Математический анализ. Практика.

КР 1. Вариант 2.

1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$$

Решение:

Используем метод интегрирования по частям: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Пусть $u = \ln x$, $dv = x^{-\frac{1}{2}}dx$

Тогда $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx &= \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}\, dx \\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx \\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 2\cdot 2\sqrt{x} + C \\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C \\ &= 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C\end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$

---

2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8}\, dx$$

Решение:

Разложим знаменатель на множители: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4}$$

$x^2 - 6x + 8 = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)$

При $x = -2$: $4 + 12 + 8 = 24 = A(4 + 4 + 4) = 12A$, откуда $A = 2$

Приравнивая коэффициенты при x^2: $1 = A + B = 2 + B$, откуда $B = -1$

Приравнивая коэффициенты при x^0: $8 = 4A + 2C = 8 + 2C$, откуда $C = 0$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8}\, dx &= \int \frac{2}{x+2}\, dx + \int \frac{-x}{x^2 - 2x + 4}\, dx \\ &= 2\ln|x+2| - \int \frac{x}{x^2 - 2x + 4}\, dx\end{aligned}$$

Для второго интеграла используем замену $u = x^2 - 2x + 4$, $du = (2x - 2)dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-2x+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| + \int \frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C_1\end{aligned}$$

Ответ: $2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$

---

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^6 \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$$

Решение:

Используем замену $t = \sqrt{x+3}$, тогда $t^2 = x+3$, $x = t^2-3$, $dx = 2tdt$

При $x=1$: $t=\sqrt{4}=2$ При $x=6$: $t=\sqrt{9}=3$

$$\begin{aligned}\int_1^6 \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}} &= \int_2^3 \frac{2tdt}{2+t} \\ &= 2\int_2^3 \frac{t}{2+t}\,dt \\ &= 2\int_2^3 \frac{t+2-2}{2+t}\,dt \\ &= 2\int_2^3 \left(1-\frac{2}{2+t}\right)dt \\ &= 2[t-2\ln|2+t|]_2^3 \\ &= 2[(3-2\ln 5)-(2-2\ln 4)] \\ &= 2[1-2\ln 5+2\ln 4] \\ &= 2\left[1-2\ln\frac{5}{4}\right] \\ &= 2-4\ln\frac{5}{4}\end{aligned}$$

Ответ: $2-4\ln\frac{5}{4}$

---

4. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}\,dx$$

Решение:

Это несобственный интеграл первого рода. Особая точка $x=\frac{1}{3}$, где знаменатель обращается в ноль.

Используем замену $u = 3x - 1$, тогда $du = 3dx$, $dx = \frac{du}{3}$

При $x = \frac{1}{3}$: $u = 0$ При $x = 1$: $u = 2$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{\ln u}{u} \cdot \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{\ln u}{u}\, du$$

Для вычисления интеграла используем замену $v = \ln u$, $dv = \frac{du}{u}$:

$$\int \frac{\ln u}{u}\, du = \int v\, dv = \frac{v^2}{2} + C = \frac{(\ln u)^2}{2} + C$$

$$\frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{\ln u}{u}\, du = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(\ln u)^2}{2} \right]_{\varepsilon}^{2}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln \varepsilon)^2}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{(\ln 2)^2}{2} - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{(\ln \varepsilon)^2}{2} \right]$$

Поскольку $\lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln \varepsilon)^2 = +\infty$, интеграл расходится.

