# Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет Информационных Технологий, Механики и Оптики

Кафедра Систем Управления и Информатики

Лабораторная работа №8

Выполнил(и):

Дощенников Н.А.

Проверил:

Мусаев А.А.

Санкт-Петербург, 2025

## Введение

В данной лабораторной работе требуется разработать оригинальные задачи по ключевым темам алгоритмов. Для каждой задачи необходимо сформулировать условие, предложить решение и обосновать выбор метода. Цель работы — закрепить навыки постановки и анализа алгоритмических задач, а также демонстрация практического применения различных методов.

## Алгоритмы сортировки

## Задача 1.

#### Условие

В одном королевстве существует Гильдия Равновесия: в неё принимают только тройки героев, чьи силы в сумме равны нулю. Даны силы героев (могут повторяться). Найти все уникальные тройки, дающие сумму 0.

#### Решение

Отсортируем массив и переберём первый элемент тройки. Для оставшегося подмассива используем два указателя, сдвигая их в зависимости от текущей суммы. Для устранения дубликатов пропускаем повторы первого и второго элементов. Сложность  $O(n^2)$ .

```
def three sum(nums):
  res = []
  nums.sort()
  for i in range(len(nums)):
    if i > 0 and nums[i] == nums[i-1]:
       continue
    i = i + 1
    k = len(nums) - 1
    while j < k:
       s = nums[i] + nums[j] + nums[k]
       if s > 0:
         k = 1
       elif s < 0:
         i += 1
       else:
         res.append([nums[i], nums[j], nums[k]])
         i += 1
         while j < k and nums[j] == nums[j-1]:
```

```
j += 1
return res

if __name__ == "__main__":
nums = [-1, 0, 1, 2, -1, -4]
print(three_sum(nums))
```

Рисунок 1 – Скриншот работы кода

## Условие

Даны полоски ткани трёх цветов: 0, 1, 2. Требуется упорядочить массив по возрастанию без вспомогательной памяти и без готовых функций сортировки.

## Решение

Используем три указателя: границы для 0 и 2 и текущую позицию. При встрече 0 меняем с началом, при 2 — с концом, при 1 — продвигаем текущую позицию. Однопроходный алгоритм, O(n) по времени и O(1) по памяти.

```
def sort colors(nums):
  low = 0
  mid = 0
  high = len(nums) - 1
  while mid <= high:
    if nums[mid] == 0:
       nums[low], nums[mid] = nums[mid], nums[low]
       low += 1
       mid += 1
    elif nums[mid] == 1:
       mid += 1
    else:
       nums[mid], nums[high] = nums[high], nums[mid]
       high = 1
if name = " main ":
  nums = [2, 0, 2, 1, 1, 0]
  sort colors(nums)
  print(nums)
```

Рисунок 2 – Скриншот работы кода

#### Условие

Дан массив чисел. Переставить элементы так, чтобы получилась зигзагообразная последовательность: nums[0] < nums[1] > nums[2] < nums[3] > ...

## Решение

Отсортируем массив, разделим пополам и развернём обе половины. Заполним чётные позиции элементами из левой половины, нечётные — из правой. Это даёт требуемое чередование. Сложность O(n log n).

```
def wiggle_sort(nums):
    nums.sort()
    mid = (len(nums) + 1) // 2
    left = nums[:mid][::-1]
    right = nums[mid:][::-1]
    nums[::2] = left
    nums[1::2] = right

if __name__ == "__main__":
    nums = [1, 5, 1, 1, 6, 4]
    wiggle_sort(nums)
    print(nums)
```

Рисунок 3 – Скриншот работы кода

### Алгоритмы поиска

## Задача 1.

#### Условие

Дана прямоугольная решётка символов и слово. Можно ходить по соседним клеткам по вертикали и горизонтали, клетку можно использовать не более одного раза. Нужно определить, существует ли путь, формирующий слово.

#### Решение

Используем поиск в глубину с возвратом. Запускаем DFS из каждой клетки, совпадающей с первой буквой, помечая клетки как посещённые на текущем пути. Сложность  $O(m \cdot n \cdot 4^L)$ , где L — длина слова.

```
def exist(board, word):
  rows, cols = len(board), len(board[0])
  visited = set()
  def dfs(r, c, k):
     if k == len(word):
       return True
     if r < 0 or r >= rows or c < 0 or c >= cols or (r, c) in visited or board[r][c] !=
word[k]:
       return False
     visited.add((r, c))
     ok = dfs(r+1, c, k+1) or dfs(r-1, c, k+1) or dfs(r, c+1, k+1) or dfs(r, c-1, k+1)
     visited.remove((r, c))
     return ok
  for r in range(rows):
     for c in range(cols):
       if dfs(r, c, 0):
          return True
  return False
```

```
if __name__ == "__main__":
  board = [['A','B','C','E'],['S','F','C','S'],['A','D','E','E']]
  print(exist(board, "ABCCED"))
  print(exist(board, "SEE"))
  print(exist(board, "ABCB"))
```

```
A lab8/code/search / master • X? >
python 1.py
True
True
False
```

