

Отображения в линейных пространствах

Данный раздел посвящен рассмотрению отображений в линейных пространствах. Ранее в курсе мы уже затрагивали тему отображений в линейных пространствах, рассматривая изоморфные линейные пространства. В этом разделе мы увидим, что существует еще несколько типов отображений, обладающих свойствами линейности или схожими с ними. Одной из основных целей является выявление общих подходов к рассмотрению любых отображений такого рода.

Содержание

§1 Введение	2
§2 Сопряженное пространство	3
§3 Изоморфизмы сопряженных пространств	6

Литература:

- Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: «Наука», 1984.
- Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. М.: МЦНМО, 2014. (Содержит подробные решения)
- Ершов А.В. Лекции по линейной алгебре. Москва, 2022

Лекция I. Линейные формы

§1. Введение

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Линейной формой** на пространстве V называется такая функция $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(б) Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Замечание 1.1. Для любого линейного отображения $f : V \rightarrow U$ справедливо, что образом линейной комбинации произвольных векторов $v_i \in V$ будет линейная комбинация образов этих векторов:

$$f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i)$$

Пример 1.1. Пусть E – пространство геометрических векторов (на плоскости или в пространстве) с введенным скалярным произведением $\langle x, y \rangle$. Линейную форму $f(v)$ можно задать как

$$f(v) = \langle a, v \rangle,$$

где $a \in E$ – фиксированный вектор.

Пример 1.2. Пусть $V = M_n(\mathbb{K})$ – пространство квадратных матриц n -го порядка с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Линейную форму можно задать как

$$f(A) = \operatorname{tr} A, \quad A \in M_n(\mathbb{K})$$

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ – пространство полиномов степени не выше n . Линейную форму можно задать как

$$f(p) = p(x) \Big|_{x=x_0}$$

Пример 1.4. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство элементов $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Линейную форму можно задать как

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Замечание 1.2. Последний пример примечателен тем, что любую линейную форму можно представить в таком виде.

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

Определение 1.2. Коэффициентами φ_i линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

Теорема 1.1. Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i$$

Таким образом получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого вектора и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены в одном и том же базисе.

§2. Сопряженное пространство

Рассмотрим множество линейных форм, заданных в линейном пространстве V .

Определение 2.1. Линейные формы f и g будем называть **равными**, если

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

Определение 2.2. Линейная форма θ называется **нулевой (нуль-формой)**, если

$$\theta(v) = 0, \quad \forall v \in V$$

Очевидно, что мы можем определить действия на множестве форм.

Определение 2.3. Суммой линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \quad \forall v \in V$$

Лемма 2.1. Отображение h является линейной формой.

Доказательство. Покажем справедливость свойства аддитивности:

$$\begin{aligned} h(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) = \\ &= (f(v_1) + g(v_1)) + (f(v_2) + g(v_2)) = h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

Выполнение свойства однородности показывается аналогично.

Определение 2.4. Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется отображение $l = \alpha f$ такое, что

$$l(v) = \alpha \cdot f(v), \quad \forall v \in V$$

Доказательство. Аналогично лемме о сумме линейных форм.

Из приведенных выше определений и лемм следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. Множество линейных форм V^* , заданных на линейном пространстве V образует линейное (сопряженное) пространство.

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V . Введем набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает j -ю координату вектора $v \in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

Лемма 2.2. Набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^* .

Доказательство. Чтобы показать справедливость утверждения, необходимо доказать полноту и линейную независимость этого набора. Покажем сначала полноту:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_i v^i = \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i(v) = \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i f^i \right) (v)$$

Аналогично с линейной независимостью. Предположим, что линейная комбинация форм с некоторыми коэффициентами α_i равна нуль-форме.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i = \theta$$

Применяя эту нуль-форму к произвольному базисному вектору, получим

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i \right) (e_k) = \theta(e_k) = 0$$

Учитывая также свойства линейности и их определение

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k f^k(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0$$

Замечание 2.1. Каждому базису в пространстве V может быть найден и притом единственный сопряженный базис, связанный с ним соотношением, которое указано выше.

Посмотрим теперь как преобразуется сопряженный базис при преобразовании базиса пространства X .

Теорема 2.2. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{f}^l\}_{l=1}^n$ – базисы V^* , сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i$$

где $(\sigma_i^l) = S$ – элементы обратной матрицы перехода, полагая $(\tau_k^j) = T$ – матрица перехода из $\{e^j\}_{j=1}^n$ в $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. По определению сопряженных базисов имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}^l(\tilde{e}_k) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i \left(\sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j f^i(e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^i = \delta_k^l \end{aligned}$$

Откуда следует, что произведение матрицы, составленной из σ_i^l , на матрицу перехода с элементами τ_k^j должно быть равно единичной матрице. А это есть не что иное как определение обратной матрицы.

Теорема 2.3. Преобразование координат формы в V^* при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\tilde{f}^l\}_{l=1}^n$ имеет вид

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \quad (\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2, \dots, \tilde{\eta}^n) = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n) \cdot T$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_l = f(\tilde{e}_l) &= \sum_{i=1}^n \eta_i f^i \left(\sum_{j=1}^n \tau_l^j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j f^i(e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \end{aligned}$$

Замечание 2.2. Координаты линейной формы преобразуются точно по такому же закону, что и сам базис пространства V . По этой причине их также называют **ковекторами**.

§3. Изоморфизмы сопряженных пространств

В силу доказанного утверждения о базисе сопряженного пространства справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пространство V и сопряженное пространство V^* изоморфны.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из того, что $\dim V = \dim V^*$ (мощности базисов равны), а следовательно

$$V \simeq \mathbb{K}^n \simeq V^*$$

Изоморфизм устанавливается введенным соответствием между базисами пространств V и V^* .

Отметим, что операцию нахождения сопряженного пространства можно применять итеративно.

Определение 3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.

Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

Теорема 3.1. *Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

Доказательство. Рассмотрим элементы второго сопряженного пространства $\hat{v}, \hat{u} \in V^{**}$:

$$\begin{aligned}\hat{v} : V^* &\rightarrow \mathbb{K}, & \hat{v}(f) &\in \mathbb{K} \\ \hat{v}(f + g) &= \hat{v}(f) + \hat{v}(g), & \hat{v}(\alpha f) &= \alpha \hat{v}(f) \\ (\hat{v} + \hat{u})(f) &= \hat{v}(f) + \hat{u}(f), & (\alpha \hat{v})(f) &= \alpha \hat{v}(f)\end{aligned}$$

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\hat{x} \leftrightarrow x : \quad \hat{v}(f) = f(v) \quad \forall f \in V^*$$

Замечание 3.1. Данное утверждение имеет ряд важных следствий для тензорного анализа, который будет обсуждаться позднее.

Отображения в линейных пространствах

§1. Введение

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Билинейной формой** на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

Замечание 1.1. Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее. Отсюда сразу следует первый пример.

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Пример 1.2. Скалярное произведение геометрических векторов на плоскости (в пространстве) линейно по каждому из аргументов, а следовательно является билинейной формой.

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где $x = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^T \in V$ и $y = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)^T \in V$.

Замечание 1.2. Последний пример примечателен тем, что любую билинейную форму можно представить в таком виде.

Рассмотрим $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ – множество всех билинейных форм с аргументами из V . Для этого множества справедливо следующее.

(а) Билинейные формы $b, b' \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ равны тогда и только тогда, когда принимают равные значения на одинаковых парах аргументов:

$$b = b' \quad \Leftrightarrow \quad b(x, y) = b'(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

(б) Существует нулевая билинейная форма $\theta \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$, принимающая 0 $\in \mathbb{K}$ на любой паре аргументов.

$$\theta \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) : \quad \theta(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in V$$

(в) Может быть определена сумма билинейных форм $b, b' \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ как отображение вида

$$c = b + b' \quad \Leftrightarrow \quad c(x, y) = b(x, y) + b'(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

(г) Может быть определено умножение билинейной формы $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ как отображение вида

$$d = \lambda b \quad \Leftrightarrow \quad d(x, y) = \lambda b(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

Лемма 1.1. *Отображения c и d являются билинейными формами.*

Доказательство. Аналогично соответствующим утверждениям для линейных форм.

Лемма 1.2. *Множество $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ наделено структурой линейного пространства.*

Доказательство. Можно убедиться путем прямой проверки аксиом линейного пространства.

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x, y) = b(y, x)$.

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x, y) = -b(y, x)$.

Замечание 1.3. Множество симметричных (антисимметричных) билинейных форм образует линейное подпространство $\text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)$ ($\text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$) в $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)), \quad b^S \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)$$

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)), \quad b^{AS} \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Лемма 1.3. *Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.*

Доказательство. Убеждаемся непосредственной проверкой:

$$b^S(x, y) + b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)) + \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)) = b(x, y)$$

Лемма 1.4. *Пространство билинейных форм представляется в виде прямой суммы подпространств симметричных и антисимметричных билинейных форм.*

$$\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) \oplus \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Доказательство. Процедура изготовления симметричных (антисимметричных) форм, описанная выше, позволяет заключить, что

$$\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) + \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Покажем, что сумма будет прямой. Пусть билинейная форма $h(x, y)$ такова, что $h \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) \cap \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$. Тогда имеем

$$\begin{cases} h(x, y) = h(y, x) \\ h(x, y) = -h(y, x) \end{cases} \Rightarrow h(y, x) = -h(y, x) \Rightarrow h(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

В пересечении подпространств лежит только нулевая билинейная форма. Следовательно сумма является прямой.

§2. Матрица билинейной формы

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

Определение 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x, y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

Теорема 2.1. *Задание билинейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V билинейная форма $b(x, y)$ задана набором коэффициентов $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда $\forall x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$:

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \eta^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \beta_{ij}$$

По аналогии с линейными формами, коэффициенты которых можно представить в виде вектора-строки, существует аналогичное представление для билинейной формы.

Определение 2.2. Матрицей билинейной формы $b(x, y)$ называется матрица B , составленная из ее коэффициентов.

Лемма 2.1. Пространство билинейных форм $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ изоморфно пространству квадратных матриц $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned} b &\leftrightarrow B & b' &\leftrightarrow B' \\ b + b' &\leftrightarrow B + B' \\ \lambda b &\leftrightarrow \lambda B \end{aligned}$$

Соответствие между линейными операциями с билинейными формами и матрицами проверяется непосредственной проверкой определений.

Замечание 2.1. По этой же самой аналогии мы устанавливали изоморфизм между $V^* \simeq \mathbb{K}^n$, если $\dim V = n$. Мы снова наблюдаем идею "координатизации" пространства. В данном случае "координатами" билинейной формы служат коэффициенты ее матрицы.

Замечание 2.2. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$\begin{aligned} b^S &\leftrightarrow B_S & B_S &= B_S^T \\ b^{AS} &\leftrightarrow B_{AS} & B_{AS} &= -B_{AS}^T \end{aligned}$$

В силу того, что матрица билинейной формы определяется как объект, зависящий от выбора базиса, то и смена базиса должна приводить к изменению матрицы билинейной формы. Действительно аналогичную ситуацию мы опять же уже встречали на примере строки коэффициентов линейной формы.

Теорема 2.2. Матрицы B и B' билинейной формы $b(x, y)$, заданные в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e'_j\}_{j=1}^n$ связаны соотношением

$$B' = C^T B C,$$

где $C = (c_j^i)$ - матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

Доказательство. Полагая, что известна матрица перехода $C = (c_j^i)$, компоненты нового базиса можно выразить через векторы старого базиса как

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_j^i e_i$$

Воспользуемся этим, чтобы получить компоненты матрицы билинейной формы в новом базисе

$$\beta'_{ij} = b(e'_i, e'_j) = b\left(\sum_{k=1}^n c_i^k e_k, \sum_{l=1}^n c_j^l e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l b(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l \beta_{kl},$$

где $\beta_{kl} = b(e_k, e_l)$ для всех $k, l = 1, \dots, n$ - коэффициенты матрицы билинейной формы в старом базисе. Данное двойное суммирование означает ничто иное как матричное умножение, которое можно записать в виде

$$B' = C^T B C$$

Данное утверждение легко проверяется прямым раскрытием матричного умножения в индексном виде.

§3. Квадратичная форма

Пусть $V(\mathbb{K})$ – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Предположим также, что в этом линейном пространстве определена билинейная форма $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Определение 3.1. **Квадратичной формой** на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad q(v) = b(v, v), \quad \forall v \in V$$

Замечание 3.1. Любая билинейная форма $b(x, y)$ задает квадратичную функцию $q(v)$, которая получается из нее ограничением области определения с $V \times V$ на диагональ $\{(v, v) : v \in V\} \subset V \times V$.

Лемма 3.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.*

Доказательство. Справедливы следующие рассуждения:

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

Тем самым мы показали, что квадратичная форма является однородной функцией 2-го порядка. Зафиксируем теперь базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V . Произвольный вектор можем разложить по этому базису единственным образом $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$. Тогда квадратичная функция в координатном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} q(v) &= b\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j \beta_{ij}, \end{aligned}$$

где β_{ij} – коэффициенты билинейной формы, по которой построена квадратичная форма $q(v)$.

Лемма 3.2. *По квадратичной форме $q(v)$ однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной формы $b(x, y)$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму от суммы векторов $x, y \in V$:

$$q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = q(x) + b(x, y) + b(y, x) + q(y)$$

Откуда

$$b(x, y) + b(y, x) = q(x+y) - q(x) - q(y)$$

Если билинейную форму полагать симметричной, т.е. $b \in \text{Bil}^S(V)$, то имеем

$$b(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Замечание 3.2. Предыдущей леммой определяется взаимно однозначное соответствие между множеством квадратичных форм и множеством симметричных билинейных форм.

Замечание 3.3. Любой антисимметричной билинейной форме соответствует нулевая квадратичная форма.

Замечание 3.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij} , квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} (v^i)^2 + 2 \sum_{i < j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где v^i — i -я координата вектора v в выбранном базисе.

Полилинейные формы

§1. Основные определения

Определение 1.1. Полилинейной формой на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, \alpha x'_i + \beta x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) = \\ = \alpha \mathcal{A}(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) + \beta \mathcal{A}(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q), \end{aligned}$$

где $x_i \in V$ и $\varphi^j \in V^*$.

Рассмотрим частные случаи полилинейных форм.

Определение 1.2. Валентностью полилинейной формы называют пару чисел (p, q) , определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

Пример 1.1. Линейные формы над V — это отображения вида

$$f : V \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\varphi \in V^*$ является ПЛФ валентности $(1, 0)$.

Пример 1.2. Линейные формы над V^* — это отображения вида

$$\hat{x} : V^* \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\hat{x} \in V^{**}$ является ПЛФ валентности $(0, 1)$. Однако ранее обсуждалось, что между пространствами V и V^{**} существует естественный изоморфизм, определяемый как

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow \hat{x} \quad (\hat{x}, f) = (f, x) \quad \forall f \in V^* \\ x \in V, \quad \hat{x} \in V^{**} \end{aligned}$$

Следовательно, можно утверждать, что ПЛФ валентности $(0, 1)$ однозначно соответствует элемент линейного пространства V в силу обсуждаемого изоморфизма.

Пример 1.3. Билинейные формы над V — это отображения вида

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности $(2, 0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

а такж все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее.

Пример 1.4. Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида

$$\psi : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

являющиеся ПЛФ валентности $(3, 0)$. Отображения такого вида встречались в геометрии — это смешанное произведение трех векторов.

§2. Действия с полилинейными формами

Пусть Ω_q^p — множество полилинейных форм валентности (p, q) .

Определение 2.1. Полилинейные формы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$ одинаковой валентности будем называть **равными**, если

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Определение 2.2. Нуль-формой $\Theta \in \Omega_q^p$ называется такая полилинейная форма, что

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = 0 \quad \forall x_i \in V, \forall \varphi^j \in V^*$$

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — полилинейные формы валентности (p, q) . Введем операции с ними.

2.1. Линейные операции

Определение 2.3. Отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ будем называть суммой полилинейных форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \\ = \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) + \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.1. Отображение $\mathcal{C}$, определенное как сумма полилинейных форм $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$ является полилинейной формой из Ω_q^p

Доказательство. Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм. $\square$

Аналогично можно ввести и умножение на скаляр.

