Тензоры

§1. Преобразование тензора при замене базиса

В прошлой лекции мы определили тензор как набор компонент, которые получаются при вычислении полилинейной формы на наборах базисных элементов. Также вспомним, что координатные представления линейных и билинейных форм (строки и матрицы коэффициентов соответственно) преобразуются при замене базиса по определенным законам. Приведем их снова, а также дополнительные обозначения, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — линейное пространство размерности $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, а V^* — сопряженное к нему пространство. Определим в этих пространствах по паре базисов — "старый" и "новый":

$$V : \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_k\}_{k=1}^n$$
$$V^* : \{f^j\}_{j=1}^n, \quad \{f'^l\}_{l=1}^n$$

При этом между парами базисов из соответствующих пространств можно определить преобразование при помощи матрицы перехода $T = \{\tau_k^i\}$ и обратной к ней $S = \{\sigma_j^l\}$:

$$e'_k = e_j \tau_k^i \qquad f'^l = \sigma_j^l f^j,$$

где для записи преобразований мы сразу воспользовались соглашением о немом суммировании.

При этом для координат векторов $x = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и коэффициентов линейных форм $f = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ вводятся аналогичные преобразования:

$$\xi'^k = \sigma_i^k \xi^i \qquad \eta'_l = \eta_j \tau_j^l,$$

Откуда мы можем сделать выводы, что в принятых в данном курсе обозначениях, объекты, имеющие верхние индексы преобразуются при помощи обратной матрицы перехода S, а те объекты, что имеют нижние индексы, преобразуются при помощи исходной матрицы перехода T.

Обобщим этот результат на тензор полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ и закон преобразования его компонент при замене базиса. В согласии с определением из предыдущей лекции, введем тензор в новом базисе.

$$a'^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \mathcal{A}(e'_{k_1}, e'_{k_2}, \ldots, e'_{k_p}; f'^{l_1}, f'^{l_2}, \ldots, f'^{l_q}) =\mapsto$$

Теперь воспользуемся введенными преобразованиями базиса, чтобы записать выражение через элементы "старых" базисов:

$$\mapsto= \mathcal{A}(e_{i_1}\tau_{k_1}^{i_1}, e_{i_2}\tau_{k_2}^{i_2}, \ldots, e_{i_p}\tau_{k_p}^{i_p}; \sigma_{j_1}^{l_1} f^{j_1}, \sigma_{j_2}^{l_2} f^{j_2}, \ldots, \sigma_{j_q}^{l_q} f^{j_q}) =$$
$$= \tau_{k_1}^{i_1}\tau_{k_2}^{i_2}\ldots\tau_{k_p}^{i_p}\sigma_{j_1}^{l_1}\sigma_{j_2}^{l_2}\ldots\sigma_{j_q}^{l_q}\mathcal{A}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}) =$$
$$= \tau_{k_1}^{i_1}\tau_{k_2}^{i_2}\ldots\tau_{k_p}^{i_p}\sigma_{j_1}^{l_1}\sigma_{j_2}^{l_2}\ldots\sigma_{j_q}^{l_q} a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

где мы воспользовались тем, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным по каждому из аргументов, а также то, что в каждом аргументе подразумеваются именно линейные операции (немое суммирование и умножение на скаляры из матриц перехода).

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Тензор полилинейной формы при замене базиса преобразуется по закону:*
$$a'^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \tau^{i_1}_{k_1} \tau^{i_2}_{k_2} \dots \tau^{i_p}_{k_p} \sigma^{l_1}_{j_1} \sigma^{l_2}_{j_2} \dots \sigma^{l_q}_{j_q} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

Замечание 1.1. В некоторых приложениях алгебры именно этот закон преобразования лежит в основе определения тензора. Исходя из этой идеи, можно определить тензор как многокомпонентный объект, коэффициенты которого преобразуются по данному закону.

Помимо частных случаев, которые уже были приведены в начале лекции, можно связать преобразование тензора в общем виде и преобразование билинейной формы при замене базиса. Действительно, билинейной форме, как раньше и указывалось, соответствует тензор вида β_{ij}. В соответствии с введенным законом преобразования запишем этот частный случай в индексном виде

$$\beta'_{kl} = \tau^i_k \tau^j_l \beta_{ij},$$

что на языке матричного исчисления буквально соответствует $B' = T^T B T$.

Замечание 1.2. В предыдущей лекции этот закон преобразования записывался как $B' = C^T B C$. Однако во избежании путаницы с обозначениями текущей лекции была произведения замена обозначения матрицы перехода.

§2. Операция свертки

Определим еще одну операцию над полилинейными формами и тензорами соответственно.

Определение 2.1. Сверткой полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega^p_q$ называется отображение, результатом которого является функция $\mathcal{B}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемая как

$$\mathcal{B}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q) =$$
$$= \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{k-1}, \mathbf{e_r}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f^r}, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q)$$

полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r.

Полученная функция $\mathcal{B}$ является полилинейной формой в силу того, что свойства линейности индуцируются из $\mathcal{A}$.

Рассмотрим компоненты полученной полилинейной формы и введем для них обозначения в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$

$$\mathcal{A} \quad \leftrightarrow \quad a^{j_1\dots j_{l-1}j_l j_{l+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{k-1}i_k i_{k+1}\dots i_p}$$
$$\mathcal{B} \quad \leftrightarrow \quad b^{j_1\dots j_{l-1}j_{l+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_p}$$

Компоненты полилинейной формы $\mathcal{B}$ связаны с компонентами полилинейной формы $\mathcal{A}$ соотношением

$$b^{j_1\dots j_{l-1}j_{l+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_p} = a^{j_1\dots j_{l-1}\mathbf{r}j_{l+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{k-1}\mathbf{r}i_{k+1}\dots i_p},$$

которое получается из рассмотрения определения свертки при подстановке в них базисных векторов в качестве аргументов согласно определению тензора полилинейной формы.