Рисунок 1 – Скриншот работы кода

## Условие

Дан массив, отсортированный по возрастанию и повёрнутый на неизвестный сдвиг, и значение target. Найти индекс target за O(log n), иначе вернуть -1.

#### Решение

Модифицируем бинарный поиск: на каждом шаге одна половина упорядочена. Проверяем, лежит ли target в упорядоченной половине, и сужаем поиск соответствующим образом.

```
def search rotated(nums, target):
  1, r = 0, len(nums) - 1
  while 1 \le r:
    m = (1 + r) // 2
    if nums[m] == target:
       return m
    if nums[m] \ge nums[1]:
       if nums[l] <= target < nums[m]:
         r = m - 1
       else:
         1 = m + 1
     else:
       if nums[m] < target <= nums[r]:
         1 = m + 1
       else:
         r = m - 1
  return -1
if name == " main ":
  print(search rotated([4,5,6,7,0,1,2], 0))
  print(search rotated([4,5,6,7,0,1,2], 3))
```

Рисунок 2 – Скриншот работы кода

#### Условие

Дана матрица, где каждая строка отсортирована по возрастанию, а первый элемент строки строго больше последнего элемента предыдущей строки. Определить, содержит ли матрица target, за  $O(\log(m \cdot n))$ .

#### Решение

Сначала бинарным поиском находим строку, в диапазон которой попадает target, затем выполняем бинарный поиск по этой строке. Итого  $O(\log m + \log n)$ .

```
def search matrix(matrix, target):
  if not matrix or not matrix[0]:
     return False
  top, bot = 0, len(matrix) - 1
  while top <= bot:
     mid = (top + bot) // 2
     if matrix[mid][0] <= target <= matrix[mid][-1]:
       row = mid
       break
     if target < matrix[mid][0]:
       bot = mid - 1
     else:
       top = mid + 1
  else:
     return False
  1, r = 0, len(matrix[row]) - 1
  while 1 \le r:
     m = (1 + r) // 2
     if matrix[row][m] == target:
       return True
     if matrix[row][m] < target:
       1 = m + 1
```

```
else:
    r = m - 1

return False

if __name__ == "__main__":
    matrix = [[1,3,5,7],[10,11,16,20],[23,30,34,60]]

print(search_matrix(matrix, 3))

print(search_matrix(matrix, 13))
```

Рисунок 3 – Скриншот работы кода

## Хэширование

## Задача 1.

#### Условие

Реализовать кэш LRU с операциями get(key) и put(key, value) за O(1). При переполнении удаляется элемент, который дольше всех не использовался.

#### Решение

Используем хэш-таблицу для доступа по ключу и двусвязный список для поддержания порядка использования. Операции get/put перемещают узел в конец списка. При превышении вместимости удаляется головной узел.

```
class Node:
  def init (self, key, val):
    self.key = key
    self.val = val
    self.prev = None
    self.next = None
class LRUCache:
  def init (self, capacity: int):
     self.cap = capacity
    self.cache = {}
    self.left = Node(0, 0)
     self.right = Node(0, 0)
     self.left.next = self.right
     self.right.prev = self.left
  def remove(self, node):
    p, n = node.prev, node.next
    p.next = n
     n.prev = p
```

```
def insert(self, node):
     p, n = self.right.prev, self.right
     p.next = node
     node.prev = p
     node.next = n
     n.prev = node
  def get(self, key: int) -> int:
     if key not in self.cache:
       return -1
     node = self.cache[key]
     self.remove(node)
     self.insert(node)
     return node.val
  def put(self, key: int, value: int) -> None:
     if key in self.cache:
       self.remove(self.cache[key])
     node = Node(key, value)
     self.cache[key] = node
     self.insert(node)
     if len(self.cache) > self.cap:
       lru = self.left.next
       self.remove(lru)
       del self.cache[lru.key]
if __name__ == "__main__":
  lru = LRUCache(2)
  lru.put(1, 1)
  lru.put(2, 2)
```

```
print(lru.get(1))
lru.put(3, 3)
print(lru.get(2))
lru.put(4, 4)
print(lru.get(1))
print(lru.get(3))
print(lru.get(4))
```

```
A lab8/code/hash | master • X? >

python 1.py

1
-1
-1
3
4
```

Рисунок 1 – Скриншот работы кода

## Условие

Реализовать префиксное дерево с операциями insert(word), search(word), startsWith(prefix).