Определение 2.4. Отображение $\lambda\mathcal{A}$ будем называть произведением полилинейной формы $\mathcal{A}$ на скаляр λ , если

$$(\lambda\mathcal{A})(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.2. *Отображение $\lambda\mathcal{A}$, определенное как произведение полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ является полилинейной формой из Ω_q^p*

Доказательство. Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм. $\square$

Теорема 2.1. *Множество Ω_q^p полилинейных форм валентности (p, q) образует линейное пространство.*

Доказательство. Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. $\square$

2.2. Произведение ПЛФ

Определение 2.5. Произведением полилинейных форм $\mathcal{A} \in \Omega_{q_1}^{p_1}$ и $\mathcal{B} \in \Omega_{q_2}^{p_2}$ называют отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ определяемое как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot \mathcal{B}(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) = \\ = \mathcal{C}(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) \end{aligned}$$

Пример 2.1. Билинейную форму $b(x_1, x_2) \in \Omega_q^p$ можно задать как

$$b(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2),$$

где $f, g \in \Omega_q^p = V^*$ — линейные формы.

Замечание 2.1. Произведение полилинейных форм валентностей (p_1, q_1) и (p_2, q_2) всегда позволяет получить полилинейную форму валентности (p_1+p_2, q_1+q_2) . Однако **не каждая** полилинейная форма валентности (p, q) **может быть представлена (разложена)** в произведение полилинейных форм валентностей (p_1, q_1) и (p_2, q_2) , даже если $p_1 + p_2 = p$ и $q_1 + q_2 = q$.

Лемма 2.3. *Отображение $\mathcal{C}$, введенное как произведение полилинейных форм, является полилинейной формой.*

$$\mathcal{C} \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

Доказательство. Не теряя общности, мы можем показать линейность по первому векторному аргументу. Для остальных доказательство может быть построено аналогичным образом, но его запись при этом усложнится значительно. Пусть произведение полилинейных форм задается следующим образом:

$$\mathcal{C}(x, \dots; \dots) = \mathcal{A}(x, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots, \dots; \dots),$$

где через многоточия обозначены остальные аргументы всех полилинейных форм согласно определению выше.

При этом, если аргумент x представлен линейной комбинацией $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) &= \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= (\alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots)) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{C}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{C}(x_2, \dots; \dots), \end{aligned}$$

где мы воспользовались свойством полилинейности отображения $\mathcal{A}$. В силу того, что это отображение линейно по каждому из аргументов, данные рассуждения справедливы по набору его аргументов. А также в силу того, что отображение $\mathcal{B}$ тоже является полилинейным, свойство линейности отображения $\mathcal{C}$ по каждому из аргументов набора из $\mathcal{B}$. $\square$

2.3. Свойства произведения полилинейных форм

(а) Некоммутативность

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяет порядок аргументов в $\mathcal{C}$. Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм $f^1, f^2 \in V^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= f^1 \cdot f^2 & \Rightarrow & \quad \mathcal{C}_1(x, y) = f^1(x) \cdot f^2(y) \\ \mathcal{C}_2 &= f^2 \cdot f^1 & \Rightarrow & \quad \mathcal{C}_2(x, y) = f^2(x) \cdot f^1(y) \end{aligned}$$

(б) Ассоциативность

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$$

(в) Нуль-форма

$$\mathcal{A} \cdot \Theta_{(p_2, q_2)} = \Theta_{(p_1, q_1)} \cdot \mathcal{B} = \Theta_{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)}$$

(г) Законы согласования операций (дистрибутивность)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) &= \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} &= \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \\ (\alpha \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} &= \alpha(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cdot (\alpha \mathcal{B}) \end{aligned}$$

§3. Тензор ПЛФ

Зафиксируем в $V(\mathbb{K})$ базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и построим к нему сопряженный базис $\{f^j\}_{j=1}^n$ в пространстве V^* . Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Определение 3.1. Тензором полилинейной формы $\mathcal{C}$ валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы $i_1, i_2, \dots, i_p$ и $j_1, j_2, \dots, j_q$ принимают значения $1, \dots, n$, где $n = \dim V$ — это размерность пространства V .

Замечание о неом суммировании

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило суммирования Эйнштейна**, или соглашение о неом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

- (а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

- (б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

- (в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

Теорема 3.1. Задание тензора эквивалентно заданию его компонент в паре базисов пространств V и V^* .

Доказательство. Рассмотрим набор векторов $x_1, \dots, x_p$ и форм $\varphi^1, \dots, \varphi^q$, заданных своими разложениями по базисам

$$x_k = \sum_{i=1}^n \xi_k^i e_i = \xi_k^i e_i \quad \varphi^l = \sum_{j=1}^n \eta_j^l f^j = \eta_j^l f^j$$

Применим к ним тензор $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q)$ и воспользуемся его линейными свойствами

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) &= \mathcal{C}(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \dots, \eta_{j_q}^q f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}, \end{aligned}$$

где в данной записи мы как раз воспользовались соглашением о немом суммировании. $\square$

Замечание 3.1. Таким образом мы получаем, что компоненты тензора однозначно задают его в фиксированной паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$. Данное свойство аналогично рассмотренным ранее:

- (а) Разложению линейной формы φ на коэффициенты $\{\varphi_i\}$ в базисе сопряженного пространства V^* ;
- (б) Матрице B билинейной формы $b(x, y)$, где коэффициент β_{ij} с парой индексов (ij) соответствует значению билинейной формы на базисных векторах e_i и e_j .

Тензоры

§1. Преобразование тензора при замене базиса

В прошлой лекции мы определили тензор как набор компонент, которые получаются при вычислении полилинейной формы на наборах базисных элементов. Также вспомним, что координатные представления линейных и билинейных форм (строки и матрицы коэффициентов соответственно) преобразуются при замене базиса по определенным законам. Приведем их снова, а также дополнительные обозначения, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — линейное пространство размерности $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, а V^* — сопряженное к нему пространство. Определим в этих пространствах по паре базисов — "старый" и "новый":

$$\begin{aligned} V : \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_k\}_{k=1}^n \\ V^* : \{f^j\}_{j=1}^n, \quad \{f'^l\}_{l=1}^n \end{aligned}$$

При этом между парами базисов из соответствующих пространств можно определить преобразование при помощи матрицы перехода $T = \{\tau_k^i\}$ и обратной к ней $S = \{\sigma_j^l\}$:

$$e'_k = e_j \tau_k^j \quad f'^l = \sigma_j^l f^j,$$

где для записи преобразований мы сразу воспользовались соглашением о немом суммировании.

При этом для координат векторов $x = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ и коэффициентов линейных форм $f = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ вводятся аналогичные преобразования:

$$\xi'^k = \sigma_i^k \xi^i \quad \eta'_l = \eta_j \tau_j^l,$$

Откуда мы можем сделать выводы, что в принятых в данном курсе обозначениях, объекты, имеющие верхние индексы преобразуются при помощи обратной матрицы перехода S , а те объекты, что имеют нижние индексы, преобразуются при помощи исходной матрицы перехода T .

Обобщим этот результат на тензор полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ и закон преобразования его компонент при замене базиса. В согласии с определением из предыдущей лекции, введем тензор в новом базисе.

$$a'^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \mathcal{A}(e'_{k_1}, e'_{k_2}, \dots, e'_{k_p}; f'^{l_1}, f'^{l_2}, \dots, f'^{l_q}) \mapsto$$

Теперь воспользуемся введенными преобразованиями базиса, чтобы записать выражение через элементы "старых" базисов:

$$\begin{aligned} \mapsto \mathcal{A}(e_{i_1} \tau_{k_1}^{i_1}, e_{i_2} \tau_{k_2}^{i_2}, \dots, e_{i_p} \tau_{k_p}^{i_p}; \sigma_{j_1}^{l_1} f^{j_1}, \sigma_{j_2}^{l_2} f^{j_2}, \dots, \sigma_{j_q}^{l_q} f^{j_q}) = \\ = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} \mathcal{A}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = \\ = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным по каждому из аргументов, а также то, что в каждом аргументе подразумеваются именно линейные операции (немое суммирование и умножение на скаляры из матриц перехода).

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Тензор полилинейной формы при замене базиса преобразуется по закону:*

$$a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_p} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

Замечание 1.1. В некоторых приложениях алгебры именно этот закон преобразования лежит в основе определения тензора. Исходя из этой идеи, можно определить тензор как многокомпонентный объект, коэффициенты которого преобразуются по данному закону.

Помимо частных случаев, которые уже были приведены в начале лекции, можно связать преобразование тензора в общем виде и преобразование билинейной формы при замене базиса. Действительно, билинейной форме, как раньше и указывалось, соответствует тензор вида β_{ij} . В соответствии с введенным законом преобразования запишем этот частный случай в индексном виде

$$\beta'_{kl} = \tau_k^i \tau_l^j \beta_{ij},$$

что на языке матричного исчисления буквально соответствует $B' = T^T B T$.

Замечание 1.2. В предыдущей лекции этот закон преобразования записывался как $B' = C^T B C$. Однако во избежании путаницы с обозначениями текущей лекции была произведена замена обозначения матрицы перехода.

§2. Операция свертки

Определим еще одну операцию над полилинейными формами и тензорами соответственно.

Определение 2.1. Сверткой полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ называется отображение, результатом которого является функция $\mathcal{B}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемая как

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q) = \\ = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{k-1}, \mathbf{e}_r, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f}^r, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r .

Полученная функция $\mathcal{B}$ является полилинейной формой в силу того, что свойства линейности индуцируются из $\mathcal{A}$.

Рассмотрим компоненты полученной полилинейной формы и введем для них обозначения в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leftrightarrow a_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} \\ \mathcal{B} &\leftrightarrow b_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} \end{aligned}$$

Компоненты полилинейной формы $\mathcal{B}$ связаны с компонентами полилинейной формы $\mathcal{A}$ соотношением

$$b_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} = a_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q},$$

которое получается из рассмотрения определения свертки при подстановке в них базисных векторов в качестве аргументов согласно определению тензора полилинейной формы.

Замечание 2.1. Необходимым условием для существования свертки в случае определения для полилинейной формы является наличие хотя бы одного векторного и одного ковекторного аргумента. В интерпретации операции для тензоров требуется существование хотя бы одного верхнего и одного нижнего индекса.

Пример 2.1. Через свертку можно рассматривать применение линейной формы f к вектору x

$$f(x) = \eta_i x^i = \eta_1 x^1 + \dots + \eta_n x^n$$

Также, используя тензорную запись и операции, в том числе свертку, можно записать СЛАУ в индексном виде:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i^j \xi^i = \beta^j,$$

где α_i^j соответствует компонентам матрицы A , а ξ^i и β^j — координаты векторов x и b соответственно.

Замечание 2.2. Все матричные операции, которые использовались ранее, могут быть представлены в тензорной записи соответствующих им объектов.

§3. Приложения тензоров

Ранее мы уже вводили символ Кронекера для соотношения между сопряженными базисами, но также существует его определение как тензорного объекта.

Определение 3.1. Символ Кронекера δ_{ij} — это дважды ковариантный тензор типа $(2, 0)$, компоненты которого задаются как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Замечание 3.1. Символ Кронекера является симметричным в том смысле, что для него выполняется свойство:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

3.1. Символ Кронекера и скалярное произведение

Рассмотрим применение данного тензора в задачах геометрии, если определена декартова прямоугольная система координат.

Замечание 3.2. В случае ДПСК справедливо свойство:

$$\delta_{ij}a^j = a_i,$$

которое называют операцией поднятия и опускания индекса. Данное свойство справедливо не только в ДПСК и в дальнейших частях курса мы обобщим это свойство для произвольных систем координат.

С учетом этого свойства символ Кронекера оказывается полезным при записи скалярного произведения в ДПСК:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = \sum_{i=1}^n a^i b_i.$$

3.2. Символ Леви-Чевиты

Определение 3.2. Символ Леви-Чевиты ε_{ijk} — это трижды ковариантный тензор типа $(3, 0)$, компоненты которого в ДПСК задаются как:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — чётная перестановка } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечётная перестановка,} \\ 0, & \text{иначе (если есть повторяющиеся индексы).} \end{cases}$$

Замечание 3.3. Символ Леви-Чивиты обладает свойством:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj},$$

которое называют антисимметричностью тензора. Это свойство напрямую следует из определения.

Перейдем к применению этого тензора в геометрии. Компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в ДПСК выражаются через символ Леви-Чевиты:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k.$$

В координатной форме:

$$\mathbf{c} = (\varepsilon_{1jk} a^j b^k, \varepsilon_{2jk} a^j b^k, \varepsilon_{3jk} a^j b^k).$$

Действительно, векторное произведение в ДПСК в полной форме может быть записано следующим образом

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{i} + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{j} + (a^3 b^2 - a^2 b^3) \mathbf{k}$$

по определению из темы "Векторная алгебра". Обратим внимание, что если индексы координат векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не совпадают, то их произведения не входят в формулы нахождения компонент вектора $\mathbf{c}$. Точно также можно обратить внимание, что при изменении индексов у координат векторов знак произведения изменяется на противоположный. Это в точности соответствует определению и свойствам символа Леви-Чивиты.

Так как и скалярное и векторное произведение могут быть описаны при помощи тензоров, то естественным образом можно предположить, что и смешанное произведение допускает такую запись.

Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a^i) \cdot (\varepsilon_{ijk} b^j c^k) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

Наконец перейдем к еще одному обобщению применения символа Леви-Чивиты не только на геометрические задачи. Вспомним, что в ДПСК смешанное произведение может быть найдено при помощи определителя:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix},$$

но тогда можно предположить, что и определитель произвольной тройки векторов может быть найден при помощи операции свертки векторов-столбцов матрицы с символом Леви-Чивиты.

3.3. Определитель произвольной матрицы

Обобщим определение символа Леви-Чивиты до произвольного количества индексов.

Определение 3.3. Символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ в n -мерном пространстве — это полностью антисимметричный тензор типа $(0, n)$ с n индексами. Его компоненты в любой декартовой системе координат определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ — чётная перестановка чисел } (1, 2, \dots, n), \\ -1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ — нечётная перестановка,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях (если есть повторяющиеся индексы).} \end{cases}$$

Пояснение:

- **Антисимметричность:** Перестановка любых двух индексов меняет знак символа:

$$\varepsilon_{\dots i \dots j \dots} = -\varepsilon_{\dots j \dots i \dots}.$$

- **Ненулевые компоненты:** Отличны от нуля только компоненты, где все индексы различны и образуют перестановку чисел $1, 2, \dots, n$.

- **Знак перестановки:** Чётность перестановки определяется количеством транспозиций, необходимых для восстановления исходного порядка $(1, 2, \dots, n)$.

Для квадратной матрицы $A = (A_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель выражается как:

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

Учтем, что в силу соглашения Эйнштейна здесь производится суммирование по всем индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$, а сам символ Леви-Чивиты принимает значение только $+1$ или -1 . Это приводит нас к определителю матрицы n -го порядка

$$\det A = \sum_{\sigma(1, \dots, n)} (-1)^{[\sigma]} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

В данном случае, под σ подразумевается преобразование переупорядочивания индексов.

Замечание 3.4. Определитель матрицы наиболее естественным образом получается из рассмотрения тензоров, в особенности антисимметричных.

Линейные отображения

Предыдущие темы были посвящены рассмотрению отображений, обладающих свойствами линейности по аргументам, результатом которых был скаляр из некоторого поля. Однако вместе с тем, существует еще один важный тип отображений, определяющий сопоставление элементов двух линейных пространств. Как мы увидим далее, линейные формы являются частным случаем этого семейства отображений.

