Функциональное исчисление операторов

В этой лекции мы перейдем к рассмотрению вида линейного оператора в жордановом базисе. Как было уже отмечено, если оператор не является диагонализуемым, для него также может быть получен "достаточно простой"вид в некотором базисе. Следовательно вытекает вопрос о структуре этого матричного представления оператора и построения самого базиса, в котором оператор имеет такой вид.

§1. Операторные полиномы

Пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \varphi^2 + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$ — полином степени m с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, а также $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, где размерность пространства V равна $n = \dim V$.

Определение 1.1. Операторным полиномом (полиномом от оператора) называют линейный оператор $p(\varphi)$ такой, что

$$p(t) \mapsto p(\varphi) = a_0 \mathcal{I} + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \ldots + a_m \varphi^m \in \mathrm{End}(V)$$

Если в некотором базисе линейному оператору φ сопоставляется матрица $A_\varphi \in M_n(\mathbb{K})$, то $p(\varphi)$ в том же базисе имеет матрицу

$$p(A_\varphi) = a_0 E + a_1 A_\varphi + a_2 A_\varphi^2 + \ldots + a_m A_\varphi^m \in M_n(\mathbb{K})$$

Рассмотрим связь операторных полиномов с инвариантными подпространствами оператора.

Лемма 1.1. *Подпространство $U \leqslant V$, которое инвариантно относительно оператора φ будет также инвариантно относительно операторного полинома $p(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть $U \leqslant V$ такое, что $\varphi U \leqslant U$. Откуда следует, что подпространство U будет обладать тем же свойством относительно любой степени оператора $\varphi^k U \leqslant U$. Так как операторный полином $p(\varphi)$ определяется линейной комбинацией степеней оператора φ, то и подпространство U будет инвариантно относительно $p(\varphi)$. $\square$

Более того можно заметить, что существует связь между сужениями оператора и операторного полинома на одного и то же инвариантное подпространство:

$$p(\varphi\big|_U) = p(\varphi)\big|_U$$

Одним из важнейших классов операторных полиномов являются те, которые обращают его в нулевой оператор.

Определение 1.2. Аннулирующим полиномом оператора называют полином $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ такой, что соответствующий ему операторный полином равен нулевому оператору:

$$p(\varphi) = \Theta$$

Для каждого линейного оператора существует аннулирующий полином и в частности это утверждает следующая теорема.

Теорема 1.1. ***(Гамильтона-Кэли)*** *Характеристический полином $\chi(t)$ является аннулирующим полиномом.*

$$\chi(\varphi) = \Theta$$

Доказательство. Покажем справедливость теоремы в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$, т.е. такого, что характеристический полином представляется в виде произведения линейных множителей. В качестве такого поля может рассматриваться, например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, для которого известна основная теорема алгебры, следствием которой и является существование данного разложения.

Характеристический полином в этом случае может быть представлен в виде

$$\chi(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_s)^{m_s}$$

и благодаря ему может быть построен соответствующий операторный полином

$$\chi(\varphi) = (-1)^n (\varphi - \lambda_1 \mathcal{I})^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\varphi - \lambda_s \mathcal{I})^{m_s}$$

Произвольный оператор порождает разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств такого типа

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s, \qquad V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$$

Подпространство $V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$, как мы показывали ранее, является φ-инвариантным. При этом сужение оператора $\varphi\big|_{V_i} = \varphi_i$ на это подпространство очевидно определяется через нильпотентный оператор, который определяет множитель $\chi_i(t)$ характеристического полинома

$$\chi_i(\varphi_i) = (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i} = \mathcal{N}^{m_i}\big|_{V_i},$$

Нильпотентный оператор в V_i есть ровно нулевой оператор, т.к. порядок нильпотентности $k_i \leqslant m_i$. Следовательно

$$\chi_i(\varphi_i) = \Theta \qquad \Rightarrow \qquad \chi(\varphi_i) = \chi(\varphi)\big|_{V_i} = \Theta,$$

потому что если один множитель аннулирует, то аннулирует и весь полином, а также верна связь между сужениями оператора и операторного полинома.

Суммируя эти рассуждения, можно утверждать, что характеристический полином есть аннулирующий полином на каждой компоненте разложения пространства в прямую сумму, а значит является аннулирующем во всем пространстве V. $\square$

§2. Функциональное исчисление диагонализуемых операторов

Лемма 2.1. *Для произвольной степени $m \in \mathbb{N}$ диагонализуемого оператора $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ справедливо*

$$\varphi^m = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^m \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i$ — спектральные проекторы на подпространства, соответствующие собственному числу λ_i.

