Корневые пространства

Диагональная матрица как раз и является «наиболее простым» видом матрицы линейного оператора. Если мы смогли привести матрицу оператора к диагональному виду, то легко можем найти любую степень оператора. Это открывает путь к вычислению, например, многочленов от операторов. Но как показывает предыдущий пример, линейный оператор может не иметь собственного базиса из даже в том случае, когда все корни его характеристического многочлена лежат в поле, над которым определено векторное пространство. Далее мы введём понятие корневого вектора, обобщающее понятие собственного вектора, и покажем, что в случае, когда спектр линейного оператора содержится в поле, над которым определено векторное пространство, пространство раскладывается в прямую сумму так называемых корневых подпространств.

§1. Корневые векторы и корневые подпространства

Определение 1.1. Вектор $x \in V$ называется ***корневым вектором*** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda \in F$, если существует такое целое неотрицательное число k, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k x = 0$. Наименьшее такое k называется ***высотой*** корневого вектора x.

Замечание 1.1. Если x — корневой вектор высоты k, то $\widetilde{x} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})x$ является корневым вектором высоты $k - 1$.

Пример 1.1. а) Корневые векторы высоты 0 — нулевые векторы;

б) Корневые векторы высоты 1 — собственные векторы;

в) Каждый многочлен есть корневой вектор с собственным числом 0 оператора дифференцирования пространства многочленов, причём высота многочлена как корневого вектора равна $n + 1$, где n — степень этого многочлена;

Пример 1.2. Пусть V — пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с вещественными значениями, $\mathcal{D}$ — оператора дифференцирования. Тогда:

1) $f \in V$ — собственный с собственным значением λ: $\mathcal{D}f = f' = \lambda f$. Следовательно $\dfrac{f'}{f} = \lambda \Leftrightarrow \ln|f| = \lambda x + C \Leftrightarrow |f| = e^C e^{\lambda t} \Leftrightarrow f = Ce^{\lambda t}$, $C \in R \setminus \{0\}$.

2) Корневые векторы: положим $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$, $g \in V$, тогда $(\mathcal{D} - \lambda\mathcal{E})f = f'(t) - \lambda f(t) = \lambda e^{\lambda t} g(t) + e^{\lambda t} g'(t) - \lambda f(t) = e^{\lambda t} g'(t)$. То есть f — корневой тогда и только тогда, когда существует такое k, что $g^{(k)}(t) = 0$, то есть $g \in \mathbb{R}[t]$. Таким образом, корневые векторы для оператора дифференцирования — это функции вида $e^{\lambda t} g(t)$, где $g(t)$ — многочлен. Высота такого корневого вектора равна $\deg g + 1$. Они называются квазимногочленами. Вспомните о них, когда будете изучать линейные дифференциальные уравнения ☺

Корневые векторы, отвечающие собственному значению λ, высоты $\leqslant k$ — это $\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k \leqslant V$. Возникает цепочка подпространств

$$V_\lambda = \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) \leqslant \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^2 \leqslant \ldots \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k \leqslant \ldots \leqslant V^\lambda,$$

где V^λ={все корневые векторы с собственным значение λ} — ***корневое подпространство*** с собственным значением λ:

$$V^\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^i.$$

В конечномерном случае эта цепочка с некоторого момента стабилизируются — размерности подпространств растут до тех пор, пока мы не дойдём до размерности корневого подпространства. Будем считать, что $\dim V < \infty$.

Теорема 1.1. (***свойства корневых подпространств***)
1) V^λ *$\mathcal{A}$-инвариантно;*
2) $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = \mathcal{N}$ — ***нильпотентный*** *оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m, то $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$;*
3) $(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ *невырожден при $\mu \neq \lambda$;*
4) $\dim V^\lambda = m(\lambda)$ *(геометрический смысл алгебраической кратности).*

Доказательство.

1) Пусть $V_k^\lambda = \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k$, тогда $V_\lambda \leqslant V_1^\lambda \leqslant V_2^\lambda \leqslant \ldots \leqslant V_m^\lambda = V^\lambda$. Заметим, что $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})V_k^\lambda \leqslant V_{k-1}^\lambda \leqslant V_k^\lambda$. То есть, V_k^λ инвариантно относительно $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$, следовательно, V_k^λ и $\mathcal{A}$-инвариантно. Это верно и для $V_m^\lambda = V^\lambda$.