§1. Основные понятия

Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. Отображение $\varphi : V \rightarrow W$ линейного пространства V в линейное пространство W называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ выполняются следующие свойства

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Замечание 1.1. Множество линейных отображений действующих их $V(\mathbb{K})$ в $W(\mathbb{K})$ будем обозначать $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Пример 1.1. Примеры линейных отображений:

(а) Нулевое отображение:

$$\mathcal{O}: V \rightarrow W \quad \mathcal{O}x = 0_W, \quad \forall x \in V$$

(б) Тожественное отображение:

$$\mathcal{I}: V \rightarrow V \quad \mathcal{I}x = x, \quad \forall x \in V$$

(в) Растяжение:

$$\varphi: V \rightarrow V \quad \varphi x = \lambda x, \quad \forall x \in V$$

(г) Пусть V разбивается в прямую сумму подпространств $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда проектором будем называть отображение:

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2}: V \rightarrow V, \quad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2}x = x_1, \quad \forall x_1 \in V_1$$

(д) Пусть $\mathbb{R}^{\leq n}[t]$ — пространство полиномов степени не выше n , а символом $\mathcal{D}$ будем обозначать дифференцирование

$$\mathcal{D}p = \frac{dp}{dt}, \quad \forall p \in \mathbb{R}^{\leq n}[t]$$

- (е) Пусть $M_n(\mathbb{K})$ — пространство квадратных матриц n -го порядка, на котором введены отображения симметризации Sym и антисимметризации Asym

$$\text{Sym}(A) = \frac{1}{2} (A + A^T) \quad \text{Asym}(A) = \frac{1}{2} (A - A^T)$$

Замечание 1.2. Нередко при записи символа линейного отображения и его аргумента опускаются скобки как в некоторых примерах выше. Иными словами, записи $\varphi(x)$ и φx считаются эквивалентными.

§2. Матрица отображения

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$, причем $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $\dim_{\mathbb{K}} W = m$, а также $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно.

Определение 2.1. Матрицей линейного отображения φ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A_\varphi = \{\alpha_i^j\}$, в столбцах которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}$ в базисе $\{g_j\}$

$$\varphi e_i = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j$$

Пример 2.1. (а) Нулевое отображение

$$\mathcal{O} \rightarrow \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(б) Тожественное отображение

$$\mathcal{I} \rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(в) Матрица проектора на V_1 , если $V = V_1 \oplus V_2$, найденная в базисе, согласованном с обоими подпространствами

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$$

так как

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = x, \quad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = 0, \quad \forall x \in V_1$$

Теорема 2.1. *Задание линейного отображения φ эквивалентно заданию его матрицы A_φ в фиксированной паре базисов.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ — линейное отображение и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно. Рассмотрим элементы $x \in V$ и $y \in W$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j, \quad \varphi(x) = y$$

Действие отображения на элемент x можно представить как

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \alpha_i^j$$

Тем самым мы обеспечили однозначность определения образа элемента, используя лишь коэффициенты матрицы оператора при условии, что сами векторы и матрица определены в одной и той же паре базисов. $\square$

§3. Пространство линейных отображений

Рассмотрим два линейных пространства $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ и множество всех линейных отображений, которые действуют между ними. Пусть также φ, ψ — линейные отображения из V в W .

Определение 3.1. Линейные отображения φ и ψ будем считать равными, если

$$\forall x \in V \quad \varphi(x) = \psi(x)$$

Определение 3.2. Отображение $\chi : V \rightarrow W$ называется суммой линейных отображений $\varphi, \psi : V \rightarrow W$, если

$$\forall x \in V \quad \chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Лемма 3.1. *Сумма $\chi = \varphi + \psi$ линейных отображений является линейным отображением.*

Доказательство. Для доказательства необходимо рассмотреть линейные свойства суммы линейных отображений:

$$\begin{aligned} \chi(x_1 + x_2) &= \varphi(x_1 + x_2) + \psi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \psi(x_1) + \psi(x_2) = \\ &= (\varphi + \psi)(x_1) + (\varphi + \psi)(x_2) = \chi(x_1) + \chi(x_2) \end{aligned}$$

$$\chi(\alpha x) = \varphi(\alpha x) + \psi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) + \alpha \psi(x) = \alpha(\varphi + \psi)(x) = \alpha \chi(x)$$

$\square$

Следствие 3.0.1. Матрица C_χ линейного отображения $\chi = \varphi + \psi$ определяется суммой матриц A_φ и B_ψ .

$$C_\chi = A_\varphi + B_\psi$$

Определение 3.3. Отображение ω называется произведением линейного отображения φ на число $\lambda \in \mathbb{K}$, если

$$\forall x \in V \quad \omega(x) = \lambda\varphi(x)$$

Лемма 3.2. Произведение $\omega = \lambda\varphi$ линейного отображения на скаляр является линейным отображением.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству суммы. $\square$

Следствие 3.0.2. Матрица D_ω линейного отображения $\omega = \lambda\varphi$ определяется умножением матрицы A_φ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$D_\omega = \lambda A_\varphi$$

Учитывая рассмотренные понятия равенства, определенных операций над отображениями, а также существования нулевого элемента, на множестве линейных отображений можно ввести структуру линейного пространства.

Теорема 3.1. Множество всех линейных отображений из пространства V в пространство W является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Доказательство. Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. $\square$

Замечание 3.1. В силу того, что между отображением и его матрицей в фиксированной паре базисов пространств V и W устанавливается соответствие, которое к тому же сохраняет свойства линейности, можно утверждать, что пространство $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ изоморфно матричному пространству $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y) \simeq M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Композиция линейных отображений

Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ и $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ — линейные отображения между соответствующими пространствами.

Определение 3.4. Отображение $\chi : V \rightarrow W$ называется композицией линейных отображений ψ и φ , если

$$\forall x \in V : \quad \chi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$$

Лемма 3.3. Композиция $\chi = \psi \circ \varphi$ линейных отображений является линейным отображением.

Доказательство. Рассмотрим образ линейной комбинации векторов из V

$$\chi \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \right) = (\psi \circ \varphi) \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \right) = \psi \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i \varphi(x_i) \right) = \sum_{i=1}^k \alpha^i \psi(\varphi(x_i)) = \sum_{i=1}^k \alpha^i \chi(x_i)$$

□

Следствие 3.1.1. Матрица композиции линейных отображений $\chi = \psi \circ \varphi$ определяется произведением матриц B_ψ и A_φ .

$$C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$$

§4. Преобразование базиса

Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{K}}(V, W)$, а в пространствах заданы базисы:

$$V : \quad \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_j\}_{j=1}^n$$

$$W : \quad \{g_k\}_{k=1}^m, \quad \{g'_l\}_{l=1}^m$$

Причем известно, что $T = \{\tau_j^i\}$ — матрица перехода из базиса $\{e\}$ в базис $\{e'\}$, а матрица $S = \{\sigma_l^k\}$ — матрица перехода из базиса $\{g\}$ в базис $\{g'\}$.

Теорема 4.1. Матрица оператора при замене базисов преобразуется как

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi T$$

Доказательство. Пусть $x \in V$ произвольный элемент пространства V , а y — образ этого элемента. Тогда в паре базисов $\{e\}$ и $\{g\}$

$$\varphi(x) = y \quad \leftrightarrow \quad A_\varphi x = y$$

В то же время можно утверждать, что в паре базисов $\{e'\}$ и $\{g'\}$ справедливо

$$\varphi(x) = y \quad \leftrightarrow \quad A'_\varphi x' = y'$$

Однако известно, что при изменении базиса соответствующим образом преобразуются координаты векторов x и y

$$x' = T^{-1}x, \quad y' = S^{-1}y$$

Подставляя данные преобразования в матричное выражение, получаем

$$A'_\varphi T^{-1}x = S^{-1}y$$

Матрицы перехода всегда обратимы, следовательно можно утверждать, что

$$S A'_\varphi T^{-1} = A_\varphi$$

Или, что тоже самое

$$S^{-1} A_\varphi T = A'_\varphi$$

□

Линейные операторы

Последняя лекция предыдущего раздела была посвящена рассмотрению линейных отображений общего вида. Начиная с текущей, первой лекции второго раздела мы в большей степени будем рассматривать отображения, которые линейно преобразуют элементы из одного пространства.

Большая часть раздела будет посвящена так называемому *спектральному анализу* линейных отображений, который позволяет получить наиболее простое матричное представление отображения.

§1. Ядро и образ отображения

Прежде чем перейдем к рассмотрению линейных отображений, действующих как $\varphi : V \rightarrow V$ (эндоморфизмы), обсудим важные определения и утверждений, справедливые для отображений в общем виде, но наиболее ценные именно для эндоморфизмов.

Определение 1.1. Ядром линейного отображения $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ будем называть подмножество V , определенное как

$$\ker \varphi = \{x \in V : \varphi(x) = 0_W\}$$

Лемма 1.1. *Нейтральный элемент $0_V \in V(\mathbb{K})$ принадлежит ядру отображения φ .*

Доказательство.

$$\varphi(0_V) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0_W$$

□

Можно показать, что ядро линейного отображения образует не просто подмножество в V , но также обладает структурой линейного подпространства.

Лемма 1.2. *Ядро линейного отображения $\ker \varphi$ является линейным подпространством $V(\mathbb{K})$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $x_1, x_2 \in \ker \varphi$, принадлежащие ядру отображения φ . Их принадлежность ядру означает, что

$$\varphi(x_1) = 0 \quad \varphi(x_2) = 0$$

Рассмотрим линейную комбинацию элементов x_1 и x_2 с коэффициентами α_1 и α_2 после действия на нее отображением:

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2) = \alpha_1 \cdot 0_W + \alpha_2 \cdot 0_W = 0_W$$

Таким образом показано, что ядро замкнуто относительно линейных операций, а следовательно ядро является линейным подпространством. □

Результатом произвольного линейного отображения является элемент из $W(\mathbb{K})$, которое само обладает структурой линейного пространства.

Определение 1.2. Образом $\text{Im } \varphi$ линейного отображения $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ называется подмножество W , определяемое как

$$\text{Im } \varphi = \{y \in W : \exists x \in V, \varphi(x) = y\} = \varphi(V)$$

Лемма 1.3. Образ линейного отображения $\text{Im } \varphi$ является линейным подпространством $W(\mathbb{K})$.

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2 \in V$ произвольные элементы пространства V , которым соответствуют образы

$$y = \varphi(x) \quad y_1 = \varphi(x_1) \quad y_2 = \varphi(x_2)$$

Чтобы показать замкнутость образа отображения необходимо показать, что сумма двух образов также является образом:

$$y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \in W$$

Аналогично для умножения на скаляр:

$$\alpha y = \alpha \varphi(x) = \varphi(\alpha x) \in W$$

Следовательно образ замкнут относительно линейных операций, индуцированных из W , а значит является линейным подпространством. $\square$

Пример 1.1. (а) Рассмотрим пространство векторов на плоскости, а также отображение проектирования на направление, заданное вектором $\mathbf{a}$. Образом данного отображения будут являться все вектора, коллинеарные с вектором $\mathbf{a}$ (прямая на плоскости), а ядром — все векторы, которые перпендикулярны данному (включая нулевой вектор).

(б) Образом отображения, заданного как дифференцирование в пространстве полиномов степени не выше n , являются все полиномы степени не выше $n - 1$, а ядром — полиномы нулевой степени, т.е. просто скаляры.

(в) Рассмотрим также пространство квадратных матриц, на которых можно ввести отображение симметризации (антисимметризации). Образом симметризации будут, очевидно, симметричные матрицы того же порядка, а ядром — антисимметричные матрицы.

Теорема 1.1. Сумма размерностей ядра и образа линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ равна размерности пространства $V(\mathbb{K})$.

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$$

Доказательство. Для начала введем базис ядра отображения:

$$\ker \varphi: \quad \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

Дополним его до базиса пространства V :

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$$

Тогда для произвольного элемента $x \in V$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad \varphi(x) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=k+1}^n \xi^i \varphi(e_i),$$

учитывая, что отображение переводит базисные векторы ядра в нулевой элемент.

Набор векторов

$$\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$$

является полным, так как любой образ может быть представлен линейной комбинацией как было показано выше.

Покажем линейную зависимость от противного.

Пусть набор векторов $\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$ является линейно зависимым. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов, что

$$\alpha^{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha^n \varphi(e_n) = 0$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$z = \alpha^{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha^n e_n$$

и применим к ней отображение

$$\varphi(z) = \alpha^{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha^n \varphi(e_n) = 0$$

Это означает, что z принадлежит ядру отображения, но в то же время имеет нетривиальное разложение по базисным векторам, которые не принадлежат этому ядру — противоречие. Следовательно, набор $\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$ является линейно независимым. Из данных рассуждений также следует, что единственный вектор z , который можно представить в виде разложения как по базису $\ker \varphi$, так и по базису $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ — это нулевой вектор.

В силу того, что набор образует линейно независимый и полный набор, можно утверждать

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k$$

а следовательно

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} \varphi = k + (n - k) = n$$

□

Замечание 1.1. Эту теорему также называют **теоремой о ранге и дефекте**, называя рангом отображения размерность образа, а дефектом — размерность его ядра.

§2. Алгебра эндоморфизмов

Определение 2.1. **Линейным оператором (эндоморфизмом)** $\varphi : V \rightarrow W$ в линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется линейное отображение, если $V = W$.

Замечание 2.1. Множество линейных операторов в линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ будем обозначать $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Лемма 2.1. *Множество $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ вместе с операцией композиции образует некоммутативный моноид.*

Доказательство. Как было показано ранее, композиция линейных отображений является линейным отображением. Следовательно при рассмотрении $\varphi, \psi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ имеем, что $\chi = \psi \circ \varphi$ также принадлежит $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ в силу того, что оно является линейным отображением и действует как $\chi : V \rightarrow V$.

Для композиции линейных операторов справедлива ассоциативность, что по определению композиции проверяется тривиально

$$(\varphi \circ (\psi \circ \chi))(x) = \varphi(\psi(\chi(x))) = ((\varphi \circ \psi) \circ \chi)(x)$$

В множестве $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ существует нейтральный элемент — тождественное преобразование. Некоммутативность композиции очевидна. Откуда следует, что $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ действительно обладает структурой некоммутативного моноида. □

Лемма 2.2. *Множество $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ вместе с операциями сложения и композиции образует кольцо.*

Доказательство. Операции сложения и композиции согласованы:

$$\forall \varphi, \psi, \chi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \quad \varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi$$

Следовательно образуется структура кольца. □

Ранее также упоминалось, что любое множество линейных отображений $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ образует линейное пространство, значит и $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ также является линейным пространством. Такое множество, в котором может быть задана как структура кольца, так и структура линейного пространства, не является уникальным в случае множества эндоморфизмов.

Определение 2.2. Алгеброй $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство, снабженное структурой кольца, в котором все операции согласованы.

Теорема 2.1. Множество $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ образует алгебру над полем $\mathbb{K}$.

Теорема 2.2. Доказательство суммирует все предыдущие рассуждения.

В силу того, что любому линейному оператору в фиксированном базисе соответствует матрица, а операторные операции однозначно определяются матричными операциями, можно утверждать, что алгебра линейных операторов изоморфна алгебре квадратных матриц.

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$$

Для матриц была определена численная характеристика — определитель, которую мы связывали с критерием невырожденности матрицы. Аналогичную характеристику можно ввести и для линейных операторов.

Определение 2.3. Определителем линейного оператора называется определитель матрицы линейного оператора в фиксированном базисе.

$$\det \varphi = \det A_{\varphi}$$

Лемма 2.3. Определитель линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Действительно, для матрицы линейного оператора при замене базиса справедливо преобразование

$$A'_{\varphi} = T^{-1} A_{\varphi} T$$

Покажем независимость от выбора базиса пользуясь свойствами определителя

$$\det A'_{\varphi} = \det(T^{-1} A_{\varphi} T) = \det T^{-1} \det A_{\varphi} \det T = \frac{1}{\det T} \det A_{\varphi} \det T = \det A_{\varphi}$$

□

Таким образом имеем, что определение определителя оператора является корректным, т.к. матрица линейного оператора всегда является квадратной и ее определитель не зависит от базиса.

Определение 2.4. Линейный оператор $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ называется обратимым, если существует отображение $\psi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ такое, что

$$\psi \circ \varphi = \mathcal{I}, \quad \varphi \circ \psi = \mathcal{I}$$

Лемма 2.4. Линейный оператор является обратимым тогда и только тогда, когда его определитель не равен нулю.

