

# Линейная алгебра

## Лекция I. Линейные формы.

### Понятие линейной формы.

**Линейной формой** на пространстве  $V$  называется такая функция  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ , что  $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  выполняется:

(а) Аддитивность:  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ .

(б) Однородность:  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ .

---

### Понятие коэффициентов линейной формы.

**Коэффициентами**  $\varphi_i$  линейной формы  $f$  называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

---

### Теорема.

Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.

*Доказательство.* Пусть в выбранном базисе  $\{e_i\}_{i=1}^n$  линейного пространства  $V$  линейная форма  $f$  задана набором коэффициентов  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ . Тогда  $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$ :

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i$$

Таким образом получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого вектора и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены в *одном и том же базисе*.

---

### Понятие равных линейных форм

Линейные формы  $f$  и  $g$  будем называть **равными**, если

$$f = g \Leftrightarrow f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

---

### Понятие нулевой линейной формы

Линейная форма  $\theta$  называется **нулевой (нуль-формой)**, если

$$\theta(v) = 0, \quad \forall v \in V$$

Очевидно, что мы можем определить действия на множестве форм.

---

### Понятие суммы линейных форм

**Суммой** линейных форм  $f$  и  $g$  называется отображение  $h = f + g$ , для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \quad \forall v \in V$$

---

### Лемма

Отображение  $h$  является линейной формой.

*Доказательство.* Покажем справедливость свойства аддитивности:

$$\begin{aligned} h(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) = \\ &= (f(v_1) + g(v_1)) + (f(v_2) + g(v_2)) = h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

Выполнение свойства однородности показывается аналогично.

---

### Понятие произведения линейной формы на число

**Произведением** линейной формы  $f$  на число  $\alpha \in \mathbb{K}$  называется отображение  $l = \alpha f$  такое, что

$$l(v) = \alpha \cdot f(v), \quad \forall v \in V$$

*Доказательство.* Аналогично лемме о сумме линейных форм.

---

### Теорема

Множество линейных форм  $V^*$ , заданных на линейном пространстве  $V$  образует линейное (сопряженное) пространство.

Рассмотрим некоторый базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$  в пространстве  $V$ . Введем набор линейных форм  $\{f^j\}_{j=1}^n$  следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает  $j$ -ю координату вектора  $v \in V$  в базисе  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

---

### Лемма

Набор линейных форм  $\{f^j\}_{j=1}^n$  является базисом в сопряженном пространстве  $V^*$ .

*Доказательство.* Чтобы показать справедливость утверждения, необходимо доказать полноту и линейную независимость этого набора. Покажем сначала полноту:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_i v^i = \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i(v) = \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i \right)(v)$$

Аналогично с линейной независимостью. Предположим, что линейная комбинация форм с некоторыми коэффициентами  $\alpha_i$  равна нуль-форме.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i = \theta$$

Применяя эту нуль-форму к произвольному базисному вектору, получим

$$\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i f^i \right) (e_k) = \theta(e_k) = 0$$

Учитывая также свойства линейности и их определение

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k f^k(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0$$

### Теорема

Пусть  $\{f^i\}_{i=1}^n$  и  $\{\tilde{f}^l\}_{l=1}^n$  - базисы  $V^*$ , сопряженные соответственно базисам  $\{e^j\}_{j=1}^n$  и  $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ . Тогда

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i$$

где  $(\sigma_i^l) = S$  - элементы обратной матрицы перехода, полагая  $(\tau_k^j) = T$  - матрица перехода из  $\{e^j\}_{j=1}^n$  в  $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$ .

*Доказательство.* По определению сопряженных базисов имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}^l(\tilde{e}_k) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i \left( \sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j f^i(e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^i = \delta_k^l \end{aligned}$$

Откуда следует, что произведение матрицы, составленной из  $\sigma_i^l$ , на матрицу перехода с элементами  $\tau_k^j$  должно быть равно единичной матрице. А это есть не что иное как определение обратной матрицы.

### Теорема

Преобразование координат формы в  $V^*$  при переходе от базиса  $\{f^i\}_{i=1}^n$  к базису  $\{\tilde{f}^l\}_{l=1}^n$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_l = f(\tilde{e}_l) &= \sum_{i=1}^n \eta_i f^i \left( \sum_{j=1}^n \tau_l^j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j f^i(e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \end{aligned}$$

### Лемма

Пространство  $V$  и сопряженное пространство  $V^*$  изоморфны.