#### Решение

В каждой вершине хранится словарь переходов и флаг конца слова. Вставка и поиск выполняются по символам.

```
class TrieNode:
  def init (self):
    self.children = {}
    self.is_end = False
class Trie:
  def init (self):
    self.root = TrieNode()
  def insert(self, word):
    node = self.root
    for ch in word:
       if ch not in node.children:
         node.children[ch] = TrieNode()
       node = node.children[ch]
    node.is_end = True
  def search(self, word):
     node = self.root
     for ch in word:
       if ch not in node.children:
         return False
       node = node.children[ch]
```

```
return node.is_end
  def startsWith(self, prefix):
    node = self.root
    for ch in prefix:
      if ch not in node.children:
        return False
      node = node.children[ch]
    return True
if __name__ == "__main__":
  t = Trie()
  t.insert("apple")
  print(t.search("apple"))
  print(t.search("app"))
  print(t.startsWith("app"))
  t.insert("app")
  print(t.search("app"))
  ▲ lab8/code/hash / master ● *? >
  python 2.py
  True
 False
True
```

Рисунок 2 – Скриншот работы кода

## Условие

Спроектировать мини-Twitter: postTweet(userId, tweetId), getNewsFeed(userId) возвращает до 10 последних твитов пользователя и тех, на кого он подписан, follow/unfollow.

#### Решение

import heapq

Храним списки твитов на пользователя с убывающими временными метками и множество подписок. Ленту формируем с помощью кучи по меткам, извлекая до 10 самых новых.

class Twitter: def init (self): self.time = 0self.tweets = {} self.follows = {} def postTweet(self, userId, tweetId): self.time += 1if userId not in self.tweets: self.tweets[userId] = [] self.tweets[userId].append((-self.time, tweetId)) def getNewsFeed(self, userId): heap = []if userId in self.tweets: heap.extend(self.tweets[userId][-10:]) if userId in self.follows: for v in self.follows[userId]: if v in self.tweets:

```
heap.extend(self.tweets[v][-10:])
     heapq.heapify(heap)
    res = []
     while heap and len(res) < 10:
       res.append(heapq.heappop(heap)[1])
     return res
  def follow(self, followerId, followeeId):
     if followerId == followeeId:
       return
     if followerId not in self.follows:
       self.follows[followerId] = set()
     self.follows[followerId].add(followeeId)
  def unfollow(self, followerId, followeeId):
     if followerld in self.follows and followeeld in self.follows[followerld]:
       self.follows[followerId].remove(followeeId)
if name == " main ":
  tw = Twitter()
  tw.postTweet(1, 5)
  print(tw.getNewsFeed(1))
  tw.follow(1, 2)
  tw.postTweet(2, 6)
  print(tw.getNewsFeed(1))
  tw.unfollow(1, 2)
  print(tw.getNewsFeed(1))
```

Рисунок 3 – Скриншот работы кода

## Жадные алгоритмы

## Задача 1.

#### Условие

Даны цены на товар по дням. Можно совершать любые сделки покупки и продажи, но одновременно держать не более одной позиции. Найти максимальную прибыль.

#### Решение

Жадный принцип: суммируем все положительные приращения цен между соседними днями. Это эквивалентно разбиению на локальные минимумы и максимумы и даёт оптимум при множественных сделках.

```
def max_profit(prices):
    profit = 0
    for i in range(1, len(prices)):
        if prices[i] > prices[i-1]:
            profit += prices[i] - prices[i-1]
        return profit

if __name__ == "__main__":
    print(max_profit([7,1,5,3,6,4]))
    print(max_profit([1,2,3,4,5]))
    print(max_profit([7,6,4,3,1]))
```

```
A lab8/code/greedy / master • X? >

python 1.py

7

4
0
```

Рисунок 1 – Скриншот работы кода

## Условие

Заданы массивы gas и cost для кольцевого маршрута заправок. Нужно определить индекс заправки, с которой можно объехать круг, или -1, если это невозможно.