Доказательство. Из изоморфности алгебр эндоморфизмов и квадратных матриц для обратимых элементов справедливо

$$\psi \circ \varphi = \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad A_\varphi \cdot B_\psi = E$$

Откуда следует, что если оператор φ обратим, то существует оператор ψ , имеющий матрицу такую, что $B_\psi = A_\varphi^{-1}$, а матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. $\square$

Отметим последний факт, который касается рассмотрения эндоморфизмов в контексте текущей лекции.

Замечание 2.2. Для эндоморфизма $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ справедливо, что его ядро и образ являются линейными подпространствами V , а также

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$$

Однако это не означает, что линейное пространство V всегда представимо в виде прямой суммы ядра и образа оператора. Следующий контрпример это демонстрирует.

Пример 2.1. Пусть $V = \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, а оператор определим как $\mathcal{D}^2(p) = \frac{d^2 p}{dx^2}$. Его образ и ядро будут совпадать:

$$\ker \mathcal{D}^2 = \text{Im } \mathcal{D}^2 = \mathbb{R}^{\leq 1}[x]$$

Иными словами, сумма размерностей ядра и образа действительно дает размерность пространства, но при этом в сумме имеем множество линейных полиномов, что очевидно не совпадает со всем пространством полиномов, степень которых не превышает 3.

Введение в спектральный анализ

Ранее было отмечено, что любому линейному оператору соответствует его матрица в фиксированном базисе. Однако матрицы могут быть различны по своей структуре и тогда может ставиться вопрос о поиске такого базиса, в котором матрица оператора принимает наиболее простой вид. Чтобы шаг за шагом прийти к способу нахождения такого базиса, сначала проведем предварительные рассуждения.

§1. Инвариантные подпространства

Определение 1.1. Подпространство $U \leq V$ называется *инвариантным* относительно оператора φ (φ -инвариантным), если $\varphi U \leq U$, то есть для любого $x \in U$ его образ $\varphi x \in U$.

Замечание 1.1. Нулевое подпространство и всё пространство V инвариантны для любого оператора. Любое подпространство, содержащееся в ядре оператора φ , и любое подпространство, содержащее его образ, φ -инвариантны. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами.

Пример 1.1. Пусть оператор — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Тогда $U_1 = \langle \mathbf{i} \rangle$ и $U_2 = \langle \mathbf{j} \rangle$ инвариантны, а $U_3 = \langle \mathbf{i} + \mathbf{j} \rangle$ — нет.

Пример 1.2. Инвариантные подпространства оператора дифференцирования в $\mathbb{R}^{\leq n}[x]$ имеют вид $\mathbb{R}^{\leq k}[x]$, $k \leq n$.

Ограничение (сужение) $\varphi|_U$ линейного оператора φ на инвариантное подпространство U является линейным оператором в U .

Если выбрать базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V так, чтобы инвариантное подпространство U было линейной обложкой первых k базисных векторов, то матрица оператора в этом базисе будет иметь вид $\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где B — матрица оператора $\varphi|_U$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_k$. Обратно, если матрица оператора φ имеет такой блочный вид (где B — квадратная матрица размера $k \times k$, а под ней матрица из нулей), то $U = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Если удаётся разложить V в прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ инвариантных подпространств V_i , то в базисе пространства V , составленном из базисов этих подпространств, матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{pmatrix},$$

где A_i — матрица оператора $\varphi|_{V_i}$. Из этого ясно, что поиск инвариантных подпространств является важным шагом в решении задачи поиска «наиболее простого» вида матрицы линейного оператора.

Пример 1.3. Для оператора дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_n$ инвариантные подпространства вложены друг в друга, поэтому ни у какого нетривиального инвариантного подпространства нет инвариантного прямого дополнения. Поэтому ни в каком базисе матрица этого оператора не может иметь блочно-диагональный вид.

Пример 1.4. Рассмотрим поворот на угол α вокруг какой-либо оси в пространстве E^3 . В ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 , если вектор e_3 направлен по оси поворота, матрица оператора поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

который согласуется с разложением E^3 в прямую сумму $E^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства, которые приводят к понятию собственного вектора.

§2. Собственные векторы и собственные значения

Определение 2.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* оператора φ , если $\varphi x = \lambda x$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом *собственным значением* (*собственным числом*) оператора φ , отвечающим собственному вектору x .

Собственный вектор порождает одномерное инвариантное подпространство. В базисе, составленном из собственных векторов (если он существует) матрица оператора имеет диагональный вид, что является «наиболее простым» видом.

Пример 2.1. а) Для нулевой оператора $\mathcal{O}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 0;

б) Для тождественного оператора $\mathcal{I}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 1;

в) Для оператора «растяжения» $\lambda \mathcal{I}$ каждый вектор является собственным с собственным значением λ ;

г) Собственные векторы оператора поворот на угол α в пространстве E^3 : если $\alpha \neq \pi k$, то это векторы, лежащие на оси поворота, собственное значение 1; если же $\alpha = \pi k$, то к ним добавляются векторы, перпендикулярные оси поворота, собственные значения $(-1)^k$;

д) $V = U \oplus W$, $\mathcal{P}$ — проектор на U параллельно W является линейным оператором в V . Известно, что $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Тогда если x — собственный вектор, то

$\lambda x = \mathcal{P}x = \mathcal{P}^2x = \mathcal{P}(\mathcal{P}x) = \mathcal{P}(\lambda x) = \lambda \mathcal{P}x = \lambda^2x$, значит λ равно 0 или 1. Любой вектор из U — собственный с собственным значением 1, из W — собственный с собственным значением 0.

е) Для оператора дифференцирования $\mathcal{D}: \mathbb{R}^{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ собственными являются константы, соответствующие собственному значению 0.

ж) Оператор транспонирования удовлетворяет условию $\mathcal{P}^2 = \mathcal{I}$. Аналогично д) можно показать, что собственные значения инволюции только ± 1 . В данном случае, значение 1 соответствует симметрическим матрицам, -1 — кососимметрическим.

Замечание 2.1. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным для оператора φ тогда и только тогда, когда подпространство $\ker(\varphi - \lambda \mathcal{I}) \leq V$ ненулевое, то есть когда оператор $\varphi - \lambda \mathcal{I}$ вырожден, то есть $\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = 0$.

Определение 2.2. Подпространство $\ker(\varphi - \lambda \mathcal{I})$ называется **собственным подпространством** оператора φ , соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ . Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой.

Замечание 2.2. Любое собственное подпространство оператора φ является φ -инвариантным.

Определение 2.3. *Геометрической кратностью* $g(\lambda)$ собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: $g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

§3. Характеристический многочлен

Для нахождения собственных подпространств удобнее сначала найти собственные значения из условия $\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = 0$. Пусть A_φ — матрица оператора φ в каком-либо базисе, тогда

$$\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Определение 3.1. Многочлен $\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n \det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = \det(\lambda \mathcal{I} - \varphi)$ называется **характеристическим многочленом** оператора φ . Корни характеристического многочлена называются **характеристическими числами** φ .

Замечание 3.1. Не каждое характеристическое число является собственным. Действительно, в согласии с основной теоремой алгебры, любой полином с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень, но не обязательно принадлежащий полю $\mathbb{R}$. Если оператор определен в вещественном линейном пространстве, то его характеристическими числами будут как комплексные, так и вещественные, но собственными будут только вещественные корни.

Определение 3.2. *Спектром* σ_φ линейного оператора φ называется множество его собственных значений.

Замечание 3.2. Также из основной теоремы алгебры следует, что количество корней полинома не превосходит его степень, а значит спектр линейного оператора состоит не более, чем из $n = \dim V$ собственных чисел.

Если из контекста ясно, о каком операторе идёт речь, индекс φ будем опускать.

Замечание 3.3. В силу того, что характеристический полином задается определителем оператора $\varphi - \lambda \mathcal{I}$, а определитель любого оператора не зависит от выбора базиса (инвариант относительно преобразований базиса), то можно утверждать, что и все его коэффициенты также от выбора базиса не зависят. Откуда следует, что к инвариантам оператора относится не только его определитель, но и след $\operatorname{tr} \varphi = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, потому что коэффициент перед λ^n в характеристическом полиноме буквально равен $(-1)^n \operatorname{tr} \varphi$.

Определение 3.3. *Алгебраической кратностью* $m(\lambda)$ собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

Замечание 3.4. Если $\lambda \in \sigma$ является собственным числом оператора φ , то $\varphi - \lambda \mathcal{I}$ — является вырожденным оператором в силу равенства нулю его определителя. Следовательно, ядро этого оператора $\ker(\varphi - \lambda \mathcal{I})$ содержит хотя бы один ненулевой вектор.

Лемма 3.1. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство $V_\mu \leq V$, оно инвариантно, следовательно, в согласованном базисе матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \mu E & D \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

матрица μE квадратная размера $g(\mu)$. Тогда характеристический многочлен имеет вид $\chi(\lambda) = (\mu - \lambda)^{g(\mu)} \cdot f(\lambda)$, $f(\lambda) = \det(C - \lambda E)$. Так как у многочлена f может быть корень μ , то $m(\mu) \geq g(\mu)$.

§4. Собственный базис и диагонализируемость

Определение 4.1. Подпространства $V_1, \dots, V_k$ называются *линейно независимыми*, если равенства $v_1 + \dots + v_k = 0$, $v_k \in V_k$ следует, что $v_1 = \dots = v_k = 0$.

Замечание 4.1. Можно сказать, что разложение пространства V в прямую сумму подпространств $V_1, \dots, V_k$ — это разложение в сумму линейной независимых подпространств $V_1, \dots, V_k$.

Теорема 4.1. Собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ оператора φ линейно независимы.

Доказательство. Индукция по k . При $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и $x_1 + \dots + x_k = 0$. Применим к обеим частям оператор φ :

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0.$$

Вычтем из этого равенства равенство $x_1 + \dots + x_k = 0$, умноженное на λ_k , получим

$$(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

Каждое из слагаемых лежит в соответствующем подпространстве. Так как по предположению индукции они линейно независимы и рассматриваются разные собственные значения, то $x_1 = \dots = x_{k-1} = 0$. Но тогда и $x_k = 0$.

Следствие 4.1.1. Если характеристический многочлен оператора имеет $n = \dim V$ различных корней (оператор с **простым спектром**), то существует базис из собственных векторов этого оператора.

Замечание 4.2. Данное условие не является необходимым для существования собственного базиса. Например, любой базис состоит из собственных векторов тождественного оператора, однако его характеристический многочлен имеет единственный корень 1 (кратности n).

Определение 4.2. Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется **диагонализируемым**, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид.

Другими словами, диагонализируемость оператора эквивалентна существованию собственного базиса.

Пусть оператор φ диагоналируем и $V = \bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i}$. Рассмотрим проектор $\mathcal{P}_i$ на подпространство V_{λ_i} параллельно прямой сумме оставшихся подпространств.

Тогда $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i = \mathcal{I}$. Легко проверяется, что

оператор φ действует на любой вектор так же, как оператор $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathcal{P}_i$. Выражение

$\varphi = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathcal{P}_i$ называется **спектральным разложением** оператора φ .

Теорема 4.2. (**критерий диагонализируемости**)

Оператор диагоналируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то есть все его корни лежат в поле $\mathbb{K}$;

- *Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.*

Доказательство. Диагонализируемость эквивалентна наличию собственного базиса, откуда следует, что $V = \bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i}$ (объединение базисов собственных подпространств — собственный базис V), но тогда $n = \dim V = g(\lambda_1) + \dots + g(\lambda_k)$. Но $m(\lambda_i) \geq g(\lambda_i)$, а $m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_k) \leq \deg \chi_\varphi = n$. Отсюда следует, что $n = g(\lambda_1) + \dots + g(\lambda_k)$ тогда и только тогда, когда $m(\lambda_i) = g(\lambda_i)$.

Пример 4.1. Пусть φ — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат декартовой плоскости. В ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\chi_\varphi(t) = t^2 + 1$. Его корни не лежат в поле $\mathbb{R}$. Поэтому, оператор φ не диагоналируем над $\mathbb{R}$. Если же рассмотреть ту же матрицу над полем $\mathbb{C}$, то она оказывается подобной матрице

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Пример 4.2. Пусть $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_1$. В базисе $x, 1$ его матрица оператора вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\chi_{\mathcal{D}}(t) = t^2$. Его корень 0 кратности 2 лежит в поле $\mathbb{R}$. $\text{Ker}(\mathcal{D} - 0I) = \mathbb{R}[x]_0$, $\dim \text{Ker}(\mathcal{D} - 0I) = 1$. Оператор $\mathcal{D}$ не диагоналируем.

Корневые пространства

Диагональная матрица как раз и является «наиболее простым» видом матрицы линейного оператора. Если мы смогли привести матрицу оператора к диагональному виду, то легко можем найти любую степень оператора. Это открывает путь к вычислению, например, многочленов от операторов. Но как показывает предыдущий пример, линейный оператор может не иметь собственного базиса из даже в том случае, когда все корни его характеристического многочлена лежат в поле, над которым определено векторное пространство. Далее мы введём понятие корневого вектора, обобщающее понятие собственного вектора, и покажем, что в случае, когда спектр линейного оператора содержится в поле, над которым определено векторное пространство, пространство раскладывается в прямую сумму так называемых корневых подпространств.

§1. Корневые векторы и корневые подпространства

Определение 1.1. Вектор $x \in V$ называется **корневым вектором** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda \in F$, если существует такое целое неотрицательное число k , что $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^k x = 0$. Наименьшее такое k называется **высотой** корневого вектора x .

Замечание 1.1. Если x — корневой вектор высоты k , то $\tilde{x} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})x$ является корневым вектором высоты $k - 1$.

Пример 1.1. а) Корневые векторы высоты 0 — нулевые векторы;

б) Корневые векторы высоты 1 — собственные векторы;

в) Каждый многочлен есть корневой вектор с собственным числом 0 оператора дифференцирования пространства многочленов, причём высота многочлена как корневого вектора равна $n + 1$, где n — степень этого многочлена;

Пример 1.2. Пусть V — пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с вещественными значениями, $\mathcal{D}$ — оператора дифференцирования. Тогда:

1) $f \in V$ — собственный с собственным значением λ : $\mathcal{D}f = f' = \lambda f$. Следовательно $\frac{f'}{f} = \lambda \Leftrightarrow \ln |f| = \lambda x + C \Leftrightarrow |f| = e^C e^{\lambda x} \Leftrightarrow f = C e^{\lambda x}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Корневые векторы: положим $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$, $g \in V$, тогда $(\mathcal{D} - \lambda \mathcal{E})f = f'(t) - \lambda f(t) = \lambda e^{\lambda t} g(t) + e^{\lambda t} g'(t) - \lambda f(t) = e^{\lambda t} g'(t)$. То есть f — корневой тогда и только тогда, когда существует такое k , что $g^{(k)}(t) = 0$, то есть $g \in \mathbb{R}[t]$. Таким образом, корневые векторы для оператора дифференцирования — это функции вида $e^{\lambda t} g(t)$, где $g(t)$ — многочлен. Высота такого корневого вектора равна $\deg g + 1$. Они называются квазимногочленами. Вспомните о них, когда будете изучать линейные дифференциальные уравнения ☺

Корневые векторы, отвечающие собственному значению λ , высоты $\leq k$ — это $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \leq V$. Возникает цепочка подпространств

$$V_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \leq \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \leq \dots \leq \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \leq \dots \leq V^\lambda,$$

где $V^\lambda = \{\text{все корневые векторы с собственным значением } \lambda\}$ — **корневое подпространство** с собственным значением λ :

$$V^\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^i.$$

В конечномерном случае эта цепочка с некоторого момента стабилизируются — размерности подпространств растут до тех пор, пока мы не дойдём до размерности корневого подпространства. Будем считать, что $\dim V < \infty$.

Теорема 1.1. (свойства корневых подпространств)

- 1) V^λ $\mathcal{A}$ -инвариантно;
- 2) $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = \mathcal{N}$ — **нильпотентный** оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m , то $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$;
- 3) $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ невырожден при $\mu \neq \lambda$;
- 4) $\dim V^\lambda = m(\lambda)$ (геометрический смысл алгебраической кратности).

Доказательство.