2) Выберем в V^λ базис, согласованный с цепочкой подпространств V_i^k: $e_1, \ldots, e_{l_1}$ — базис V_1^λ, $e_1, \ldots, e_{l_1}, \ldots, e_{l_2}$ — базис V_2^λ и т.д., $e_1, \ldots, e_{l_m}$ — базис $V_m^\lambda = V^\lambda$. $\mathcal{N}(V_k^\lambda) \leqslant V_{k-1}^\lambda$ (положим $V_0^\lambda = \{0\}$). Из этого следует, что $\mathcal{N}e_j \in \langle e_1, \ldots, e_{j-1}\rangle$, следовательно $\mathcal{N}^{l_m} = \mathcal{O}$, где $l_m = \dim V^\lambda$.

3) В базисе $e_1, \ldots, e_{l_1}, \ldots, e_{l_m}$ матрица оператора $\mathcal{N}$ верхнетреугольная с нулями на главной диагонали (***верхненильтреугольная***), тогда матрица оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = \mathcal{N}+\lambda\mathcal{E}$ верхнетреугольная с λ-ми на главной диагонали, а матрица оператора $(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ верхнетреугольная с $\lambda-\mu$ на главной диагонали. Следовательно (так как $\lambda \neq \mu$) она невырожденная и, значит, оператор $(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ тоже невырожден.

4) Дополним базис V^λ до базиса всего пространства V. В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-треугольный вид:

$$\begin{pmatrix} A|_{V^\lambda} & D \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{A|_{V^\lambda}}(t)\det(tE-C) = (t-\lambda)^{l_m}\det(tE-C)$. Нужно показать, что λ не является собственным значением оператора $\mathcal{C}$ в пространстве $\langle e_{l_m+1}, \ldots, e_n\rangle$ с матрицей C. Пусть существует такой вектор $0 \neq x \in \langle e_{l_m+1}, \ldots, e_n\rangle$, что

$\mathcal{C}x = \lambda x$. Это означает, что $\mathcal{A}x = \lambda x + y$, $y \in V^\lambda$. Следовательно, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})x = y$ — корневой вектор, но тогда и x — корневой вектор, что противоречит определению V^λ.

Теорема 1.2. *Корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениями, линейно независимы.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы для собственных подпространств.

Теорема 1.3. *Базис пространства V может быть образован объединением базисов корневых подпространств.*

Доказательство. Корневые подпространства линейно независимы, а значит их сумма является прямой. Сумма размерностей корневых пространств дает размерность линейного пространства V:

$$\sum_i \dim V^{\lambda_i} = \sum_i m(\lambda_i) = n = \dim V$$

Следовательно, пространство V может быть представлено

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_p},$$

где p — количество различных собственных чисел.

Из разложения в прямую сумму следует справедливость утверждения. □

§2. Структура нильпотентных операторов

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m, что $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$. Наименьшее из таких m называют ***высотой*** нильпотентного оператора. Для него все векторы V — корневые с собственным значением 0, высоты не больше m.

Пример 2.1. Оператор дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ — нильпотентный высоты $n + 1$.

В силу пункта 3 теоремы 7.1 изучение произвольного оператора сводится к изучению нильпотентного оператора на соответствующем корневом подпространстве.

Лемма 2.1. *Пусть $x \in V$ — вектор высоты $k > 0$. Тогда векторы $x, \mathcal{N}x, \ldots, \mathcal{N}^{k-1}x$ линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по k. Если $k = 1$, в этом случае $x \neq 0$ и доказывать нечего. Пусть $\alpha_0 x + \alpha_1 \mathcal{N}x + \ldots + \alpha_{k-1}\mathcal{N}^{k-1}x = 0$. Применим оператор $\mathcal{N}$ к обеим частям равенства, получим $\alpha_0 \mathcal{N}x + \alpha_1 \mathcal{N}^2 x + \ldots + \alpha_{k-2}\mathcal{N}^{k-1}x = 0$, так как

$\mathcal{N}^k x = 0$. Пусть $\mathcal{N}x = y$, его высота $k-1$ и $\alpha_0 y + \alpha_1 \mathcal{N}y + \ldots + \alpha_{k-2}\mathcal{N}^{k-2}y = 0$. Поскольку по предположению индукции векторы $y, \mathcal{N}y, \ldots, \mathcal{N}^{k-1}y$ линейно независимы, то $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{k-2} = 0$. Но тогда и $\alpha_{k-1}\mathcal{N}x = 0$. Так как высота x равна k, то $\mathcal{N}^{k-1}x \neq 0$, значит, $\alpha_{k-1} = 0$, следовательно, $x, \mathcal{N}x, \ldots, \mathcal{N}^{k-1}x$ линейно независимы.