#### Решение

Если сумма gas меньше суммы cost, решения нет. Иначе идём по станциям, поддерживая текущий баланс; когда баланс падает ниже нуля, переносим старт на следующую станцию. В конце текущий старт — ответ.

```
def can_complete_circuit(gas, cost):
    if sum(gas) < sum(cost):
        return -1
    start = 0
    bal = 0
    for i in range(len(gas)):
        bal += gas[i] - cost[i]
        if bal < 0:
            start = i + 1
            bal = 0
        return start

if __name__ == "__main__":
    print(can_complete_circuit([1,2,3,4,5], [3,4,5,1,2]))
    print(can_complete_circuit([2,3,4], [3,4,3]))</pre>
```

Рисунок 2 – Скриншот работы кода

## Условие

Дан массив неотрицательных целых чисел. Требуется упорядочить их так, чтобы при конкатенации получить максимально возможное число. Вернуть результат строкой.

#### Решение

Жадный критерий сравнения: для двух строк а и b выбрать порядок по сравнению b+а и a+b. Сортируем по этому правилу и склеиваем. Если первый символ результата '0', ответ — '0'.

from functools import cmp to key

```
def largest_number(nums):
    arr = list(map(str, nums))
    def cmp(a, b):
        if a+b < b+a:
            return 1
        if a+b > b+a:
            return -1
        return 0
        arr.sort(key=cmp_to_key(cmp))
        res = ".join(arr)
        return '0' if res[0] == '0' else res

if __name__ == "__main__":
    print(largest_number([10, 2]))
    print(largest_number([3,30,34,5,9]))
    print(largest_number([0,0]))
```

Рисунок 3 – Скриншот работы кода

## Динамическое программирование

## Задача 1.

#### Условие

Дана строка s без пробелов и словарь wordDict. Нужно определить, можно ли разбить s на последовательность слов из словаря (слова можно использовать многократно).

#### Решение

Пусть dp[i] — истина, если префикс s[:i] разбивается на слова из словаря. Для каждого і перебираем слова w и проверяем dp[i-len(w)] и совпадение s[i-len(w):i] с w. Ответ dp[len(s)]. Сложность  $O(N\cdot M\cdot L)$ .

Рисунок 1 – Скриншот работы кода

## Условие

Задано число п. Скрытое число в диапазоне [1..п]. За неверную попытку к платим k монет. Нужно вычислить минимальную сумму монет, гарантирующую угадывание в худшем случае.

#### Решение

dp[i][j] — минимальная стоимость угадывания числа в [i..j]. Для опорной точки р стоимость равна р + max(dp[i][p-1], dp[p+1][j]). Берём минимум по р. Заполняем по длине отрезка. Сложность  $O(n^3)$ .

```
def min cost to win(n):
  dp = [[0] * (n + 2) \text{ for } in range(n + 2)]
  for length in range(2, n + 1):
     for i in range(1, n - length + 2):
       j = i + length - 1
       best = 10**9
       for p in range(i, j + 1):
          left = dp[i][p - 1] if p > i else 0
          right = dp[p + 1][j] if p < j else 0
          best = min(best, p + max(left, right))
        dp[i][j] = best
  return dp[1][n]
if name__ == "__main__":
  print(min cost to win(1))
  print(min cost to win(2))
  print(min cost to win(10))
```

```
A lab8/code/dp / master * *? >
python 2.py
0
1
16
```

# Рисунок 2 – Скриншот работы кода

## Условие

Даны бинарные строки strs и ограничения m по нулям и n по единицам. Найти максимальное число строк, которые можно выбрать, не превышая лимиты.

#### Решение

Классический 0/1-рюкзак по двум ресурсам. dp[i][j] — максимум строк при лимитах i нулей и j единиц. Для каждой строки с подсчитанными zeros и ones обновляем dp в обратном порядке. Сложность  $O(l \cdot m \cdot n)$ .

```
def find_max_form(strs, m, n):
    dp = [[0] * (n + 1) for _ in range(m + 1)]
    for s in strs:
        z = s.count('0')
        o = len(s) - z
        for i in range(m, z - 1, -1):
            for j in range(n, o - 1, -1):
                 dp[i][j] = max(dp[i][j], dp[i - z][j - o] + 1)
        return dp[m][n]

if __name__ == "__main__":
    print(find_max_form(["10","0001","111001","1","0"], 5, 3))
    print(find max_form(["10","0","1"], 1, 1))
```

Рисунок 3 – Скриншот работы кода

## Сложность алгоритмов

#### Задача 1.

#### Условие

Дан размер массива n и число запросов q. Требуется сравнить линейный поиск, бинарный поиск с предсортировкой и хеш-поиск с построением таблицы. Нужно определить, какой подход выгоднее при заданных n и q, учитывая затраты на подготовку.