1) Пусть $V_k^\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k$, тогда $V_\lambda \leq V_1^\lambda \leq V_2^\lambda \leq \dots \leq V_m^\lambda = V^\lambda$. Заметим, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})V_k^\lambda \leq V_{k-1}^\lambda \leq V_k^\lambda$. То есть, V_k^λ инвариантно относительно $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, следовательно, V_k^λ и $\mathcal{A}$ -инвариантно. Это верно и для $V_m^\lambda = V^\lambda$.

2) Выберем в V^λ базис, согласованный с цепочкой подпространств $V_i^k: e_1, \dots, e_{l_1}$ — базис V_1^λ , $e_1, \dots, e_{l_1}, \dots, e_{l_2}$ — базис V_2^λ и т.д., $e_1, \dots, e_{l_m}$ — базис $V_m^\lambda = V^\lambda$. $\mathcal{N}(V_k^\lambda) \leq V_{k-1}^\lambda$ (положим $V_0^\lambda = \{0\}$). Из этого следует, что $\mathcal{N}e_j \in \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle$, следовательно $\mathcal{N}^{l_m} = \mathcal{O}$, где $l_m = \dim V^\lambda$.

3) В базисе $e_1, \dots, e_{l_1}, \dots, e_{l_m}$ матрица оператора $\mathcal{N}$ верхнетреугольная с нулями на главной диагонали (**верхненильтреугольная**), тогда матрица оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = \mathcal{N} + \lambda\mathcal{E}$ верхнетреугольная с λ -ми на главной диагонали, а матрица оператора $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ верхнетреугольная с $\lambda - \mu$ на главной диагонали. Следовательно (так как $\lambda \neq \mu$) она невырожденная и, значит, оператор $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ тоже невырожден.

4) Дополним базис V^λ до базиса всего пространства V . В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-треугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}|_{V^\lambda} & D \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}|_{V^\lambda}}(t) \det(tE - C) = (t - \lambda)^{l_m} \det(tE - C)$. Нужно показать, что λ не является собственным значением оператора C в пространстве $\langle e_{l_m+1}, \dots, e_n \rangle$ с матрицей C . Пусть существует такой вектор $0 \neq x \in \langle e_{l_m+1}, \dots, e_n \rangle$, что

$Cx = \lambda x$. Это означает, что $Ax = \lambda x + y$, $y \in V^\lambda$. Следовательно, $(A - \lambda E)x = y$ — корневой вектор, но тогда и x — корневой вектор, что противоречит определению V^λ .

Теорема 1.2. *Корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы для собственных подпространств.

Теорема 1.3. *Базис пространства V может быть образован объединением базисов корневых подпространств.*

Доказательство. Корневые подпространства линейно независимы, а значит их сумма является прямой. Сумма размерностей корневых пространств дает размерность линейного пространства V :

$$\sum_i \dim V^{\lambda_i} = \sum_i m(\lambda_i) = n = \dim V$$

Следовательно, пространство V может быть представлено

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_p},$$

где p — количество различных собственных чисел.

Из разложения в прямую сумму следует справедливость утверждения. $\square$

§2. Структура нильпотентных операторов

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m , что $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$. Наименьшее из таких m называют **высотой** нильпотентного оператора. Для него все векторы V — корневые с собственным значением 0, высоты не больше m .

Пример 2.1. Оператор дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ — нильпотентный высоты $n + 1$.

В силу пункта 3 теоремы 7.1 изучение произвольного оператора сводится к изучению нильпотентного оператора на соответствующем корневом подпространстве.

Лемма 2.1. *Пусть $x \in V$ — вектор высоты $k > 0$. Тогда векторы $x, \mathcal{N}x, \dots, \mathcal{N}^{k-1}x$ линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по k . Если $k = 1$, в этом случае $x \neq 0$ и доказывать нечего. Пусть $\alpha_0 x + \alpha_1 \mathcal{N}x + \dots + \alpha_{k-1} \mathcal{N}^{k-1}x = 0$. Применим оператор $\mathcal{N}$ к обеим частям равенства, получим $\alpha_0 \mathcal{N}x + \alpha_1 \mathcal{N}^2x + \dots + \alpha_{k-2} \mathcal{N}^{k-1}x = 0$, так как

$\mathcal{N}^k x = 0$. Пусть $\mathcal{N}x = y$, его высота $k-1$ и $\alpha_0 y + \alpha_1 \mathcal{N}y + \dots + \alpha_{k-2} \mathcal{N}^{k-2} y = 0$. Поскольку по предположению индукции векторы $y, \mathcal{N}y, \dots, \mathcal{N}^{k-1}y$ линейно независимы, то $\alpha_0 = \dots = \alpha_{k-2} = 0$. Но тогда и $\alpha_{k-1} \mathcal{N}x = 0$. Так как высота x равна k , то $\mathcal{N}^{k-1}x \neq 0$, значит, $\alpha_{k-1} = 0$, следовательно, $x, \mathcal{N}x, \dots, \mathcal{N}^{k-1}x$ линейно независимы.

Определение 2.1. Подпространство $U = \langle x, \mathcal{N}x, \mathcal{N}^2x, \dots \rangle$ называется **циклическим подпространством** нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, порождённым вектором x .

Циклическое подпространство U — наименьшее $\mathcal{N}$ -инвариантное подпространство, содержащее x , $\dim U = k$, где k — высота вектора x .

Базис U : $x_1, x_2, \dots, x_k$, где $x_i = \mathcal{N}^{k-i}x$. Такой базис называется **жордановой цепочкой**: $0 \xleftarrow{\mathcal{N}} x_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} x_2 \xleftarrow{\mathcal{N}} \dots \xleftarrow{\mathcal{N}} x_{k-1} \xleftarrow{\mathcal{N}} x_k$, то есть первый вектор переходит при действии $\mathcal{N}$ в нулевой, второй — в первый и т.д, последний — в предпоследний. Следовательно, матрица оператора $\mathcal{N}$ в базисе $x_1, x_2, \dots, x_k$ имеет вид

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

называемый **нильпотентной жордановой клеткой** порядка k .

Пример 2.2. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}: \mathbb{R}[x]_7 \rightarrow \mathbb{R}[x]_7$, $f_i = \frac{x^k}{k!}$, $i = \overline{0, 7}$ — базис $\mathbb{R}[x]_7$. Действие $\mathcal{N}$ на базисных векторах даёт следующие жордановы цепочки

$$\begin{aligned} 0 &\xleftarrow{\mathcal{N}} f_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_3 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_5 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_7, \\ 0 &\xleftarrow{\mathcal{N}} f_0 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_2 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_4 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_6. \end{aligned}$$

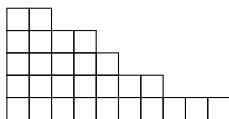
Теорема 2.1. (основная теорема о структуре нильпотентного оператора)

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор на V . Тогда существует разложение пространства V в прямую сумму циклических подпространств этого оператора $V = \bigoplus U_i$. Количество слагаемых в таком разложении равно $\dim \ker \mathcal{N}$.

Пример 2.3. В предыдущем примере $\mathbb{R}[x]_7 = \langle f_1, f_3, f_5, f_7 \rangle \oplus \langle f_0, f_2, f_4, f_6 \rangle$. $\dim \ker \mathcal{N} = \dim \langle f_0, f_1 \rangle = \dim \mathbb{R}[x]_1 = 2$. Нетрудно заметить, что в данном случае разложение в прямую сумму циклических — это разложение в прямую сумму подпространств чётных и нечётных многочленов степени не выше 7.

Определение 2.2. Жордановым базисом пространства V относительно оператора $\mathcal{A}$ называется базис, построенный как совокупность жордановых цепочек всех циклических подпространств для всех корневых подпространств.

Наглядно можно изображать структуру нильпотентного оператора с помощью так называемой **диаграммы Юнга**, которая в данном случае схематически показывает, как действует нильпотентный оператор на базисных векторах жорданова базиса:



С помощью такой диаграммы нильпотентный оператор задаётся однозначно. Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

- Высота строки соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора (линейной комбинации базисных) определяется как наибольшая высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом
- i -тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства U_i
- Ядро оператора $\mathcal{N}^k$ — линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k
- Векторы, лежащие в нижней строке, при действии оператора переходят в нулевые

Пример 2.4. Для примеров 8.2 и 8.3 диаграмма Юнга имеет вид:

f_7	f_6
f_5	f_4
f_3	f_2
f_1	f_0

Высота вектора $2f_4 - 8f_1$ равна $\max\{3, 1\} = 3$, $\ker \mathcal{N}^2 = \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle$.

Жорданова нормальная форма

В этой лекции мы перейдем к рассмотрению вида линейного оператора в жордановом базисе. Как было уже отмечено, если оператор не является диагонализуемым, для него также может быть получен "достаточно простой" вид в некотором базисе. Следовательно вытекает вопрос о структуре этого матричного представления оператора и построения самого базиса, в котором оператор имеет такой вид.

§1. Жорданова нормальная форма

Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$ — линейный оператор, для которого найдено собственное значение λ . Для начала рассмотрим сужение нильпотентного оператора $\mathcal{N} = (\varphi - \lambda \mathcal{I})|_{U^\lambda}$ на одно из его возможных циклических подпространств U^λ . Оно может быть представлено, по определению, как линейная оболочка над соответствующей жордановой цепочкой $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. При этом

$$x_i = \mathcal{N}^{k-i} x_k$$

В базисе циклического подпространства операторы будут иметь следующее матричное представление

$$\mathcal{N} \leftrightarrow J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \mathcal{I} \leftrightarrow \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Откуда следует, что сужение оператора φ на данное подпространство в этом базисе имеет матрицу $J(\lambda)$

$$\varphi|_{U^\lambda} \leftrightarrow J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 1.1. Жордановой клеткой называется верхнетреугольная матрица $J(\lambda) = J(0) + \lambda E$ соответствующая сужению линейного оператора φ на циклическое подпространство, найденная в базисе этого циклического подпространства (жордановой цепочки).

Обратим внимание, что данная матрица в точности согласуется с построением по определению. Для получения матрицы любого оператора в некотором базисе, необходимо действовать на базисные векторы. Пусть x_k — элемент жордановой цепочки. Подействуем сужением оператора $\varphi|_{U^\lambda}$ на это циклическое подпространство.

$$\varphi|_{U^\lambda}(x_k) = (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{N})(x_k) = \lambda \mathcal{I}x_k + \mathcal{N}x_k = \lambda x_k + x_{k-1}$$

Откуда мы действительно можем получить координатное представление для образов векторов x_k , находящиеся в столбцах жордановой клетки.

Допустим теперь, что корневое подпространство V^λ состоит из нескольких циклических подпространств. Это соответствует случаю, когда диаграмма Юнга содержит более одного столбца. Ранее мы утверждали, что корневое подпространство может быть представлено в виде прямой суммы циклических:

$$V^\lambda = U_1^\lambda \oplus U_2^\lambda \oplus \dots \oplus U_g^\lambda$$

При этом матрица оператора в базисе, согласованном с каждым из этих подпространств, имеет блочно-диагональный вид. Таким образом имеем следующее определение.

Определение 1.2. Жордановым блоком, соответствующим собственному числу λ оператора φ , называется блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.

И, наконец, все пространство V , в котором действует оператор φ , имеющий полный набор собственных значений (сумма кратностей собственных чисел равна размерности пространства), представляется в виде прямой суммы корневых подпространств

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_m}$$

Следовательно и в базисе пространства V , согласованном с каждым из этих подпространств, матрица оператора имеет блочно-диагональный вид.

Определение 1.3. Жордановой нормальной формой оператора φ , называется блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых блоков, соответствующих всем собственным значениям.

Теорема 1.1. Если характеристический полином оператора φ может быть представлен в виде произведения линейных множителей, существует базис (жорданов), в котором матрица оператора представляет собой жорданову нормальную форму.

Доказательство. Пусть характеристический полином оператора представляет собой произведение линейных множителей

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

Тогда каждое собственное число порождает корневое подпространство V^{λ_i} , сумма размерностей которых равна размерности пространства V , а каждое из этих подпространств представляется в виде прямой суммы циклических подпространств соответствующих нильпотентных операторов.

Объединение базисов в силу разложений в прямые суммы позволяет получить базис всего пространства V , при этом матрица оператора в этом базисе согласована с определением жордановой нормальной формы. $\square$

Следствие 1.1.1. *Любой оператор в комплексном линейном пространстве $V(\mathbb{C})$ имеет жорданову нормальную форму.*

Доказательство. В силу основной теоремы алгебры и ее следствий каждый полином имеет разложение в линейные множители над полем комплексных чисел. $\square$

О структуре ЖНФ

Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$ — линейный оператор в комплексном линейном пространстве, $\sigma = \{\lambda_1^{(m_1)}, \dots, \lambda_p^{(m_p)}\}$ — спектр оператора, где в верхнем индексе указана алгебраическая кратность. Пусть также набор чисел $\{g_1, \dots, g_s\}$ — геометрические кратности этих собственных чисел.

- Количество жордановых блоков равняется количеству *различных* собственных чисел s , что также равняется количеству диаграмм Юнга, если полагать, что одна диаграмма — одно собственное число.
- Размерность жорданова блока равняется алгебраической кратности m_i собственного числа λ_i и количеству "клеточек" в соответствующей диаграмме Юнга.
- Количество жордановых клеток в блоке равняется геометрической кратности g_i собственного числа λ_i или количеству столбцов в диаграмме Юнга, относящихся к этому собственному числу.
- Размеры жордановых клеток соответствуют высоте столбцов в диаграмме Юнга и не превышают максимальную высоту корневых векторов данного корневого подпространства.

§2. Построение жорданова базиса

Есть два основных подхода для построения самого жорданова базиса. Мы можем их сформулировать исходя из диаграммы Юнга — визуального представления этого базиса.

- Первый подход: искать корневые векторы максимальной высоты и достраивать жордановы цепочки до собственных векторов. **Путь сверху вниз.**
- Второй подход: находить собственные векторы и искать для них все корневые вплоть до корневого вектора максимальной высоты. **Путь снизу вверх.**

Первый подход в большей степени используется в системах компьютерной алгебры. Дело в том, что подходящих «самых высоких» векторов оказывается столь много, что с большой вероятностью подойдут какие-то векторы стандартного базиса или их нехитрые линейные комбинации.

Для этого можно придерживаться следующего алгоритма, полагая, что спектр оператора уже известен:

- Строим нильпотентные операторы $\mathcal{N}_i = \varphi - \lambda_i \mathcal{I}$ и соответствующие им матрицы пока что в некоем стандартном базисе.
- Находим порядок нильпотентности оператора, тем самым находя максимальную высоту корневых векторов k .
- Ищем базис $\ker \mathcal{N}^k$, тем самым получая один и более корневых векторов максимальной высоты (верхнюю строчку диаграммы Юнга) таких, что они не переходят в нулевой вектор при действии оператором $\mathcal{N}^{k-1}$.
- Действуем на них нильпотентным оператором, чтобы получить корневые векторы меньшей высоты вплоть до нулевого, тем самым получая соответствующие жордановы цепочки (столбцы диаграммы Юнга с максимальной высотой).
- При необходимости дополняем векторы высоты i до базиса $\ker \mathcal{N}^i$, что соответствует самым "верхним" векторам диаграммы Юнга в столбцах меньшей высоты, чем максимальная. К ним также применяем предыдущий пункт вплоть до нулевого.

Пример 2.1. Найдём ЖНФ и жорданов базис оператора $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

Несложно показать, что его спектр будет состоять только из одного собственного значения $\lambda = 1$ кратности $m = 4$. По теореме оператор может быть приведен к ЖНФ, которую мы сейчас попытаемся построить.

Геометрическая кратность этого собственного значения $g = 2$, т.к. этому числу равняется размерность ядра оператора $\varphi - \mathcal{I}$, имеющее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Следовательно жорданова нормальная форма будет состоять из одного блока, а он — из двух клеток. Построим матрицы операторов $\mathcal{N}^k = (\varphi - \mathcal{I})^k$, пока все пространство не станет корневым для него. Эта ситуация достигается при $k = 3$ — убедитесь в этом.