*Доказательство.* Справедливость утверждения следует из того, что  $\dim V = \dim V^*$  (мощности базисов равны), а следовательно

$$V \simeq \mathbb{K}_n \simeq V^*$$

Изоморфизм устанавливается введенным соответствием между базисами пространств  $V$  и  $V^*$ .

Отметим, что операцию нахождения сопряженного пространства можно применять итеративно.

---

### Понятие второго сопряженного пространства

Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

---

### Теорема

Между пространствами  $V$  и  $V^{**}$  можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).

*Доказательство.* Рассмотрим элементы второго сопряженного пространства  $\hat{v}, \hat{u} \in V^{**}$ :

$$\begin{aligned}\hat{v} : V^* &\rightarrow \mathbb{K}, & \hat{v}(f) &\in \mathbb{K} \\ \hat{v}(f + g) &= \hat{v}(f) + \hat{v}(g), & \hat{v}(\alpha f) &= \alpha \hat{v}(f) \\ (\hat{v} + \hat{u})(f) &= \hat{v}(f) + \hat{u}(f), & (\alpha \hat{v})(f) &= \alpha \hat{v}(f)\end{aligned}$$

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\hat{x} \leftrightarrow x : \quad \hat{v}(f) = f(x) \quad \forall f \in V^*$$

---

### Понятие билинейной формы

**Билинейной формой** на линейном пространстве  $V(\mathbb{K})$  называется такая функция  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , что  $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$  выполняется: (а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

---

### Замечание

Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее. Отсюда сразу следует первый пример.

---

### Пример

Пусть  $f, g \in V^*$  - линейные формы в пространстве  $V(\mathbb{K})$ . Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

---

### Пример

Скалярное произведение геометрических векторов на плоскости (в пространстве) линейно по каждому из аргументов, а следовательно является билинейной формой.

---

### Пример

Пусть  $V = \mathbb{K}^n$  - арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \varepsilon^i \eta^j,$$

где  $x = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)^T \in V$  и  $y = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)^T \in V$ .

---

### Замечание

Последний пример примечателен тем, что любую билинейную форму можно представить в таком виде.

Рассмотрим  $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  - множество всех билинейных форм с аргументами из  $V$ . Для этого множества справедливо следующее.

(а) Билинейные формы  $b, b' \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  равны тогда и только тогда, когда принимают равные значения на одинаковых парах аргументов:

$$b = b' \Leftrightarrow b(x, y) = b'(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

(б) Существует нулевая билинейная форма  $\theta \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ , принимающая 0  $\in \mathbb{K}$  на любой паре аргументов.

$$\theta \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) : \quad \theta(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in V$$

(в) Может быть определена сумма билинейных форм  $b, b' \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  как отображение вида

$$c = b + b' \Leftrightarrow c(x, y) = b(x, y) + b'(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

(г) Может быть определено умножение билинейной формы  $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  на скаляр  $\lambda \in \mathbb{K}$  как отображение вида

$$d = \lambda b \Leftrightarrow d(x, y) = \lambda b(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

---

### Лемма

Отображение  $c$  и  $d$  являются билинейными формами.

*Доказательство.* Аналогично соответствующим утверждениям для линейных форм.

---

### Лемма

Множество  $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  наделено структурой линейного пространства.

*Доказательство.* Можно убедиться путем прямой проверки аксиом линейного пространства.

---

### Понятие симметричной билинейной формы

Билинейная форма  $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  называется **симметричной**, если выполняется  $b(x, y) = b(y, x)$ .

---

### Понятие антисимметричной билинейной формой

Билинейная форма  $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  называется **антисимметричной**, если выполняется  $b(x, y) = -b(y, x)$ .

---

#### Лемма

Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.

*Доказательство.* Убеждаемся непосредственной проверкой:

$$b^S(x, y) + b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)) + \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)) = b(x, y)$$

---

#### Лемма

Пространство билинейных форм представляется в виде прямой суммы подпространств симметричных и антисимметричных билинейных форм.

$$\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) \oplus \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

*Доказательство.*

Процедура изготовления симметричных (антисимметричных) форм, описанная выше, позволяет заключить, что

$$\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) + \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Покажем, что сумма будет прямой. Пусть билинейная форма  $h(x, y)$  такова, что  $h \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) \cap \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$ . Тогда имеем

$$\begin{cases} h(x, y) = h(y, x) \\ h(x, y) = -h(y, x) \end{cases} \Rightarrow h(y, x) = -h(y, x) \Rightarrow h(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

В пересечении подпространств лежит только нулевая билинейная форма. Следовательно сумма является прямой.