#### Решение

Линейный поиск имеет O(n) на запрос без подготовки. Бинарный поиск требует сортировки  $O(n \log n)$ , после чего каждый запрос  $O(\log n)$ . Хеш-поиск требует построения O(n), далее O(1) в среднем на запрос. Сопоставляя суммы затрат, выбираем стратегию по q и n.

```
def choose_search_strategy(n, q):
    cost_linear = q * n
    cost_binary = n * (n.bit_length()) + q * (n.bit_length())
    cost_hash = n + q
    if cost_linear <= cost_binary and cost_linear <= cost_hash:
        return "linear"
    if cost_binary <= cost_hash:
        return "binary_search_with_sort"
    return "hash_table"

if __name__ == "__main__":
    print(choose_search_strategy(10**3, 1))
    print(choose_search_strategy(10**5, 100))
    print(choose_search_strategy(10**6, 10**6))</pre>
```

```
A lab8/code/comp / master @ X? >

python 1.py
linear
hash_table
hash_table
```

Рисунок 1 – Скриншот работы кода

#### Условие

Дан массив строк strs и число k. Требуется найти длину максимальной подстроки, которая встречается минимум в k различных строках. Сравнить наивный перебор и подход с бинарным поиском по длине и роллинг-хешем.

#### Решение

Наивный перебор генерирует все подстроки и считает в скольких строках каждая встречается. Оптимизированный подход бинарит по длине L и проверяет существование общей подстроки длины L через роллинг-хеш множества для каждой строки и пересечение множеств.

```
def longest_common_len_naive(strs, k):
  s0 = strs[0]
  best = 0
  for i in range(len(s0)):
     for j in range(i + 1, len(s0) + 1):
       sub = s0[i:j]
       cnt = 0
       for s in strs:
          if sub in s:
            cnt += 1
       if cnt \geq= k and j - i \geq best:
          best = j - i
  return best
def longest common len optimized(strs, k):
  import sys
  def has len(L):
     if L == 0:
       return True
     base = 911382323
     mod = 10**9 + 7
```

```
powL = pow(base, L - 1, mod)
  commons = None
  for s in strs:
     if L > len(s):
       return False
     h = 0
     st = set()
     for t in range(L):
       h = (h * base + ord(s[t])) \% mod
     st.add(h)
     for t in range(L, len(s)):
       h = (h - ord(s[t - L]) * powL) % mod
       h = (h * base + ord(s[t])) \% mod
       st.add(h)
     if commons is None:
       commons = st
     else:
       commons &= st
     if not commons:
       return False
  return len(commons) >= k
lo, hi = 0, min(len(s) for s in strs)
ans = 0
while lo <= hi:
  mid = (lo + hi) // 2
  if has_len(mid):
     ans = mid
    lo = mid + 1
  else:
     hi = mid - 1
return ans
```

```
if __name__ == "__main__":
    strs = ["abracadabra","cadabracad","dabrac"]
    print(longest_common_len_naive(strs, 2))
    print(longest_common_len_optimized(strs, 2))
```

Рисунок 2 – Скриншот работы кода

#### Условие

Для умножения двух матриц n×n выбрать алгоритм: классический, блочный или Штрассена. Нужно выдать рекомендацию по n c кратким обоснованием.

#### Решение

Классический  $O(n^3)$  прост и устойчив, практичен на малых n. Блочный сохраняет  $O(n^3)$ , но лучше использует кэш и выигрывает при средних размерах. Штрассена  $O(n^2.807)$  оправдан при больших n при наличии памяти.

```
def choose_mm_algorithm(n):
    if n <= 64:
        return "classical"
    if n <= 512:
        return "blocked"
    return "strassen"

if __name__ == "__main__":
    print(choose_mm_algorithm(64))
    print(choose_mm_algorithm(256))
    print(choose_mm_algorithm(1500))</pre>
```

```
A lab8/code/comp | master • x? >

python 3.py

classical

blocked

strassen
```

Рисунок 3 – Скриншот работы кода

## Заключение

В ходе лабораторной работы были разработаны задачи по ключевым темам алгоритмов, сформулированы условия, решения и приведены их реализации. Работа позволила закрепить навыки в области алгоритмов и структур данных, а также показала умение анализировать эффективность различных подходов.

## Список литературы

1. Aho A.V., Hopcroft J.E., Ullman J.D. Data Structures and Algorithms. – Addison-Wesley, 1983. – 427 р. [Электронный ресурс] – <a href="https://doc.lagout.org/Alfred%20V.%20Aho%20-">https://doc.lagout.org/Alfred%20V.%20Aho%20-</a> %20Data%20Structures%20and%20Algorithms.pdf (12.05.2025).