"Самый высокий" вектор должен обнулять матрицу $(A - E)^3$ и не должен обнулять матрицу $(A - E)^2$. Так как

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

то в качестве "самого высокого" вектора e_4 жорданова базиса можно взять первый, второй или четвёртый векторы стандартного базиса, так как их образы не являются нулевыми (именно они записаны в первом, втором и четвёртом столбцах матрицы). Пусть $e_4 = (1, 0, 0, 0)^T$. Тогда $(A - E)e_4 = e_3$, $(A - E)^2 e_4 = (A - E)e_3 = e_2$:

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ровно это мы и ожидали получить ☺

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти e_1 . Он дополняет вектор e_2 до базиса $\ker(\varphi - \mathcal{I})$, поэтому можно взять любой вектор из этого ядра, линейно независимый с e_2 , например, $e_1 = (0, 0, 1, 0)^T$.

Итак, у нас следующий жорданов базис: $e_1 = (0, 0, 1, 0)^T$, $e_2 = (3, 1, 3, 1)^T$, $e_3 = (0, -2, 0, -1)^T$, $e_4 = (1, 0, 0, 0)$, а ЖНФ в соответствии с этим выглядит следующим образом:

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функциональное исчисление операторов

В этой лекции мы перейдем к рассмотрению вида линейного оператора в жордановом базисе. Как было уже отмечено, если оператор не является диагонализуемым, для него также может быть получен "достаточно простой" вид в некотором базисе. Следовательно вытекает вопрос о структуре этого матричного представления оператора и построения самого базиса, в котором оператор имеет такой вид.

§1. Операторные полиномы

Пусть $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m \in \mathbb{K}[t]$ — полином степени m с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, а также $\varphi \in \text{End}(V)$, где размерность пространства V равна $n = \dim V$.

Определение 1.1. Операторным полиномом (полиномом от оператора) называют линейный оператор $p(\varphi)$ такой, что

$$p(t) \mapsto p(\varphi) = a_0I + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \dots + a_m\varphi^m \in \text{End}(V)$$

Если в некотором базисе линейному оператору φ сопоставляется матрица $A_\varphi \in M_n(\mathbb{K})$, то $p(\varphi)$ в том же базисе имеет матрицу

$$p(A_\varphi) = a_0E + a_1A_\varphi + a_2A_\varphi^2 + \dots + a_mA_\varphi^m \in M_n(\mathbb{K})$$

Рассмотрим связь операторных полиномов с инвариантными подпространствами оператора.

Лемма 1.1. *Подпространство $U \leq V$, которое инвариантно относительно оператора φ будет также инвариантно относительно операторного полинома $p(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть $U \leq V$ такое, что $\varphi U \leq U$. Откуда следует, что подпространство U будет обладать тем же свойством относительно любой степени оператора $\varphi^k U \leq U$. Так как операторный полином $p(\varphi)$ определяется линейной комбинацией степеней оператора φ , то и подпространство U будет инвариантно относительно $p(\varphi)$. $\square$

Более того можно заметить, что существует связь между сужениями оператора и операторного полинома на одного и то же инвариантное подпространство:

$$p(\varphi|_U) = p(\varphi)|_U$$

Одним из важнейших классов операторных полиномов являются те, которые обращают его в нулевой оператор.

Определение 1.2. Аннулирующим полиномом оператора называют полином $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ такой, что соответствующий ему операторный полином равен нулевому оператору:

$$p(\varphi) = \Theta$$

Для каждого линейного оператора существует аннулирующий полином и в частности это утверждает следующая теорема.

Теорема 1.1. (Гамильтона-Кэли) Характеристический полином $\chi(t)$ является аннулирующим полиномом.

$$\chi(\varphi) = \Theta$$

Доказательство. Покажем справедливость теоремы в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$, т.е. такого, что характеристический полином представляет в виде произведения линейных множителей. В качестве такого поля может рассматриваться, например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, для которого известна основная теорема алгебры, следствием которой и является существование данного разложения.

Характеристический полином в этом случае может быть представлен в виде

$$\chi(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{m_s}$$

и благодаря ему может быть построен соответствующий операторный полином

$$\chi(\varphi) = (-1)^n (\varphi - \lambda_1 \mathcal{I})^{m_1} \cdot \dots \cdot (\varphi - \lambda_s \mathcal{I})^{m_s}$$

Произвольный оператор порождает разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств такого типа

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s, \quad V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$$

Подпространство $V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$, как мы показывали ранее, является φ -инвариантным. При этом сужение оператора $\varphi|_{V_i} = \varphi_i$ на это подпространство очевидно определяется через нильпотентный оператор, который определяет множитель $\chi_i(t)$ характеристического полинома

$$\chi_i(\varphi_i) = (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i} = \mathcal{N}^{m_i}|_{V_i},$$

Нильпотентный оператор в V_i есть ровно нулевой оператор, т.к. порядок нильпотентности $k_i \leq m_i$. Следовательно

$$\chi_i(\varphi_i) = \Theta \quad \Rightarrow \quad \chi(\varphi_i) = \chi(\varphi)|_{V_i} = \Theta,$$

потому что если один множитель аннулирует, то аннулирует и весь полином, а также верна связь между сужениями оператора и операторного полинома.

Суммируя эти рассуждения, можно утверждать, что характеристический полином есть аннулирующий полином на каждой компоненте разложения пространства в прямую сумму, а значит является аннулирующим во всем пространстве V . $\square$

§2. Функциональное исчисление диагонализуемых операторов

Лемма 2.1. *Для произвольной степени $m \in \mathbb{N}$ диагонализуемого оператора $\varphi \in \text{End}(V)$ справедливо*

$$\varphi^m = \sum_{i=1}^s \lambda_i^m \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i$ — спектральные проекторы на подпространства, соответствующие собственному числу λ_i .

Доказательство. Докажем по индукции. В случае $m = 1$ утверждение справедливо в силу спектрального разложения диагонализуемого оператора

$$\varphi = \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathcal{P}_i$$

Предположим, что утверждение теоремы справедливо для произвольного $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим

$$\varphi^{m+1} = \varphi^m \circ \varphi = \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i^m \mathcal{P}_i \right) \circ \varphi = \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i^m \mathcal{P}_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^s \lambda_j \mathcal{P}_j \right),$$

где мы вновь воспользовались спектральным разложением. Помня о том, что $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$ и $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \Theta$, если $i \neq j$, закончим вычисление суммы

$$\varphi^{m+1} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \lambda_i^m \lambda_j \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \sum_{i=1}^s \lambda_i^{m+1} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^s \lambda_i^{m+1} \mathcal{P}_i$$

Случай $m = 0$ также этому удовлетворяет, если положить $\varphi^0 = \mathcal{I}$, для которого известно, что

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^s \mathcal{P}_i$$

□

Следствие 2.0.1. *Для операторного полинома от диагонализуемого оператора справедливо*

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^s p(\lambda_i) \mathcal{P}_i$$

Доказательство. Построим операторный полином с произвольными коэффициентами

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^s a_k \varphi^k = \sum_{k=0}^s a_k \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i^k \mathcal{P}_i \right) = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=0}^s a_k \lambda_i^k \right) \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^s p(\lambda_i) \mathcal{P}_i$$

□

Рассмотрим $A_\varphi^D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — матрицу диагонализуемого оператора φ в базисе из собственных векторов. Тогда из последнего утверждения следует, что

$$p(A_\varphi^D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

где в данной записи предполагается, что λ_i не обязательно различны.

Данный способ работает и для нахождения произвольных аналитических функций от операторов и их матриц. **Аналитическая функция** f задаётся сходящимся степенным рядом $f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_m(t - t_0)^m + \dots$, $t_0 \in \mathbb{C}$. При рассмотрении таких функций естественным образом появляются вопросы о сходимости, т.к. данный ряд в общем случае представляется бесконечным, но мы в рамках нашего курса предположим, что все нужные свойства выполняются.

При данных предположениях мы можем провести те же самые рассуждения, чтобы получить аналогичный полиномам результат

$$f(\varphi) = \sum_{i=1}^s f(\lambda_i) \mathcal{P}_i \quad \Rightarrow \quad f(A_\varphi^D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

§3. Функциональные исчисление ЖНФ

Перейдем к общему случаю, когда для оператора невозможно найти базис, в котором его матрица будет диагональна, но можно построить жорданову нормальную форму. Это возможно в базисе (жордановом), согласованном со всеми корневыми подпространствами. Их наличие позволяет разложить пространство в прямую сумму

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s, \quad V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i},$$

где каждое из подпространств V_i представляется в виде прямой суммы циклических подпространств.

Пусть U_i — циклическое подпространство, в котором действует сужение оператора

$$\varphi_i = \varphi|_{U_i} = \lambda_i \mathcal{I}_i + \mathcal{N}_i,$$

где $\mathcal{I}_i$ — тождественный оператор в U_i , а $\mathcal{N}_i$ — соответствующий циклическому подпространству нильпотентный оператор.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$ — линейный оператор, для которого существует полный набор собственных чисел, т.е. такой, что сумма алгебраических кратностей равна размерности пространства $\sum_{i=1}^s m_i = n = \dim V$. Тогда

$$\varphi = \sum_{i=1}^s \varphi_i \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^s (\lambda_i \mathcal{I}_i + \mathcal{N}_i) \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i$ — проекторы на циклические подпространства U_i , а $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству спектрального разложения. $\square$

Оператор в базисе, согласованном с ними, принимает вид блочно-диагональной матрицы, где каждый блок представляет собой жорданову клетку (матрицу сужения оператора на циклическое подпространство), а совокупность жордановых клеток образует жорданов блок. Иными словами, мы в любом случае имеем блочно-диагональную матрицу.

Лемма 3.1. Блочно-диагональный вид матрицы оператора в базисе, согласованном с инвариантными подпространствами, сохраняется при возведении оператора в степень

$$A_{\varphi}^m = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^m & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s^m \end{pmatrix}$$

Доказательство. Напрямую следует из ранее обсуждаемого факта

$$\varphi U \leq U \quad \Rightarrow \quad \varphi^m U \leq U$$

$\square$

Из этих утверждений следует, что при рассмотрении аналитических функций от операторов и их жордановых форм достаточно ограничиться построением действия функции на одну жорданову клетку или, что тоже самое, на сужение оператора на циклическое подпространство).

Для вычисления аналитической функции воспользуемся разложением в ряд Тейлора в точке $t_0 = \lambda_i$

$$f(\varphi_i) = f(\lambda_i) \mathcal{I} + \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \cdot (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I}) + \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) \cdot (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^2 + \dots$$

Обратим внимание на возникающие разности в каждом слагаемом, которые дают степени нильпотентного оператора

$$f(\varphi_i) = f(\lambda_i) \mathcal{I} + \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \cdot \mathcal{N}_i + \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) \cdot \mathcal{N}_i^2 + \dots + \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda_i) \mathcal{N}_i^r$$

Данная сумма будет конечна в силу нильпотентности оператора, а последнее слагаемое будет соответствовать максимальной ненулевой степени r этого оператора. Таким образом становится легко вычислимой функция от сужения оператора на циклическое подпространство. В жордановом базисе она будет представлена верхнетреугольной матрицей следующего вида

$$f(\varphi_i) \mapsto f(J(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{r!}f^{(r)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda_i) \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Откуда следует, что функция от жордановой нормальной формы представляет собой блочно-диагональную матрицу, каждая жорданова клетка которой имеет представленный вид.

Для поиска функции от матрицы оператора в произвольном базисе достаточно найти функцию от жордановой нормальной формы, а затем произвести преобразование базиса.

$$f(A_\varphi) = T^{-1}f(J)T$$

Евклидово пространство

Содержание

§1	Метрическое и нормированное пространства	1
§2	Евклидово пространство	2
§3	Неравенство Шварца	3

§1. Метрическое и нормированное пространства

Определение. Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

M1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$

M3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Замечание. Отображение ρ называется **расстоянием** (или метрикой).

Пример 1.1. Приведем несколько примеров:

(а) M - произвольное, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y; \end{cases}$

(б) $M = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|;$

(в) $M = \mathbb{R}^n, \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi^i - \eta^i)^2};$

(г) $M = C[a, b], \rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|;$

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

N1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\xi^i|^p}, \quad \|x\|_m = \max_{i=1 \dots n} |\xi^i|$$

Лемма 1.1. Любое нормированное пространство может быть метризовано:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Доказательство. Действительно, аксиома **M1** следует из **N1**, точно также **M2** следует из **N2**:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x).$$

Для доказательства **M3** положим в **N3**

$$x = a - b, \quad y = b - c, \quad \Rightarrow \quad x + y = a - c,$$

которые после подстановки сразу дают необходимое неравенство. $\square$

§2. Евклидово пространство

Определение. Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана *метрическая форма* $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ со следующими свойствами:

E1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$ - линейность по второму аргументу;

E2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ - эрмитовость;

E3. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Замечание. Из аксиом **E1** и **E2**, в частности, следует

$$\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\langle y, \alpha x \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \langle x, y \rangle.$$

То есть, из первого аргумента множитель выносится с сопряжением.

Замечание. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис евклидова пространства X . Пусть также $x, y \in X$, так что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\langle x, y \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \langle e_i, e_j \rangle = \bar{\xi}^i \eta^j g_{ij}.$$

Определение. Совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ называется **метрическим тензором**, а соответствующая матрица $G = \|g_{ij}\|$ - **матрицей Грама**:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Замечание. Свойства матрицы Грама:

(а) $G_{ji} = \overline{G_{ij}}$;

(б) $G_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$;

(в) $\overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} \geq 0, \quad \overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \xi^i = 0, \quad \forall i.$

Пример 2.1. Пример нарушения аксиомы **Е3** - пространство Минковского.
Пусть $X = \mathbb{R}^4$, $x = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)^T$ и

$$\langle x, y \rangle = \xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3.$$

Рассмотрим вектор $x = (1 \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3})^T$, тогда

$$\langle x, x \rangle = 1 - 1/3 - 1/3 - 1/3 = 0,$$

и значит x - нулевой вектор ($x \neq 0$, но $g(x, x) = 0$).

§3. Неравенство Шварца

Лемма 3.1. *Евклидово пространство может быть нормировано:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Доказательство. Проверка первых двух аксиом нормы проводится непосредственно:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x, x \rangle} &\geq 0, \\ \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} &= \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

Проверка последней аксиомы сводится к проверке утверждения

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle,$$

которое составляет утверждение теоремы о *неравенстве Шварца*.

□

Теорема 3.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму, с параметром λ :

$$\begin{aligned} \|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \\ &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) + \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(а) Пусть $X = X(\mathbb{R})$, тогда $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ и выражение преобразуется в

$$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

Тогда $D = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ и теорема доказана.

(б) Пусть $X = X(\mathbb{C})$, тогда $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ и рассмотрим

$$\langle x, y \rangle = e^{i\varphi} |\langle x, y \rangle|, \quad \varphi = \arg \langle x, y \rangle.$$

Определим вектор $z = e^{-i\varphi}x$, тогда

$$\langle z, y \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, y \rangle = r = |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R},$$

$$\langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, e^{-i\varphi}x \rangle = \langle x, x \rangle.$$

Далее применим результат первого доказательства

□

Лемма 3.2. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство тогда и только тогда, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$|\langle x, \alpha x \rangle| \leq \|x\| \|\alpha x\|, \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \|x\|^2 \leq |\bar{\alpha}| \|x\|^2, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha|.$$

Пусть $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, тогда

$$\begin{aligned} D/4 = |\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 = 0 & \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0, \\ & \Leftrightarrow \lambda x + y = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.3. *Для отображения $\|x\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, порожденного скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, справедлива аксиома N3.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку преобразований

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Тем самым мы показали, что скалярное произведение действительно порождает норму, т.к. выполняются все аксиомы.

Ортогональность

Содержание

§1	Ортогональные векторы	1
§2	Процесс ортогонализации	2
§3	Ортогональный базис	3
§4	Ортогональная сумма подпространств	4
§5	Ортогональный проектор	4
§6	Дополнительно: соотношения о проекциях	5

§1. Ортогональные векторы

Определение 1.1. Пусть $x, y \in E$. Говорят, что x **ортогонален** y (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

Лемма 1.1. Пусть $x \perp y_1, y_2, \dots, y_k$, тогда $x \perp \mathcal{L}\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

Доказательство.