---

### Понятие коэффициентов билинейной формы

**Коэффициентами**  $\beta_{ij}$  билинейной формы  $b(x, y)$  называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

---

#### Теорема

Задание билинейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, т. е. заданию ее коэффициентов.

*Доказательство.* Пусть в выбранном базисе  $\{e_i\}_{i=1}^n$  линейного пространства  $V$  билинейная форма  $b(x, y)$  задана набором коэффициентов  $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^n$ . Тогда  $\forall x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$ :

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \eta^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \beta_{ij}$$

По аналогии с линейными формами, коэффициенты которых можно представить в виде вектора-строки, существует аналогичное представление для билинейной формы.

### Понятие матрицы билинейной формы

Матрицей билинейной формы  $b(x, y)$  называется матрица  $B$ , составленная из ее коэффициентов.

### Лемма

Пространство билинейных форм  $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$  изоморфно пространству квадратных матриц  $M_{n(\mathbb{K})}$ .

*Доказательство.* Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$b \leftrightarrow B \quad b' \leftrightarrow B'$$

$$b + b' \leftrightarrow B + B'$$

$$\lambda b \leftrightarrow \lambda B$$

Соответствие между линейными операциями с билинейными формами и матрицами проверяется непосредственной проверкой определений.

### Теорема

Матрицы  $B$  и  $B'$  билинейной формы  $b(x, y)$ , заданные в базисах  $\{e_i\}_{i=1}^n$  и  $\{e'_j\}_{j=1}^n$  связаны соотношением

$$B' = C^T B C,$$

где  $C = (c_j^i)$  - матрица перехода от базиса  $\{e_i\}_{i=1}^n$  к базису  $\{e'_j\}_{j=1}^n$ .

*Доказательство.* Полагая, что известна матрица перехода  $C = (c_j^i)$ , компоненты нового базиса можно выразить через векторы старого базиса как

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_j^i e_i$$

Воспользуемся этим, чтобы получить компоненты матрицы билинейной формы в новом базисе

$$\beta'_{ij} = b(e'_i, e'_j) = b\left(\sum_{k=1}^n c_i^k e_k, \sum_{l=1}^n c_j^l e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l b(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l \beta_{kl},$$

где  $\beta_{kl} = b(e_k, e_l)$  для всех  $k, l = 1, \dots, n$  - коэффициенты матрицы билинейной формы в старом базисе. Данное двойное суммирование означает ничто иное как матричное умножение, которое можно записать в виде

$$B' = C^T B C$$

Данное утверждение легко проверяется прямым раскрытием матричного умножения в индексном виде.

---

## Понятие квадратичной формы

**Квадратичной формой** на линейном пространстве  $V$  называется отображение  $q(v)$ , построенное из билинейной формы  $b(x, y)$  следующим образом:

$$q : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad q(v) = b(v, v), \quad \forall v \in V$$

---

### Лемма

Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.

*Доказательство.* Справедливы следующие рассуждения:

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

Тем самым мы показали, что квадратичная форма является однородной функцией 2-го порядка. Зафиксируем теперь базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$  в пространстве  $V$ . Произвольный вектор можем разложить по этому базису единственным образом  $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ . Тогда квадратичная функция в координатном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} q(v) &= q\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = b\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j \beta_{ij}, \end{aligned}$$

где  $\beta_{ij}$  - коэффициенты билинейной формы, по которой построена квадратичная форма  $q(v)$ .

### Лемма

По квадратичной форме  $q(v)$  однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной формы  $b(x, y)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим квадратичную форму от суммы векторов  $x, y \in V$ :

$$q(x + y) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = q(x) + b(x, y) + b(y, x) + q(y)$$

Откуда

$$b(x, y) + b(y, x) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

Если билинейную форму полагать симметричной, т.е.  $b \in \text{Bil}^{S(V)}$ , то имеем

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

---

## Понятие полилинейной формы

**Полилинейной формой** на линейном пространстве  $V(\mathbb{K})$  назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, \alpha x'_i + \beta x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) &= \\ &= \alpha \mathcal{A}(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) + \beta \mathcal{A}(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q), \end{aligned}$$

где  $x_i \in V$  и  $\varphi^j \in V^*$ .

---

### Понятие валентности полилинейной формы

**Валентностью** полилинейной формы называют пару чисел  $(p, q)$ , определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

---

### Понятие равных полилинейных форм

Полилинейные формы  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$  одинаковой валентности будем называть **равными**, если

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

---

### Понятие нуль-формы

**Нуль-формой**  $\Theta \in \Omega_q^p$  называется такая полилинейная форма, что

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = 0 \quad \forall x_i \in V, \quad \forall \varphi^j \in V^*$$

Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  - полилинейные формы валентности  $(p, q)$ . Введем операции с ними.