Доказательство. Докажем по индукции. В случае $m = 1$ утверждение справедливо в силу спектрального разложения диагонализуемого оператора

$$\varphi = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathcal{P}_i$$

Предположим, что утверждение теоремы справедливо для произвольного $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим

$$\varphi^{m+1} = \varphi^m \circ \varphi = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^m \mathcal{P}_i\right) \circ \varphi = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^m \mathcal{P}_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathcal{P}_j\right),$$

где мы вновь воспользовались спектральным разложением. Помня о том, что $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$ и $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \Theta$, если $i \neq j$, закончим вычисление суммы

$$\varphi^{m+1} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \lambda_i^m \lambda_j \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{m+1} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{m+1} \mathcal{P}_i$$

Случай $m = 0$ также этому удовлетворяет, если положить $\varphi^0 = \mathcal{I}$, для которого известно, что

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{P}_i$$

$\square$

Следствие 2.0.1. *Для операторного полинома от диагонализуемого оператора справедливо*

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^{s} p(\lambda_i) \mathcal{P}_i$$

Доказательство. Построим операторный полином с произвольными коэффициентами

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^{s} a_k \varphi^k = \sum_{k=0}^{s} a_k \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^k \mathcal{P}_i^k\right) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=0}^{s} a_k \lambda_i^k\right) \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{s} p(\lambda_i) \mathcal{P}_i$$

$\square$

Рассмотрим $A_\varphi^D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — матрицу диагонализуемого оператора φ в базисе из собственных векторов. Тогда из последнего утверждения следует, что

$$p\left(A_\varphi^D\right) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

где в данной записи предполагается, что λ_i не обязательно различны.

Данный способ работает и для нахождения произвольных аналитических функций от операторов и их матриц. ***Аналитическая функция*** f задаётся сходящимся степенным рядом $f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots + a_m(t - t_0)^m + \ldots$, $t_0 \in \mathbb{C}$. При рассмотрении таких функций естественным образом появляются вопросы о сходимости, т.к. данный ряд в общем случае представляется бесконечным, но мы в рамках нашего курса предположим, что все нужные свойства выполняются.

При данных предположениях мы можем провести те же самые рассуждения, чтобы получить аналогичный полиномам результат

$$f(\varphi) = \sum_{i=1}^{s} f(\lambda_i)\mathcal{P}_i \qquad \Rightarrow \qquad f\left(A_\varphi^D\right) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

§3. Функциональные исчисление ЖНФ

Перейдем к общему случаю, когда для оператора невозможно найти базис, в котором его матрица будет диагональна, но можно построить жорданову нормальную форму. Это возможно в базисе (жордановом), согласованном со всеми корневыми подпространствами. Их наличие позволяет разложить пространство в прямую сумму

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s, \qquad V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i},$$

где каждое из подпространств V_i представляется в виде прямой суммы циклических подпространств.

Пусть U_i — циклическое подпространство, в котором действует сужение оператора

$$\varphi_i = \varphi\big|_{U_i} = \lambda_i \mathcal{I}_i + \mathcal{N}_i,$$

где $\mathcal{I}_i$ — тождественный оператор в U_i, а $\mathcal{N}_i$ — соответствующий циклическому подпространству нильпотентный оператор.

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ — линейный оператор, для которого существует полный набор собственных чисел, т.е. такой, что сумма алгебраических кратностей равна размерности пространства $\sum_{i=1}^{s} m_i = n = \dim V$. Тогда*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i \mathcal{I}_i + \mathcal{N}_i) \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i$ — проекторы на циклические подпространства U_i, а $\varphi_i = \varphi\big|_{U_i}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству спектрального разложения. □

Оператор в базисе, согласованном с ними, принимает вид блочно-диагональной матрицы, где каждый блок представляет собой жорданову клетку (матрицу сужения оператора на циклическое подпространство), а совокупность жордановых клеток образует жорданов блок. Иными словами, мы в любом случае имеем блочно-диагональную матрицу.

Лемма 3.1. *Блочно-диагональный вид матрицы оператора в базисе, согласованном с инвариантными подпространствами, сохраняется при возведении оператора в степень*

$$A_\varphi^m = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^m & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s^m \end{pmatrix}$$

Доказательство. Напрямую следует из ранее обсуждаемого факта

$$\varphi U \leqslant U \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^m U \leqslant U$$

□

Из этих утверждений следует, что при рассмотрении аналитических функций от операторов и их жордановых форм достаточно ограничиться построением действия функции на одну жорданову клетку или, что тоже самое, на сужение оператора на циклическое подпространство).

Для вычисления аналитической функции воспользуемся разложением в ряд Тейлора в точке $t_0 = \lambda_i$

$$f(\varphi_i) = f(\lambda_i)\mathcal{I} + \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \cdot (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I}) + \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) \cdot (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^2 + \dots$$

Обратим внимание на возникающие разности в каждом слагаемом, которые дают степени нильпотентного оператора

$$f(\varphi_i) = f(\lambda_i)\mathcal{I} + \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \cdot \mathcal{N}_i + \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) \cdot \mathcal{N}_i^2 + \dots + \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda_i) \mathcal{N}_i^r$$

Данная сумма будет конечна в силу нильпотентности оператора, а последнее слагаемое будет соответствовать максимальной ненулевой степени r этого оператора. Таким образом становится легко вычислимой функция от сужения оператора на циклическое подпространство. В жордановом базисе она будет представлена верхнетреугольной матрицей следующего вида

$$f(\varphi_i) \mapsto f(J(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{r!}f^{(r)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda_i) \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Откуда следует, что функция от жордановой нормальной формы представляет собой блочно-диагональную матрицу, каждая жорданова клетка которой имеет представленный вид.

Для поиска функции от матрицы оператора в произвольном базисе достаточно найти функцию от жордановой нормальной формы, а затем произвести преобразование базиса.

$$f(A_\varphi) = T^{-1} f(J) T$$