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x, y_i \rangle.$$

□

Теорема 1.1. (Об ортогональности и линейной независимости)

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - линейно независимый набор.

Доказательство. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0, \quad \|x_j\| \neq 0,$$

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0.$$

□

Теорема 1.2. (Пифагора) Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

Доказательство.

$$\left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

□

Определение 1.2. Говорят, что x ортогонален подпространству $L \leq X_E$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Замечание. Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

Определение 1.3. Ортогональным дополнением пространства L называется множество

$$M = \{x \in X : x \perp L\}.$$

Лемма 1.2. Ортогональное дополнение является подпространством X_E .

Доказательство. В этом легко убедиться прямой проверкой.

□

§2. Процесс ортогонализации

Теорема 2.1. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно-независимый набор в евклидовом пространстве X_E , тогда $\{x_j\}_{j=1}^k$ можно преобразовать в ортогональный набор $\{e_j\}_{j=1}^k$.

Доказательство. Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$1. e_1 = x_1,$$

$$2. e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle e_1, x_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle},$$

$$3. e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1, e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle e_1, x_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}, \alpha_3^2 = -\frac{\langle e_2, x_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle},$$

... ..

$$m. e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \dots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle e_j, x_m \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle}.$$

□

Замечание. Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.

Доказательство. От противного. Пусть

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \dots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1 = 0,$$

тогда

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m-1}^i x_i + \dots + \alpha_m^2 \sum_{i=1}^2 \alpha_2^i x_i + \alpha_m^1 x_1 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = 0,$$

но это означает, что $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно зависимый набор. Противоречие. □

Замечание. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

Замечание. Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leq \|x_m\|$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m \rangle = \langle e_m, x_m \rangle + 0 + \dots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m \rangle \leq \|x_m\| \cdot \|e_m\|.$$

□

§3. Ортогональный базис

Определение 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства X_E называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j \neq i} \rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Теорема 3.1. Любой базис евклидова пространства X_E может быть преобразован к ортонормированному базису.

Доказательство. Ортогонализация Грама-Шмидта и нормировка. □

Лемма 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ в X_E ортонормирован тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y \in X_E : \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

Доказательство. Действительно, прямой проверкой можем убедиться, что

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

□

Замечание. Матрица Грама скалярного произведения в ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы:

$$G_{\text{ОБ}} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad G_{\text{ОНБ}} = \|\delta_j^i\|.$$

§4. Ортогональная сумма подпространств

Теорема 4.1. Пусть L - подпространство евклидова пространства X_E и

$$M = L^\perp = \{x \in X_E : x \perp L\},$$

тогда

$$E = L \dot{+} M \Leftrightarrow \forall x \in X_E \quad \exists! z \in L, h \in L^\perp : x = z + h.$$

Доказательство. Выполним по пунктам:

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^k$ - ортонормированный базис в L ,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^k$ до базиса X_E : $\{e_1, e_2, \dots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\},$$

$$4. \forall x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i = z + h \Rightarrow X_E = L + M.$$

5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и

$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1 \rangle = 0, \Rightarrow h_2 - h_1 = 0.$$

□

Замечание. В данном случае прямая сумма $X_E = L \dot{+} M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M .

Замечание 4.1. В более общем случае, сумма попарно ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j \neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:

$$L = \bigoplus_{i=1}^s L_i.$$

§5. Ортогональный проектор

Определение 5.1. Ортогональным проектром на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^\perp(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^\perp.$$

Замечание 5.1. Тогда вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L .

Теорема 5.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ортонормированный базис в X_E . Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:

$$\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$x = z + h \Rightarrow \mathcal{P}_L^\perp z = z, \quad \mathcal{P}_L^\perp h = 0.$$

Действительно, пусть e_j - элемент базиса, лежащий в L , тогда

$$\mathcal{P}_L^\perp e_j = \sum_{i=1}^k \langle e_j, e_i \rangle e_i = e_j.$$

Если e_l - элемент базиса, лежащий в M ($k < l \leq n$), тогда

$$\mathcal{P}_L^\perp e_l = \sum_{i=1}^k \langle e_l, e_i \rangle e_i = 0.$$

□

Определение 5.2. Задачей о перпендикуляре называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M .

Замечание 5.2. Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ подпространства L ;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^\perp = x - \mathcal{P}_L^\perp$.

Определение 5.3. Коэффициенты $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

§6. Дополнительно: соотношения о проекциях

Лемма 6.1. *Имеет место следующее сравнение:*

$$\|\mathcal{P}_L^\perp x\| \leq \|x\|$$

Доказательство. Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$\|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2 + \|\mathcal{P}_M^\perp x\|^2 = \|x\|^2.$$

□

Замечание. При $x \in L$ данное неравенство обращается в равенство.

Лемма 6.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$$

Доказательство. Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2 &= \langle \mathcal{P}_L^\perp x, \mathcal{P}_L^\perp x \rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle \langle x, e_i \rangle e_i, \langle x, e_j \rangle e_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^k \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

□

Лемма 6.3. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

Теорема 6.1. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ является полной в X_E тогда и только тогда, когда для любого $x \in X_E$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2, \quad \alpha_i = \langle e_i, x \rangle \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть для любого x выполняется равенство Парсеваля. Предположим, что

$$x = z + h, \quad z = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i, \quad h \perp z,$$

тогда по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2, \quad \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 + \|h\|^2,$$

откуда следует, что $h = 0$ и система $\{e_i\}_{i=1}^k$ - полная в X_E .

□

Операторы в евклидовых пространствах

Содержание

§1 Эрмитово сопряженный оператор	1
§2 Самосопряженный и эрмитов операторы	2
§3 Спектральные свойства эрмитова оператора	2
§4 Унитарный оператор	3
§5 Матрица унитарного оператора	4
§6 Спектральные свойства унитарного оператора	5

§1. Эрмитово сопряженный оператор

Пусть дано евклидово пространство $X_E(\mathbb{K})$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 1.1. Оператор $\varphi^\dagger$ называется **эрмитово сопряженным** к оператору φ , если он обладает следующим свойством:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

Замечание 1.1. Операция эрмитового сопряжения обладает следующими свойствами:

- аддитивность: $(\varphi + \psi)^\dagger = \varphi^\dagger + \psi^\dagger$;
- сопряженная однородность: $(\lambda\varphi)^\dagger = \bar{\lambda}\varphi^\dagger$;
- контравариантность: $(\psi \circ \varphi)^\dagger = \varphi^\dagger \circ \psi^\dagger$;
- инволютивность: $(\varphi^\dagger)^\dagger = \varphi$.

Лемма 1.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис евклидова пространства $X_E(\mathbb{K})$ и G — его матрица Грама. Тогда если A_φ — матрица оператора φ в этом базисе, то матрица $\varphi^\dagger$ будет иметь вид

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1} A^\dagger G, \quad A^\dagger = \overline{A}^T.$$

Доказательство. По определению скалярного произведения:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \xi^\dagger G (A_\varphi \eta) = (\xi^\dagger G A_\varphi G^{-1}) G \eta = (G^{-1} A_\varphi^\dagger G \xi)^\dagger G \eta = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

□

§2. Самосопряженный и эрмитов операторы

Определение 2.1. Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Замечание 2.1. Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

Пример 2.1. Примеры матрицы A самосопряженного оператора и матрицы B эрмитовского оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.2. В случае вещественного поля $\mathbb{R}$ операции $\dagger$ и T совпадают.

§3. Спектральные свойства эрмитова оператора

Лемма 3.1. Все собственные значения эрмитова оператора φ вещественны.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение φ и x — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle \varphi x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle, \quad \langle x, \varphi x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda$$

□

Лемма 3.2. Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\varphi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \varphi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \varphi x_1, x_2 \rangle &= \langle x_1, \varphi x_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle &= \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle &= 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.3. Если $L \leq X$ — инвариантное подпространство эрмитова оператора φ , тогда $L^\perp$ — также инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть $x \in L$ и $y \in L^\perp$, тогда

$$0 = \langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi y \in L^\perp.$$

□

Теорема 3.1. Эрмитов оператор φ является оператором скалярного типа.

Доказательство. Покажем, что собственные векторы φ образуют базис $X_E(\mathbb{C})$. Проведем доказательство от противного: пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ — максимальный ЛНЗ набор:

$$\varphi x_j = \lambda_j x_j, \quad j = 1 \dots m \quad m < n = \dim_{\mathbb{C}} X_E.$$

Пусть далее подпространство L образовано как линейная оболочка над этими векторами:

$$L = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle_{\mathbb{C}}, \quad M = L^{\perp}, \quad \varphi_M : M \rightarrow M$$

Так как M — инвариантное подпространство φ , существует по крайней мере один вектор $\tilde{x} \in M$, такой что

$$\varphi_M \tilde{x} = \tilde{\lambda} \tilde{x}.$$

Но $\tilde{x} \perp L$ и значит $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \tilde{x}\}$ — ЛНЗ. Противоречие. □

Теорема 3.2. (Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \rightarrow X_E$ — эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E , состоящий из собственных векторов φ , тогда:

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle *, e_i \rangle e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Теорему доказывает два обсуждаемых ранее факта:

- Эрмитов оператор диагонализуем.
- Проектор на любое подпространство имеет вид

$$\mathcal{P}_L(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i,$$

где e_i — ортонормированный базис подпространства L . □

§4. Унитарный оператор

Лемма 4.1. Пусть ψ — оператор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{K})$, тогда следующие свойства эквивалентны:

- (а) изометрия: $\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, y \rangle$;
- (б) сохранение нормы: $\|\psi x\| = \|x\|$;
- (в) свойство сопряженного: $\psi^{\dagger} = \psi^{-1}$

Доказательство. Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(2):

$$\|\psi x\|^2 = \langle \psi x, \psi x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2;$$

- Опр.(2) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\begin{aligned} \|\psi(x+y)\|^2 &= \|\psi x\|^2 + \|\psi y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle \psi x, \psi y \rangle, \\ \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle \psi x, \psi y \rangle \end{aligned}$$

Для Im аналогично рассматриваем $\|\psi(x+i \cdot y)\|^2$

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(3):

$$\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, \psi^\dagger \psi y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{Rightarrow} \quad \psi^\dagger \psi = \mathcal{I}.$$

- Опр.(3) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \mathcal{I}y \rangle = \langle x, \psi^\dagger \psi y \rangle = \langle \psi x, \psi y \rangle.$$

□

Определение 4.1. Унитарным называется оператор ψ , обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 4.2. Определитель оператора ψ имеет следующее свойство:

$$|\det \psi| = 1.$$

Доказательство. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det \mathcal{I} = \det (\psi^\dagger \psi) = \det \psi^\dagger \det \psi = \overline{\det \psi} \cdot \det \psi = |\det \psi|^2 = 1.$$

□

Замечание 4.1. Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

§5. Матрица унитарного оператора

Замечание 5.1. Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойства:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} : \quad \psi &\leftrightarrow U_\psi, \quad \overline{U^T} = U^{-1}; \\ \mathbb{R} : \quad \psi &\leftrightarrow U_\psi, \quad U^T = U^{-1}. \end{aligned}$$

Замечание 5.2. В вещественном случае

$$\det \psi = \det U_\psi = \pm 1$$

Лемма 5.1. Пусть $U_\psi = \|u_{ik}\|$ — матрица унитарного оператора, тогда:

$$\sum_{j=1}^n \bar{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

Замечание 5.3. Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

Пример 5.1. Матрица Эйлера — пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

§6. Спектральные свойства унитарного оператора

Лемма 6.1. Все собственные значения оператора ψ по модулю равны единице:

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

Доказательство. Пусть $\psi x = \lambda x$, тогда

$$\langle \psi x, \psi x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle. \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

□

Лемма 6.2. Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:

$$\psi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \psi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Доказательство. Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \psi x_1, \psi x_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2 \rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1 \right) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

□

Лемма 6.3. Ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантного относительно унитарного оператора ψ подпространства L также является инвариантным.

Доказательство. Для любых $x \in L$ и $y \in L^\perp$ имеем:

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle \psi x, \psi y \rangle \Rightarrow \psi x \perp \psi y \Rightarrow \psi y \in M.$$

□

Теорема 6.1. Унитарный оператор является оператором скалярного типа.

Доказательство. Доказательство как для случая эрмитова оператора. □

Пример 6.1. Ортогональный оператор, вообще говоря, не является скалярным.

Теорема 6.2. (Спектральная теорема для унитарного оператора)

Пусть $\psi : X_E \rightarrow X_E$ — унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E , состоящий из собственных векторов ψ , тогда:

$$\psi(*) = \sum_{j=1}^n e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$

Диагонализация квадратичных форм I

Содержание

§1	Квадратичные формы	1
§2	Нормальный вид квадратичной формы	2
§3	Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве	5

§1. Квадратичные формы

Вспомним основные определения, которые будут полезны в ближайшее время. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Предположим также, что в этом линейном пространстве определена билинейная форма $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Определение 1.1. Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad q(v) = b(v, v), \quad \forall v \in V$$

Замечание 1.1. Любая билинейная форма $b(x, y)$ задает квадратичную функцию $q(v)$, которая получается из нее ограничением области определения с $V \times V$ на диагональ $\{(v, v) : v \in V\} \subset V \times V$.

Замечание 1.2. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij} , квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} (v^i)^2 + 2 \sum_{i < j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где v^i — i -я координата вектора v в выбранном базисе.

§2. Нормальный вид квадратичной формы

Рассмотрим симметричную билинейную форму $b \in \text{Bil}^S(V)$.

Определение 2.1. Векторы $u, v \in V$ называются ортогональными относительно билинейной формы b (b -ортогональными), если $b(u, v) = 0$.

Это определение в некотором смысле обобщает определение ортогональности относительно скалярного произведения.

Замечание 2.1. В силу симметричности билинейной формы можно утверждать, что

$$u \perp v \Leftrightarrow v \perp u$$

Определение 2.2. Базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в V называется ортогональным относительно b , если его векторы попарно ортогональны, т.е. $b(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Замечание 2.2. Симметричная билинейная форма и квадратичная форма ей соответствующая в базисе b -ортогональных векторов имеют диагональный вид:

$$b(u, v) = \beta_1 u^1 v^1 + \dots + \beta_n u^n v^n, \quad q(v) = \beta_1 (v^1)^2 + \dots + \beta_n (v^n)^2$$

Теорема 2.1. Для каждой симметричной билинейной (и квадратичной) формы существует b -ортогональный базис.

Доказательство. Докажем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть $n > 1$ и билинейная (квадратичная) форма не является нулевым отображением (здесь снова теорема становится очевидной). Выберем вектор $e_1 \in U_1$ такой, что $b(e_1, e_1) = q(e_1) \neq 0$. Рассмотрим множество векторов $U_1^\perp$, которые являются b -ортогональными вектору e_1 . Очевидно, что оно является линейным подпространством. Более того можно утверждать, что

$$V = U_1 \oplus U_1^\perp, \quad \dim U_1^\perp = n - 1$$

Мы уже показывали справедливость подобного утверждения для ортогональных друг другу подпространств в евклидовом пространстве. К такому подпространству мы вновь можем применить предположение индукции, рассматривая сужение симметричной билинейной (квадратичной) формы на это подпространство. В силу того, что вектор e_1 будет b -ортогональным любому вектору из базиса $\{e_2, \dots, e_n\}$ подпространства $U_1^\perp$, где все векторы также могут быть выбрано как попарно ортогональные, получаем базис пространства V , составленный из ортогонального относительно b набора векторов. ■

Предположим теперь, что найден ортогональный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.

$$q(v) = a_1 (v^1)^2 + \dots + a_n (v^n)^2, \quad a_i = q(e_i)$$

Лемма 2.1. В поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ любая квадратичная форма может быть приведена к виду

$$q(v) = (\tilde{v}^1)^2 + \dots + (\tilde{v}^r)^2,$$

где r – количество ненулевых a_i .