Замечание 2.1. Необходимым условием для существования свертки в случае определения для полилинейной формы является наличие хотя бы одного векторного и одного ковекторного аргумента. В интерпретации операции для тензоров требуется существование хотя бы одного верхнего и одного нижнего индекса.

Пример 2.1. Через свертку можно рассматривать применение линейной формы f к вектору x

$$f(x) = \eta_i x^i = \eta_1 x^1 + \ldots + \eta_n x^n$$

Также, используя тензорную запись и операции, в том числе свертку, можно записать СЛАУ в индексном виде:

$$Ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha^j_i \xi^i = \beta^j,$$

где α^j_i соответствует компонентам матрицы A, а ξ^i и β^j — координаты векторов x и b соответственно.

Замечание 2.2. Все матричные операции, которые использовались ранее, могут быть представлены в тензорной записи соответствующих им объектов.

§3. Приложения тензоров

Ранее мы уже вводили символ Кронекера для соотношения между сопряженными базисами, но также существует его определение как тензорного объекта.

Определение 3.1. Символ Кронекера δ_{ij} — это дважды ковариантный тензор типа $(2,0)$, компоненты которого задаются как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Замечание 3.1. Символ Кронекера является симметричным в том смысле, что для него выполняется свойство:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

3.1. Символ Кронекера и скалярное произведение

Рассмотрим применение данного тензора в задачах геометрии, если определена декартова прямоугольная система координат.

Замечание 3.2. В случае ДПСК справедливо свойство:

$$\delta_{ij} a^j = a_i,$$

которое называют операцией поднятия и опускания индекса. Данное свойство справедливо не только в ДПСК и в дальнейших частях курса мы обобщим это свойство для произвольных систем координат.

С учетом этого свойства символ Кронекера оказывается полезным при записи скалярного произведения в ДПСК:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i.$$

3.2. Символ Леви-Чевиты

Определение 3.2. Символ Леви-Чевиты ε_{ijk} — это трижды ковариантный тензор типа $(3, 0)$, компоненты которого в ДПСК задаются как:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — чётная перестановка } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечётная перестановка}, \\ 0, & \text{иначе (если есть повторяющиеся индексы).} \end{cases}$$

Замечание 3.3. Символ Леви-Чивиты обладает свойством:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj},$$

которое называют антисимметричностью тензора. Это свойство напрямую следует из определения.

Перейдем к применению этого тензора в геометрии. Компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в ДПСК выражаются через символ Леви-Чевиты:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k.$$

В координатной форме:

$$\mathbf{c} = \left(\varepsilon_{1jk} a^j b^k, \varepsilon_{2jk} a^j b^k, \varepsilon_{3jk} a^j b^k\right).$$

Действительно, векторное произведение в ДПСК в полной форме может быть записано следующим образом

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2)\mathbf{i} + (a^3 b^1 - a^1 b^3)\mathbf{j} + (a^3 b^2 - a^2 b^3)\mathbf{k}$$

по определению из темы "Векторная алгебра". Обратим внимание, что если индексы координат векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не совпадают, то их произведения не входят в формулы нахождения компонент вектора $\mathbf{c}$. Точно также можно обратить внимание, что при изменении индексов у координат векторов знак произведения изменяется на противоположный. Это в точности соответствует определению и свойствам символа Леви-Чивиты.

Так как и скалярное и векторное произведение могут быть описаны при помощи тензоров, то естественным образом можно предположить, что и смешанное произведение допускает такую запись.

Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a^i) \cdot (\varepsilon_{ijk} b^j c^k) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

Наконец перейдем к еще одному обобщению применения символа Леви-Чивиты не только на геометрические задачи. Вспомним, что в ДПСК смешанное произведение может быть найдено при помощи определителя:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix},$$

но тогда можно предположить, что и определитель произвольной тройки векторов может быть найден при помощи операции свертки векторов-столбцов матрицы с символом Леви-Чивиты.

3.3. Определитель произвольной матрицы

Обобщим определение символа Леви-Чивиты до произвольного количества индексов.

Определение 3.3. Символ Леви-Чевиты $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ в n-мерном пространстве — это полностью антисимметричный тензор типа $(0, n)$ с n индексами. Его компоненты в любой декартовой системе координат определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ — чётная перестановка чисел } (1, 2, \ldots, n), \\ -1, & \text{если } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ — нечётная перестановка}, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях (если есть повторяющиеся индексы).} \end{cases}$$

Пояснение:

- **Антисимметричность:** Перестановка любых двух индексов меняет знак символа:
$$\varepsilon_{\ldots i \ldots j \ldots} = -\varepsilon_{\ldots j \ldots i \ldots}.$$
- **Ненулевые компоненты:** Отличны от нуля только компоненты, где все индексы различны и образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$.

- **Знак перестановки:** Чётность перестановки определяется количеством транспозиций, необходимых для восстановления исходного порядка $(1, 2, \ldots, n)$.

Для квадратной матрицы $A = (A_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель выражается как:

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_2^{i_2}$$

Учтем, что в силу соглашения Эйнштейна здесь производится суммирование по всем индексам $i_1, i_2, \ldots, i_n$, а сам символ Леви-Чивиты принимает значение только $+1$ или -1. Это приводит нас к определителю матрицы n-го порядка

$$\det A = \sum_{\sigma(1,\ldots,n)} (-1)^{[\sigma]} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_2^{i_2}$$

В данном случае, под σ подразумевается преобразование переупорядочивания индексов.

Замечание 3.4. Определитель матрицы наиболее естественным образом получается из рассмотрения тензоров, в особенности антисимметричных.