Операторы в евклидовых пространствах

Содержание

§1. Эрмитово сопряженный оператор

Пусть дано евклидово пространство $X_E(\mathbb{K})$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 1.1. Оператор $\varphi^\dagger$ называется **эрмитово сопряженным** к оператору φ, если он обладает следующим свойством:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

Замечание 1.1. Операция эрмитового сопряжения обладает следующими свойствами:

- аддитивность: $(\varphi + \psi)^\dagger = \varphi^\dagger + \psi^\dagger$;
- сопряженная однородность: $(\lambda \varphi)^\dagger = \overline{\lambda} \varphi^\dagger$;
- контравариантность: $(\psi \circ \varphi)^\dagger = \varphi^\dagger \circ \psi^\dagger$;
- инволютивность: $(\varphi^\dagger)^\dagger = \varphi$.

Лемма 1.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис евклидова пространства $X_E(\mathbb{K})$ и G - его матрица Грама. Тогда если A_φ — матрица оператора φ в этом базисе, то матрица $\varphi^\dagger$ будет имеет вид*

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1} A^\dagger G, \quad A^\dagger = \overline{A}^T.$$

Доказательство. По определению скалярного произведения:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \xi^\dagger G (A_\varphi \eta) = (\xi^\dagger G A_\varphi G^{-1}) G \eta = (G^{-1} A_\varphi^\dagger G \xi)^\dagger G \eta = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

□

§2. Самосопряженный и эрмитов операторы

Определение 2.1. Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Замечание 2.1. Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

Пример 2.1. Примеры матрицы A самосопряженного оператора и матрицы B эрмитовского оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.2. В случае вещественного поля $\mathbb{R}$ операции $\dagger$ и T совпадают.

§3. Спектральные свойства эрмитова оператора

Лемма 3.1. *Все собственные значения эрмитова оператора φ вещественны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение φ и x — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle \varphi x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle, \quad \langle x, \varphi x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \lambda$$

$\square$

Лемма 3.2. *Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:*

$$\varphi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \varphi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{gathered} \langle \varphi x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \varphi x_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle \\ \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle, \quad \overline{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2\rangle = 0. \end{gathered}$$

$\square$

Лемма 3.3. *Если $L \leqslant X$ — инвариантное подпространство эрмитова оператора φ, тогда $L^\perp$ — также инвариантное подпространство.*

Доказательство. Пусть $x \in L$ и $y \in L^\perp$, тогда

$$0 = \langle \varphi x, y\rangle = \langle x, \varphi y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi y \in L^\perp.$$

$\square$

Теорема 3.1. *Эрмитов оператор φ явяется оператором скалярного типа.*

Доказательство. Покажем, что собсвенные векторы φ образуют базис $X_E(\mathbb{C})$. Проведем доказательство от противного: пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ — максимальный ЛНЗ набор:

$$\varphi x_j = \lambda_j x_j, \quad j = 1 \ldots m \quad m < n = \dim_{\mathbb{C}} X_E.$$

Пусть далее подпространство L образовано как линейная оболочка над этими векторами:

$$L = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle_{\mathbb{C}}, \quad M = L^{\perp}, \quad \varphi_M : M \to M$$

Так как M — инвариантное подпространство φ, существует по крайней мере один вектор $\widetilde{x} \in M$, такой что

$$\varphi_M \widetilde{x} = \widetilde{\lambda} \widetilde{x}.$$

Но $\widetilde{x} \perp L$ и значит $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \widetilde{x}\}$ — ЛНЗ. Противоречие.

□

Теорема 3.2. *(Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \to X_E$ — эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E, состоящий из собственных векторов φ, тогда:*

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle *, e_i \rangle e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Теорему доказывает два обсуждаемых ранее факта:

- Эрмитов оператор диагонализуем.
- Проектор на любое подпространство имеет вид

  $$\mathcal{P}_L(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

  где e_i — ортонормированный базис подпространства L.

□

§4. Унитарный оператор

Лемма 4.1. *Пусть ψ — опертор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{K})$, тогда следующие свойства эквиваентны:*

(а) *изометрия:* $\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, y \rangle$;

(б) *сохранение нормы:* $\|\psi x\| = \|x\|$;

(в) *свойство сопряженного:* $\psi^{\dagger} = \psi^{-1}$

Доказательство. Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(2):

$$\|\psi x\|^2 = \langle \psi x, \psi x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2;$$

- Опр.(2) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\|\psi(x+y)\|^2 = \|\psi x\|^2 + \|\psi y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle \psi x, \psi y\rangle,$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle \psi x, \psi y\rangle$$

  Для Im аналогично рассматриваем $\|\psi(x + i\cdot y)\|^2$

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(3):

$$\langle \psi x, \psi y\rangle = \langle x, \psi^\dagger \psi y\rangle = \langle x, y\rangle \quad Rightarrow \quad \psi^\dagger\psi = \mathcal{I}.$$

- Опр.(3) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \mathcal{I} y\rangle = \langle x, \psi^\dagger\psi y\rangle = \langle \psi x, \psi y\rangle.$$

□

Определение 4.1. **Унитарным** называется оператор ψ, обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 4.2. *Определитель оператора ψ имеет следующее свойство:*

$$|\det\psi| = 1.$$

Доказательство. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det\mathcal{I} = \det\left(\psi^\dagger\psi\right) = \det\psi^\dagger \det\psi = \overline{\det\psi}\cdot\det\psi = |\det\psi|^2 = 1.$$

□

Замечание 4.1. Унитарный оператор в *вещественном* евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

§5. Матрица унитарного оператора

Замечание 5.1. Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойсва:

$$\mathbb{C}: \quad \psi \leftrightarrow U_\psi, \quad \overline{U^T} = U^{-1};$$
$$\mathbb{R}: \quad \psi \leftrightarrow U_\psi, \quad U^T = U^{-1}.$$

Замечание 5.2. В вещественном случае

$$\det\psi = \det U_\psi = \pm 1$$

Лемма 5.1. *Пусть* $U_\psi = \|u_{ik}\|$ *— матрица унитарного оператора, тогда:*

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

Замечание 5.3. Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

Пример 5.1. Матрица Эйлера — пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

§6. Спектральные свойства унитарного оператора

Лемма 6.1. *Все собственные значения оператора* ψ *по модулю равны единице:*

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

Доказательство. Пусть $\psi x = \lambda x$, тогда

$$\langle \psi x, \psi x\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle. \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

□

Лемма 6.2. *Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:*

$$\psi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \psi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

Доказательство. Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle \psi x_1, \psi x_2\rangle = \overline{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2\rangle = e^{i(\chi_2-\chi_1)} \langle x_1, x_2\rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1-\chi_2)} - 1\right) \langle x_1, x_2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

□

Лемма 6.3. *Ортогональное дополнение* $L^\perp$ *инвариантного относительно унитарного оператора* ψ *подпространства* L *также является инвариантным.*

Доказательство. Для любых $x \in L$ и $y \in L^{\perp}$ имеем:

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle \psi x, \psi y \rangle \quad \Rightarrow \quad \psi x \perp \psi y \quad \Rightarrow \quad \psi y \in M.$$

$\square$

Теорема 6.1. *Унитарный оператор является опертором скалярного типа.*

Доказательство. Доказательство как для случая эрмитова оператора. $\square$

Пример 6.1. Ортогональный оператор, вообще говоря, не является скалярным.

Теорема 6.2. *(Спектральная теорема для унитарного оператора)*
Пусть $\psi : X_E \to X_E$ — унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E, состоящий из собственных векторов ψ, тогда:

$$\psi(*) = \sum_{j=1}^{n} e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$