Доказательство. Сделаем преобразование вида

$$e_i \mapsto \tilde{e}_i = \lambda e_i, \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_i = \lambda_i^2 a_i$$

В поле $\mathbb{C}$ можно всегда выбрать такие числа λ_i , что $\tilde{a}_i = 1$. ■

Замечание 2.3. В поле $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ квадраты ненулевых чисел λ_i всегда являются положительными, поэтому указанным преобразованием базиса мы можем найти такие λ_i для всех $a_i \neq 0$, что $|\tilde{a}_i| = 1$, но при этом знак сохранится. Следовательно в $\mathbb{R}$ квадратичная форма может быть приведена только к виду

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r_+} (\tilde{v}^i)^2 - \sum_{j=r_++1}^{r_-} (\tilde{v}^j)^2$$

Определение 2.3. Указанные виды квадратичной формы в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ называются **нормальным видом** квадратичной формы, а числа r_+ и r_- – **положительным и отрицательными индексами инерции** вещественной квадратичной функции. Набор этих чисел (r_+, r_-) также называют **сигнатурой** квадратичной формы.

Сигнатура квадратичной формы является ее инвариантом (не зависит от базиса). Чтобы это показать, введем еще несколько определений.

Определение 2.4. Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если $q(v) > 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно определенная** форма.

Определение 2.5. Квадратичная форма называется **положительно полуопределенной**, если $q(v) \geq 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно полуопределенная** форма.

Замечание 2.4. Могут также рассматриваться неопределенные квадратичные формы. т.е. такие квадратичные формы, для которых не выполняется ни одно из условий в рассмотренных определениях.

Сформулируем утверждение.

Лемма 2.2. *Положительный индекс инерции r_+ квадратичной формы равен максимальной размерности подпространства, на котором $q(v)$ является положительно определенной.*

Доказательство. Квадратичная форма в нормальном виде для $\mathbb{R}$ положительно определена для линейной оболочки векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_{r_+}\}$. Пусть U – произвольное подпространство в V , на котором q положительно определена, т.е. $\forall u \in U$ справедливо $q(u) > 0$. Подпространство W определим как линейную оболочку:

$$W = \langle e_{r_++1}, \dots, e_n \rangle, \quad \Rightarrow \quad \forall w \in W, \quad q(w) \leq 0$$

Очевидно, что $U \cap W = 0$, а следовательно для размерностей имеем

$$\dim(U + W) = \dim U + (n - r_+) \leq \dim V = n$$

Откуда мы получаем, что $\dim U \leq r_+$, что и требовалось доказать.

Замечание 2.5. Вследствие того, что индекс инерции определяется размерностью подпространства, он не может зависеть от выбора базиса. Аналогичные рассуждения справедливы и для отрицательного индекса инерции.

Сформулируем критерий положительной определенности квадратичной формы.

Теорема 2.2. *(Критерий Сильвестра) Вещественная квадратичная форма q , имеющая матрицу A_q в некотором базисе, положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы A_q положительны.*

Доказательство. Необходимость.

Если квадратичная форма положительно определена, то определитель ее матрицы в произвольном базисе также положительный. В базисе q -ортогональных векторов матрица представляет собой единичную матрицу, определитель которой равен 1. Рассмотрим преобразование матрицы квадратичной формы при смене базиса с матрицей перехода C

$$A'_q = C^T A_q C \quad \Rightarrow \quad \det A'_q = \det(C^T A_q C) = \det(C^T C) > 0$$

Произвольный минор, полученный на пересечении строк и столбцов с индексами $1 \leq i_1 < i_2 \dots i_k \leq n$ представляет собой матрицу сужения квадратичной формы на подпространство, образованное линейной оболочкой базисных векторов соответствующих этим строкам (столбцам). Квадратичная положительно определенная форма является таковой на любом своем подпространстве. Следовательно произвольный минор является положительным, а значит и угловые миноры тоже.

Достаточность.

Покажем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Предположим, что результат теоремы справедлив на пространствах размерности не превосходящей $n - 1$. Пусть A_q – вещественная симметричная матрица порядка n , у которой все угловые миноры положительны. По предположению индукции сужение на подпространство размерности $n - 1$ является положительно определенным, а значит положительный индекс инерции $r_+ \geq n - 1$. Следовательно в отсутствие $a_i = 0$ мы имеем $r_+ + r_- = n$, а значит r_- может быть либо 0, либо 1. В последнем случае нормальный вид квадратичной формы:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r_+} (v^i)^2 - (v^n)^2$$

Но определитель матрицы такой квадратичной формы отрицателен. Следовательно единственная возможность для индексов инерции $r_+ = n$ и $r_- = 0$, что и говорит о положительной определенности квадратичной формы.

§3. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

Пусть E_V – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Определим также в этом пространстве линейный оператор $\varphi \in \text{End}(V)$. Определим при помощи него билинейную функцию b_φ

$$b_\varphi(u, v) = \langle u, \varphi(v) \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

Замечание 3.1. Обратим внимание, что линейные пространства эндоморфизмов и билинейных форм имеют одинаковую размерность $\dim \text{End}(V) = \dim \text{Bil}(V) = n^2$. Сопоставление между билинейными формами и операторами определяет изоморфизм этих линейных пространств.

Замечание 3.2. Данный изоморфизм не зависит от базиса (канонический изоморфизм), а только лишь от выбора скалярного произведения. Следовательно относительно него существует единственный однозначно определяемый оператор, позволяющий получить данную билинейную форму.

Несложно проверить, что симметричной билинейной форме будет соответствовать самосопряженный оператор. Следовательно и квадратичной форме будет соответствовать самосопряженный оператор. Оператор, определяемый таким образом, называют присоединенным оператором к билинейной (квадратичной) форме.

Лемма 3.1. Матрицы Грама G скалярного произведения, квадратичной формы A_q и присоединенного к нему оператора A_φ связаны соотношением

$$A_q = GA_\varphi$$

Доказательство. Зафиксируем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в V . Для любых векторов, представленных их координатными столбцами u и v , можно найти значение квадратичной формы при помощи ее матрицы с одной стороны, а с другой стороны можно воспользоваться способом вычисления скалярного произведения через матрицу Грама:

$$x^T A_q y = x^T G A_\varphi y \quad \Rightarrow \quad A_q = G A_\varphi$$

Замечание 3.3. В силу построенного изоморфизма между квадратичными формами и самосопряженными операторами для диагонализации квадратичной формы достаточно найти ортонормированный базис из собственных векторов (он всегда существует для самосопряженного оператора). При этом матрица Грама будет единичной матрицей $G = E$, а матрица самосопряженного оператора примет вид диагональной матрицы $A_\varphi = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Диагонализация квадратичных форм II

Содержание

§1 Методы Лагранжа и Якоби	1
§2 Метод Якоби диагонализации квадратичных форм	2
§3 Одновременная диагонализация двух квадратичных форм	4

§1. Методы Лагранжа и Якоби

Рассмотрим ряд методов, которые могут использоваться для нахождения диагональных представлений квадратичных форм. Пусть $V(\mathbb{K})$ — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ размерность которого $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Теорема 1.1. *Любая квадратичная форма $q(v)$, заданная в линейном пространстве V , с помощью невырожденного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство. Доказательство произведем при помощи **метода Лагранжа**, основная идея которого заключается в последовательном приведении квадратного трехчлена до полного квадрата.

Если $q(v) = 0$ для $\forall v \in V$, то квадратичная (нулевая) форма уже представлена в каноническом виде по определению. Поэтому все дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении, что она ненулевая, то есть $\exists v \in V, q(v) \neq 0$. В частности, из этого следует, что существуют ненулевые коэффициенты квадратичной формы в некотором базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Здесь возможно два случая. Первый заключается в том, что существует коэффициент $a_{ii} \neq 0$. Тогда, не теряя общности можем предположить, что это коэффициент a_{11} для удобства. Этого всегда можно достичь простой перестановкой базисных элементов. Основная часть метода будет применяться именно в этом случае, но сначала рассмотрим второй случай — когда все $a_{ii} = 0$. Этому соответствует самый простой случай, когда

$$q(v) = v^1 v^2,$$

где верхний индекс означает нумерацию координаты, а не степень. Тогда мы можем совершить преобразование вида

$$v^1 = \tilde{v}^1 - \tilde{v}^2, \quad v^2 = \tilde{v}^1 + \tilde{v}^2, \quad v^i = \tilde{v}^i, \quad i = 3, \dots, n$$

которое очевидно является невырожденным и приводит квадратичную форму к виду

$$q(x) = (\tilde{v}^1 - \tilde{v}^2)(\tilde{v}^1 + \tilde{v}^2) = (\tilde{v}^1)^2 - (\tilde{v}^2)^2,$$

к которой мы можем применять уже дальнейшие преобразования. Далее будем считать, что до исчерпания координат и завершения метода, всегда найдется слагаемое, содержащее квадрат следующей по номеру координаты.

Пусть квадратичная форма в заданном базисе имеет вид

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v^i v^j, \quad a_{11} \neq 0$$

Сгруппируем слагаемые таким образом, что в первой выделенной группе будут все слагаемые, содержащие **ведущую координату** v^1 , а под знаком суммы соберем все остальные слагаемые:

$$q(v) = a_{11}(v^1)^2 + 2a_{12}v^1v^2 + \dots + 2a_{1n}v^1v^n + \sum a_{ij}v^i v^j \Rightarrow$$

и преобразуем выделенную группу, вычленив полный квадрат данного выражения.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & a_{11} \left(v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n \right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}(v^2)^2 - \dots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}(v^n)^2 - \\ & - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}(v^2)(v^3) - \dots - 2\frac{a_{1,n-1}a_{1n}}{a_{11}}v^{n-1}v^n + \sum a_{ij}v^i v^j = \\ & = a_{11} \left(v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n \right)^2 + \sum' \tilde{a}_{ij}v^i v^j \end{aligned}$$

В этом выражении все появившиеся слагаемые были "свернуты" под знак суммы. Теперь, рассматривая часть квадратичной формы, которая оказалась под этим знаком суммы $\sum'$, мы можем снова применить выделения полного квадрата, но уже относительно координаты v^2 . Последовательно выполняя эти действия к каждой из координат, имеем возможность получить диагональный вид квадратичной формы, полученный при помощи преобразования

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n \\ \tilde{v}^2 = v^2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}v^3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}v^n \\ \tilde{v}^k = v^k + \sum_{i=k}^n \frac{a_{ki}}{a_{kk}}v^i \\ \tilde{v}^n = v^n \end{cases}$$

□

§2. Метод Якоби диагонализации квадратичных форм

Теорема 2.1. Пусть квадратичная форма $q(v)$ в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ имеет матрицу $A_q = (a_{ij})$, и все её **главные миноры**:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} \neq 0.$$

Тогда существует **единственное** верхнетреугольное преобразование базиса $\{e_i\} \rightarrow \{g_i\}$, приводящее $q(v)$ к каноническому виду:

$$q(v) = \Delta_1(v^1)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}(v^2)^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}(v^n)^2.$$

Доказательство. Пусть новые векторы g_j задаются верхнетреугольным преобразованием:

$$\begin{cases} g_1 = e_1, \\ g_2 = s_{21}e_1 + e_2, \\ g_3 = s_{31}e_1 + s_{32}e_2 + e_3, \\ \vdots \\ g_n = s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2 + \dots + e_n, \end{cases}$$

Очевидно, что данное преобразование будет невырожденным. Следовательно набор векторов $\{g_j\}_{j=1}^n$ является базисом. Для связи этого преобразования с квадратичной формой, предположим, что коэффициенты s_{ji} ($j > i$) находятся из условия диагональности $q(v)$.

Это условие обеспечивается следующими рассуждениями. Пусть $b(u, v)$ — билинейная форма, которая является полярной к данной билинейной форме. Очевидно, что для диагонального вида квадратичной формы $q(v)$ необходимо, чтобы и полярная билинейная форма была диагональной. Для канонического вида необходимо:

$$b(g_j, e_i) = 0 \quad \text{при } i < j,$$

тогда будет выполняться и $b(g_j, g_i) = 0$ для $i < j$, т.к. каждый из g_k выражается через векторы из $\{e_i\}_{i=1}^k$.

Для каждого $j \geq 2$, подставляя $g_j = \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk}e_k + e_j$, получаем систему уравнений.

$$\sum_{k=1}^{j-1} s_{jk}a_{ki} + a_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1),$$

где $a_{ki} = b(e_k, e_i)$.

Проанализируем полученную систему относительно неизвестных $\{s_{jk}\}$. Матрица системы совпадает с главным минором Δ_{j-1} . Из условия $\Delta_{j-1} \neq 0$ и теоремы Крамера следует единственность решения:

$$s_{jk} = (-1)^{k+j} \frac{\Delta_k^{(j)}}{\Delta_{j-1}},$$

где $\Delta_k^{(j)}$ — минор с заменой k -го столбца на $(a_{j1}, \dots, a_{j,j-1})^T$, а множитель (-1) возникает из-за того, что в "классических" формулах Крамера столбец свободных членов находится в правой части системы.

Перейдем к вычислению диагональных коэффициентов. Из условий ортогональности $q(g_j, g_i) = 0$ при $i < j$ следует:

$$\lambda_j = q(g_j) = b(g_j, g_j) = b(e_j, g_j) = b\left(e_j, \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk} e_k + e_j\right) = \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk} a_{jk} + a_{jj}.$$

Подставляя выражение для s_{jk} :

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{j-1} \left[(-1)^{k+j} \frac{\Delta_k^{(j)}}{\Delta_{j-1}} \right] a_{jk} + a_{jj}.$$

Числитель этого выражения совпадает с разложением определителя Δ_j по j -й строке (теорема Лапласа):

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^j (-1)^{j+k} a_{jk} \Delta_k^{(j)}.$$

Следовательно:

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}.$$

Ненулевые миноры Δ_j гарантируют единственность s_{ji} . Следовательно, преобразование $\{e_i\} \rightarrow \{g_i\}$ единственно. $\square$

Замечание 2.1. Если $\Delta_j = 0$ для некоторого j , метод Якоби неприменим. В этом случае используется метод Лагранжа.

§3. Одновременная диагонализация двух квадратичных форм

Теорема 3.1. Пусть $q_1(v)$ и $q_2(v)$ – две квадратичные формы в линейном пространстве V размерности n , причём $q_1(v)$ **невыврождена** (т.е. $\det A \neq 0$, где A – матрица $q_1(v)$). Тогда существует базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, в котором обе формы диагональны:

$$\begin{cases} q_1(v) = \lambda_1(v^1)^2 + \lambda_2(v^2)^2 + \dots + \lambda_n(v^n)^2, \\ q_2(v) = \mu_1(v^1)^2 + \mu_2(v^2)^2 + \dots + \mu_n(v^n)^2, \end{cases}$$

где $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Построим доказательство конструктивно, приведя алгоритм нахождения нужного преобразования.

(а) **Диагонализация $q_1(v)$:**

Приведем квадратичную форму $q_1(v)$ к диагональному виду с помощью ортогональных преобразований, например при помощи спектрального анализа присоединенного оператора к этой квадратичной форме. Получим базис $\{f_i\}$, в котором форма имеет матрицу

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

(б) **Преобразование $q_2(v)$:**

Вычислим матрицу B формы $q_2(v)$ в базисе $\{f_i\}$:

$$B = T_1^T B' T_1,$$

где T_1 — матрица перехода из $\{e_i\}$ в $\{f_i\}$, B' — исходная матрица $q_2(v)$. Еще раз обратим внимание, что преобразование T является ортогональным, т.к. основано на собственных векторах присоединенного оператора.

(в) **Диагонализация $q_2(v)$:**

Вновь применим спектральную теорию для диагонализации второй квадратичной формы, находя ортогональное преобразование из $\{f_i\}$ в $\{g_i\}$, которое позволит преобразовать квадратичную форму $q_2(v)$ в диагональный вид

$$B \mapsto \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

При этом, в связи с тем, что преобразование T_2 является ортогональным, оно не изменит диагональный вид матрицы квадратичной формы $q_1(v)$, а следовательно композиция ортогональных преобразований $T_2 \circ T_1$ и есть искомое преобразование.

□

Замечание 3.1. Если невырожденная квадратичная форма является положительно определенной, то тогда можно интерпретировать полярную к ней билинейную форму как матрицу Грама скалярного произведения. В этом случае, исходный базис может быть ортогонализирован процессом Грама-Шмидта, а для поиска диагонального представления второй квадратичной формы также использовать полученный базис и имеющееся "скалярное произведение".