Отображения в линейных пространствах

§1. Введение

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. Билинейной формой на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $b : V \times V \to \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

Замечание 1.1. Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее. Отсюда сразу следует первый пример.

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \to \mathbb{K}, \qquad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Пример 1.2. Скалярное произведение геометрических векторов на плоскости (в пространстве) линейно по каждому из аргументов, а следовательно является билинейной формой.

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где $x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T \in V$ и $y = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)^T \in V$.

Замечание 1.2. Последний пример примечателен тем, что любую билинейную форму можно представить в таком виде.

Рассмотрим $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ – множество всех билинейных форм с аргументами из V. Для этого множества справедливо следующее.

(а) Билинейные формы $b, b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ равны тогда и только тогда, когда принимают равные значения на одинаковых парах аргументов:

$$b = b' \qquad \Leftrightarrow \qquad b(x, y) = b'(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

(б) Существует нулевая билинейная форма $\theta \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$, принимающая $0 \in \mathbb{K}$ на любой паре аргументов.

$$\theta \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V): \qquad \theta(x,y) = 0, \quad \forall x, y \in V$$

(в) Может быть определена сумма билинейных форм $b, b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ как отображение вида

$$c = b + b' \qquad \Leftrightarrow \qquad c(x,y) = b(x,y) + b'(x,y), \quad \forall x, y \in V$$

(г) Может быть определено умножение билинейной формы $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ как отображение вида

$$d = \lambda b \qquad \Leftrightarrow \qquad d(x,y) = \lambda b(x,y), \quad \forall x, y \in V$$

Лемма 1.1. *Отображения c и d являются билинейными формами.*

Доказательство. Аналогично соответствующим утверждениям для линейных форм.

Лемма 1.2. *Множество $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ наделено структурой линейного пространства.*

Доказательство. Можно убедиться путем прямой проверки аксиом линейного пространства.

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x,y) = b(y,x)$.

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x,y) = -b(y,x)$.

Замечание 1.3. Множество симметричных (антисимметричных) билинейных форм образует линейное подпространство $\mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$ ($\mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$) в $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)), \qquad b^S \in \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$$

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x)), \qquad b^{AS} \in \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

Лемма 1.3. *Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.*

Доказательство. Убеждаемся непосредственной проверкой:

$$b^S(x,y) + b^{AS}(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)) + \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x)) = b(x,y)$$

Лемма 1.4. *Пространство билинейных форм представляется в виде прямой суммы подпространств симметричных и антисимметричных билинейных форм.*

$$\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V) \oplus \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

Доказательство. Процедура изготовления симметричных (антисимметричных) форм, описанная выше, позволяет заключить, что

$$\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V) + \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

Покажем, что сумма будет прямой. Пусть билинейная форма $h(x,y)$ такова, что $h \in \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V) \bigcap \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$. Тогда имеем

$$\begin{cases} h(x,y) = h(y,x) \\ h(x,y) = -h(y,x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h(y,x) = -h(y,x) \quad \Rightarrow \quad h(x,y) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

В пересечении подпространств лежит только нулевая билинейная форма. Следовательно сумма является прямой.

§2. Матрица билинейной формы

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

Определение 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x,y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

Теорема 2.1. *Задание билинейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V билинейная форма $b(x,y)$ задана набором коэффициентов $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда $\forall x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$:

$$b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \eta^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \beta_{ij}$$

По аналогии с линейными формами, коэффициенты которых можно представить в виде вектора-строки, существует аналогичное представление для билинейной формы.

Определение 2.2. Матрицей билинейной формы $b(x, y)$ называется матрица B, составленная из ее коэффициентов.

Лемма 2.1. *Пространство билинейных форм* $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ *изоморфно пространству квадратных матриц* $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$b \leftrightarrow B \qquad b' \leftrightarrow B'$$
$$b + b' \leftrightarrow B + B'$$
$$\lambda b \leftrightarrow \lambda B$$

Соответствие между линейными операциями с билинейными формами и матрицами проверяется непосредственной проверкой определений.