Ответ: Интеграл расходится

---

5. Вычислить длину кривой от $t_1 = 0$ до $t_2 = \sqrt{3}$:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$$

Решение:

Длина параметрически заданной кривой вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Найдем производные:

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - t^2$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}\ dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\ dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\ dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2+1)^2}\ dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} |t^2 + 1|\ \ dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} (t^2 + 1)\ dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3} + \sqrt{3} - 0 \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3} + \sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Ответ: $L = 2\sqrt{3}$

КР 1. Вариант 3.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = xe^{-3x}, \quad y = 0, \quad x = 1$$

Решение:

Площадь фигуры равна определенному интегралу:

$$S = \int_0^1 xe^{-3x}\ dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = x$, $dv = e^{-3x}dx$

Тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\begin{aligned}
\int xe^{-3x}\ dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\ dx \\
&= -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\ dx \\
&= -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + C \\
&= -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C \\
&= -\frac{1}{9}e^{-3x}(3x + 1) + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 xe^{-3x}\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{9}e^{-3x}(3x + 1)\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{9}e^{-3}(3 + 1) - \left(-\frac{1}{9}e^{0}(0 + 1)\right) \\
&= -\frac{4}{9}e^{-3} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9}(1 - 4e^{-3})
\end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{1}{9}(1 - 4e^{-3})$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 5 - 6t^3 \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}, \quad t \in [1, 2]$$

Решение:

Длина параметрически заданной кривой:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Найдем производные:

$$\frac{dx}{dt} = -18t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = t$$

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{(-18t^2)^2 + t^2}\ dt \\ &= \int_1^2 \sqrt{324t^4 + t^2}\ dt \\ &= \int_1^2 \sqrt{t^2(324t^2 + 1)}\ dt \\ &= \int_1^2 t\sqrt{324t^2 + 1}\ dt \end{aligned}$$

Используем замену $u = 324t^2 + 1$, тогда $du = 648t\ dt$, $t\ dt = \frac{du}{648}$

При $t = 1$: $u = 325$ При $t = 2$: $u = 324 \cdot 4 + 1 = 1297$

$$\begin{aligned} L &= \int_{325}^{1297} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{648}\ du \\ &= \frac{1}{648}\int_{325}^{1297} u^{\frac{1}{2}}\ du \\ &= \frac{1}{648}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{325}^{1297} \\ &= \frac{1}{972}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{325}^{1297} \\ &= \frac{1}{972}\left(1297^{\frac{3}{2}} - 325^{\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

$1297^{\frac{3}{2}} = 1297\sqrt{1297} = 1297 \cdot 36.014... \approx 46706$ $325^{\frac{3}{2}} = 325\sqrt{325} = 325 \cdot 18.028... \approx 5859$

Ответ: $L = \frac{1}{972}\left(1297^{\frac{3}{2}} - 325^{\frac{3}{2}}\right)$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

Решение:

Используем замену $u = \ln x$, тогда $du = \frac{dx}{x}$

При $x = 1$: $u = 0$ При $x \to +\infty$: $u \to +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2}$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b u^{-2}\, du$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-u^{-1}\right]_0^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{0}\right)\right)$$

Но интеграл имеет особенность в точке $u = 0$ (т.е. $x = 1$), поэтому:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{1+\varepsilon}^{b}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}$$

Поскольку $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(1+\varepsilon) = 0^+$, то $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} = +\infty$

Ответ: Интеграл расходится

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2}\, dx$$

Решение:

Оценим подынтегральную функцию. Поскольку $-1 \le \cos x \le 1$, то: $1 \le 2+\cos x \le 3$

Следовательно: $\frac{1}{x^2} \le \frac{2+\cos x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$

Исследуем сходимость мажорирующего интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}\, dx = 3\int_1^{+\infty} x^{-2}\, dx = 3\left[-x^{-1}\right]_1^{+\infty} = 3(0-(-1)) = 3$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}\, dx$ сходится.

По признаку сравнения, поскольку $0 < \frac{2+\cos x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}\, dx$ сходится, то исходный интеграл также сходится.