---

### Понятие суммы полилинейных форм

Отображение  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  будем называть суммой полилинейных форм  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , если

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) &= \\ &= \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) + \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

---

### Лемма

Отображение  $\mathcal{C}$ , определенное как сумма полилинейных форм  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$  является полилинейной формой из  $\Omega_q^p$

*Доказательство.* Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм.

---

### Понятие произведения полилинейной формы на скаляр

Отображение  $\lambda \mathcal{A}$  будем называть произведением полилинейной формы  $\mathcal{A}$  на скаляр  $\lambda$ , если

$$(\lambda \mathcal{A})(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

---

### Лемма

Отображение  $\lambda \mathcal{A}$ , определенное как произведение полилинейной формы  $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$  на скаляр  $\lambda \in \mathbb{K}$  является полилинейной формой из  $\Omega_q^p$

*Доказательство.* Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм.

---

### Теорема

Множество  $\Omega_q^p$  полилинейных форм валентности  $(p, q)$  образует линейное пространство.

*Доказательство.* Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства.

---

### Понятие произведения полилинейных форм

Произведением полилинейных форм  $\mathcal{A} \in \Omega_{q_1}^{p_1}$  и  $\mathcal{B} \in \Omega_{q_2}^{p_2}$  называют отображение  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  определяемое как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot \mathcal{B}(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) = \\ = \mathcal{C}(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) \end{aligned}$$


---

### Лемма

Отображение  $\mathcal{C}$ , введенное как произведение полилинейных форм, является полилинейной формой.

$$\mathcal{C} \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

*Доказательство.* Не теряя общности, мы можем показать линейность по первому векторному аргументу. Для остальных доказательство может быть построено аналогичным образом, но его запись при этом усложнится значительно. Пусть произведение полилинейных форм задается следующим образом:

$$\mathcal{C}(x, \dots; \dots) = \mathcal{A}(x, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots, \dots; \dots),$$

где через многоточия обозначены остальные аргументы всех полилинейных форм согласно определению выше.

При этом, если аргумент  $x$  представлен линейной комбинацией  $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) &= \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= (\alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots)) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{C}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{C}(x_2, \dots; \dots), \end{aligned}$$

где мы воспользовались свойством полилинейности отображения  $\mathcal{A}$ . В силу того, что это отображение линейно по каждому из аргументов, данные рассуждения справедливы по набору его аргументов. А также в силу того, что отображение  $\mathcal{B}$  тоже является полилинейным, свойство линейности отображения  $\mathcal{C}$  по каждому из аргументов набора из  $\mathcal{B}$ .

---

### Свойства произведения полилинейных форм

(а) Некоммутативность

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  определяет порядок аргументов в  $\mathcal{C}$ . Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм  $f^1, f^2 \in V^*$

$$\mathcal{C}_1 = f^1 \cdot f^2 \Rightarrow \mathcal{C}_1(x, y) = f^1(x) \cdot f^2(y)$$

$$\mathcal{C}_2 = f^2 \cdot f^1 \Rightarrow \mathcal{C}_2(x, y) = f^2(x) \cdot f^1(y)$$

(б) Ассоциативность

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$$

(в) Нуль-форма

$$\mathcal{A} \cdot \Theta_{(p_2, q_2)} = \Theta_{(p_1, q_1)} \cdot \mathcal{B} = \Theta_{(p_1+p_2, q_1+q_2)}$$

(г) Законы согласования операций (дистрибутивность)

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$$

$$(\alpha \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} = \alpha(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cdot (\alpha \mathcal{B})$$

### Понятие тензора полилинейной формы

Зафиксируем в  $V(\mathbb{K})$  базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$  и построим к нему сопряженный базис  $\{f^j\}_{j=1}^n$  в пространстве  $V^*$ . Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^{j(e_i)} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**Тензором** полилинейной формы  $\mathcal{C}$  валентности  $(p, q)$  называется набор из  $n^{p+q}$  скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы  $i_1, i_2, \dots, i_p$  и  $j_1, j_2, \dots, j_q$  принимают значения  $1, \dots, n$ , где  $n = \dim V$  - это размерность пространства  $V$ .

### Замечание о неом суммировании

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило суммирования Эйнштейна**, или соглашение о неом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

(а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

(б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют неммым в силу того, что его обозначение не принципиально, т. е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

(в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является неммым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$e_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

---

### Теорема

Задание тензора эквивалентно заданию его компонент в паре базисов пространств  $V$  и  $V^*$ .

---