Замечание 2.1. По этой же самой аналогии мы устанавливали изоморфизм между $V^* \simeq \mathbb{K}^n$, если $\dim V = n$. Мы снова наблюдаем идею "координатизации"пространства. В данном случае "координатами"билинейной формы служат коэффициенты ее матрицы.

Замечание 2.2. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$b^S \leftrightarrow B_S \qquad B_S = B_S^T$$
$$b^{AS} \leftrightarrow B_{AS} \qquad B_{AS} = -B_{AS}^T$$

В силу того, что матрица билинейной формы определяется как объект, зависящий от выбора базиса, то и смена базиса должна приводить к изменению матрицы билинейной формы. Действительно аналогичную ситуацию мы опять же уже встречали на примере строки коэффициентов линейной формы.

Теорема 2.2. *Матрицы* B *и* B' *билинейной формы* $b(x, y)$*, заданные в базисах* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *и* $\{e'_j\}_{j=1}^n$ *связаны соотношением*

$$B' = C^T BC,$$

где $C = (c^i_j)$ *- матрица перехода от базиса* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *к базису* $\{e'_j\}_{j=1}^n$*.*

Доказательство. Полагая, что известна матрица перехода $C = (c^i_j)$, компоненты нового базиса можно выразить через векторы старого базиса как

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c^i_j e_i$$

Воспользуемся этим, чтобы получить компоненты матрицы билинейной формы в новом базисе

$$\beta'_{ij} = b(e'_i, e'_j) = b\left(\sum_{k=1}^n c^k_i e_k, \sum_{l=1}^n c^l_j e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c^k_i c^l_j\, b(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c^k_i c^l_j \beta_{kl},$$

где $\beta_{kl} = b(e_k, e_l)$ для всех $k, l = 1, ..n$ - коэффициенты матрицы билинейной формы в старом базисе. Данное двойное суммирование означает ничто иное как матричное умножение, которое можно записать в виде

$$B' = C^T BC$$

Данное утверждение легко проверяется прямым раскрытием матричного умножения в индексном виде.

§3. Квадратичная форма

Пусть $V(\mathbb{K})$ – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Предположим также, что в этом линейном пространстве определена билинейная форма $b : V \times V \to \mathbb{K}$.

Определение 3.1. Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \to \mathbb{K}, \qquad q(v) = b(v, v), \qquad \forall x \in V$$

Замечание 3.1. Любая билинейная форма $b(x, y)$ задает квадратичную функцию $q(v)$, которая получается из нее ограничением области определения с $V \times V$ на диагональ $\{(v, v) : v \in V\} \subset V \times V$.

Лемма 3.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени* 2 *от координат вектора.*

Доказательство. Справедливы следующие рассуждения:

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

Тем самым мы показали, что квадратичная форма является однородной функцией 2-го порядка. Зафиксируем теперь базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Произвольный вектор можем разложить по этому базису единственным образом $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$. Тогда квадратичная функция в координатном представлении имеет вид

$$q(v) = q\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = b\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j \beta_{ij},$$

где β_{ij} – коэффициенты билинейной формы, по которой построена квадратичная форма $q(v)$.

Лемма 3.2. *По квадратичной форме $q(v)$ однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной формы $b(x, y)$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму от суммы векторов $x, y \in V$:

$$q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x)+b(x,y)+b(y,x)+b(y,y) = q(x)+b(x,y)+b(y,x)+q(y)$$

Откуда

$$b(x,y) + b(y,x) = q(x+y) - q(x) - q(y)$$

Если билинейную форму полагать симметричной, т.е. $b \in \mathrm{Bil}^S(V)$, то имеем

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

Замечание 3.2. Предыдущей леммой определяется взаимно однозначное соответствие между множеством квадратичных форм и множеством симметричных билинейных форм.

Замечание 3.3. Любой антисимметричной билинейной форме соответствует нулевая квадратичная форма.

Замечание 3.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij}, квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii}(v^i)^2 + 2\sum_{i<j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где v^i – i-я координата вектора v в выбранном базисе.