоморфность линейных пространств отображений и матриц;
- композиция отображений и произведение их матриц.

Задание 1: проверка линейности

Проверьте, что данные отображения являются линейными:

1. $\phi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\phi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$.
3. $\phi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.
4. $\phi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 & x_1 & x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.
5. $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(x) = a$, где a — фиксированный вектор.
6. $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi(x) = (x, a) \cdot a$, где a — фиксированный вектор.
7. $\phi : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t], \qquad \phi(p) = p(at + b)$, где a, b — фиксированные скаляры из $\mathbb{R}$.
8. $\phi : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t], \qquad \phi(p) = p(t + 1) - p(t)$.
9. $\phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad \phi(A) = A^T$.
10. $\phi : M_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad \phi(A) = (\mathrm{tr} A) \cdot E$.

Задание 2: построение матрицы линейного отображения

Для отображений из пунктов 3, 4, 6 и 7 постройте матрицы в стандартных базисах.

Задание 3: образы элементов

Рассмотрите каждый из примеров Задания 2 и при помощи определения отображения из Задания 1 найдите образы произвольных элементов соответствующих пространств.

Найдите также образы этих же элементов, используя матрицу соответствующего линейного отображения.

Убедитесь на этих примерах, что образ, найденный при помощи матрицы, действительно совпадает с образом, полученным по определению отображения.

Задание 4: преобразование матрицы отображения при замене базиса

Пусть линейное отображение ϕ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу оператора в базисах:

- $\{e_2, e_1, e_3\}$
- $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$

Обратите внимание на изменение матрицы при данных преобразованиях базиса.

Задание 5: преобразование матрицы отображения при замене базисов

Пусть линейное отображение $\phi : U \to V$ в базисах $\{e_i\}_{i=1}^3$ из U и $\{g_j\}_{j=1}^2$ имеет матрицу

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу оператора при изменении базисов:

$$\begin{array}{rcl} \{e_1, e_2, e_3\} & \longrightarrow & \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\} \\ \{g_1, g_2\} & \longrightarrow & \{g_1 + g_2, g_1 - g_2\} \end{array}$$