Определение 2.1. Подпространство $U = \langle x, \mathcal{N}x, \mathcal{N}^2x, \ldots, \rangle$ называется ***циклическим подпространством*** нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, порождённым вектором x.

Циклическое подпространство U — наименьшее $\mathcal{N}$-инвариантное подпространство, содержащее x, $\dim U = k$, где k — высота вектора x.

Базис U: $x_1, x_2, \ldots x_k$, где $x_i = \mathcal{N}^{k-i}x$. Такой базис называется ***жордановой цепочкой***: $0 \xleftarrow{\mathcal{N}} x_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} x_2 \xleftarrow{\mathcal{N}} \ldots \xleftarrow{\mathcal{N}} x_{k-1} \xleftarrow{\mathcal{N}} x_k$, то есть первый вектор переходит при действии $\mathcal{N}$ в нулевой, второй — в первый и т.д, последний — в предпоследний. Следовательно, матрица оператора $\mathcal{N}$ в базисе $x_1, x_2, \ldots x_k$ имеет вид

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

называемый ***нильпотентной жордановой клеткой*** порядка k.

Пример 2.2. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{D}^2 = \dfrac{d^2}{dx^2} : \mathbb{R}[x]_7 \to \mathbb{R}[x]_7$, $f_i = \dfrac{x^k}{k!}$, $i = \overline{0,7}$ — базис $\mathbb{R}[x]_7$. Действие $\mathcal{N}$ на базисных векторах даёт следующие жордановы цепочки

$$0 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_3 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_5 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_7,$$

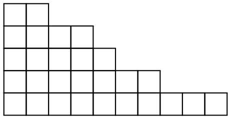
$$0 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_0 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_2 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_4 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_6.$$

Теорема 2.1. (***основная теорема о структуре нильпотентного оператора***) *Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор на V. Тогда существует разложение пространства V в прямую сумму циклических подпространств этого оператора $V = \bigoplus U_i$. Количество слагаемых в таком разложении равно* $\dim \ker \mathcal{N}$.

Пример 2.3. В предыдущем примере $\mathbb{R}[x]_7 = \langle f_1, f_3, f_5, f_7 \rangle \oplus \langle f_0, f_4, f_2, f_6 \rangle$. $\dim \ker \mathcal{N} = \dim \langle f_0, f_1 \rangle = \dim \mathbb{R}[x]_1 = 2$. Нетрудно заметить, что в данном случае разложение в прямую сумму циклических — это разложение в прямую сумму подпространств чётных и нечётных многочленов степени не выше 7.

Определение 2.2. ***Жордановым базисом*** пространства V относительно оператора $\mathcal{A}$ называется базис, построенный как совокупность жордановых цепочек всех циклических подпространств для всех корневых подпространств.

Наглядно можно изображать структуру нильпотентного оператора с помощью так называемой ***диаграммы Юнга***, которая в данном случае схематически показывает, как действует нильпотентный оператор на базисных векторах жорданова базиса:



С помощью такой диаграммы нильпотентный оператор задаётся однозначно. Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

- Высота строки соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора (линейной комбинации базисных) определяется как наибольшая высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом
- i-тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства U_i
- Ядро оператора $\mathcal{N}^k$ — линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k
- Векторы, лежащие в нижней строке, при действии оператора переходят в нулевые

Пример 2.4. Для примеров 8.2 и 8.3 диаграмма Юнга имеет вид:

f_7	f_6
f_5	f_4
f_3	f_2
f_1	f_0

Высота вектора $2f_4 - 8f_1$ равна $\max\{3, 1\} = 3$, $\ker\mathcal{N}^2 = \langle f_0, f_1, f_2, f_3\rangle$.