Практическое занятие #6. Ядро, образ, обратимость.

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- ядро линейного отображения;
- образ линейного отображения;
- образ и прообраз вектора;
- обратимость линейного оператора;

Задание 1: поиск ядра и образа

Найдите базисы ядра и образа линейных отображений, заданных своими матрицами:

1. $$A = \begin{pmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{pmatrix}$$
2. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$
3. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
5. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
6. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$
7. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 2: обратимость операторов

Для отображений из Задания 1, которые заданы квадратными матрицами, выясните, являются ли они обратимыми. Если являются таковыми, найдите матрицу обратного отображения.

Задание 3: полные прообразы элементов

Пусть линейное отображение ϕ задано своей матрицей A_ϕ и также дан вектор b. Найдите полный прообраз элемента b относительно данного отображения.

1. $$A_\phi = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = (-1, 0, 1)^T$$
2. $$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \qquad b = (1, 2, 1)^T$$

Задание 4: полный прообраз подпространства

Пусть линейное отображение ϕ задано матрицей

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти полный прообраз подпространства, заданного линейной оболочкой вектора $a = (3, -1)^T$.

Решите аналогичную задачу, если матрица оператора имеет вид

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

А подпространство задано множеством решений СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$