Ответ: Интеграл сходится

---

5. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5}$$

Решение:

Используем формулу для суммы четвертых степеней:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30n^5}$$
$$= \frac{1}{30} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{n^5}$$

Раскроем числитель:

$$n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right) = n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)$$
$$\approx n \cdot n \cdot 2n \cdot 3n^2 = 6n^5 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Более точно:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{n^5} = \frac{(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{n^4}$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\to 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5} = \frac{1}{30} \cdot 6 = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

---

6. Запишите номера всех верных формулировок определения интеграла Римана.
Пусть $\sigma_\tau(f,\xi)$ - интегральная сумма функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, отвечающая оснащенному разбиению (τ,ξ) отрезка $[a,b]$. Тогда интегралом Римана от функции f по отрезку $[a,b]$ называется такое число I, что:

а) $\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists (\tau,\xi) : \ \lambda(\tau) \to 0 \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| \geq \varepsilon$

б) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (\tau,\xi) : \ \lambda(\tau) \to 0 \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon$

в) $\forall (\tau^n,\xi^n) : \lambda(\tau^n) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sigma_{\tau^n}(f,\xi^n) \overset{n\to\infty}{\to} I$

г) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (\tau^n,\xi^n) : \ \lambda(\tau^n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$ и $|\sigma_{\tau^n}(f,\xi^n) - I| < \varepsilon$

д) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (\tau^n,\xi^n) : \ \lambda(\tau^n) < \varepsilon \Rightarrow \sigma_{\tau^n}(f,\xi^n) \overset{n\to\infty}{\to} I$

Решение:

Интеграл Римана от функции f по отрезку $[a,b]$ существует и равен I, если:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (\tau,\xi) \ \left(\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow |\sigma_{\tau(f,\xi)} - I| < \varepsilon\right)$

Проанализируем каждый вариант:

а) $\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists (\tau,\xi) : \ \lambda(\tau) \to 0 \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| \geq \varepsilon$

НЕВЕРНО - это отрицание определения сходимости.

б) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (\tau,\xi) : \ \lambda(\tau) \to 0 \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon$

НЕВЕРНО - запись некорректна ($\lambda(\tau) \to 0$ должно быть условием, а не следствием).

в) $\forall(\tau^n, \xi^n) : \lambda(\tau^n) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \overset{n\to\infty}{\to} I$

ВЕРНО - это секвенциальное определение интеграла Римана.

г) $\forall\varepsilon > 0\ \exists(\tau^n, \xi^n) :\ \lambda(\tau^n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$ и $|\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| < \varepsilon$

НЕВЕРНО - неполная формулировка.

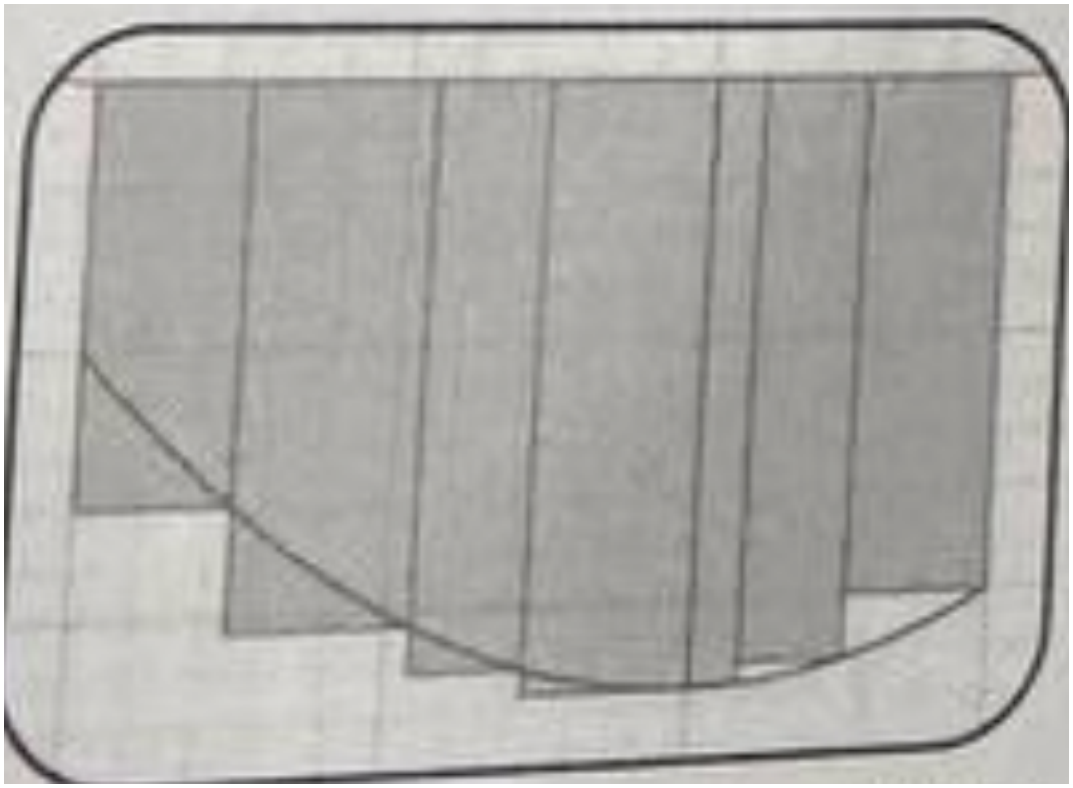
д) $\forall\varepsilon > 0\ \exists(\tau^n, \xi^n) :\ \lambda(\tau^n) < \varepsilon \Rightarrow \sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \overset{n\to\infty}{\to} I$

НЕВЕРНО - некорректная формулировка.

Ответ: в)

---

7. На рисунке изображены графики функции и некоторой суммы.



Запишите, какая сумма это может быть? В ответе можно указать несколько вариантов: интегральная сумма, верхняя сумма Дарбу, нижняя сумма Дарбу или никакая из них. Ответ обязательно прокомментируйте.

---

8. Приведите пример функции $f(x)$, которая определена на отрезке $[1, 2]$ и для которой ни одна из интегральных сумм не совпадает с верхней суммой Дарбу при соответствующем разбиении этого отрезка. Обязательно прокомментируйте, почему эта функция удовлетворяет данному условию.
Решение:

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально} \end{cases}$$

Комментарий:

Для любого разбиения отрезка $[1, 2]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$:

1. **Верхняя сумма Дарбу**: На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ есть как рациональные, так и иррациональные точки, поэтому $\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1$. Верхняя сумма Дарбу равна $(2 - 1) \cdot 1 = 1$.
2. **Интегральная сумма**: Для любого выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$:
   - Если ξ_i рационально, то $f(\xi_i) = 1$
   - Если ξ_i иррационально, то $f(\xi_i) = 0$

Поскольку в каждом интервале есть как рациональные, так и иррациональные числа, можно выбрать точки ξ_i так, что интегральная сумма будет меньше 1 (например, выбрав все ξ_i иррациональными, получим сумму 0).

Таким образом, интегральная сумма никогда не достигает значения верхней суммы Дарбу.

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально} \end{cases}$

КР 1. Вариант 4.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = (x-1)\ln(x-1), \quad y = 0, \quad x = e+1$$

Решение:

Функция $y = (x-1)ln(x-1)$ определена при $x > 1$. При $x = 2$: $y = 1c \cdot ln1 = 0$ При $x = e + 1$: $y = ec \cdot lne = e > 0$

Функция положительна на $(2, e+1)$, поэтому площадь равна:

$$S = \int_2^{e+1} (x-1)ln(x-1)\ dx$$

Используем замену $u = x - 1$, тогда $x = u + 1$, $dx = du$ При $x = 2$: $u = 1$ При $x = e + 1$: $u = e$

$$S = \int_1^e ulnu\ du$$

Применим интегрирование по частям: $v = u$, $dw = lnu\ du$ Тогда $dv = du$, $w = ulnu - u$ (интеграл от lnu)

$$\begin{aligned}\int ulnu\ du &= u(ulnu - u) - \int (ulnu - u)du \\ &= u^2 lnu - u^2 - \int ulnu\ du + \int u\ du \\ &= u^2 lnu - u^2 - \int ulnu\ du + \frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

Перенесем $\int u\ln u\ du$ влево:

$$2\int u\ln u\ du = u^2\ln u - u^2 + \frac{u^2}{2} = u^2\ln u - \frac{u^2}{2}$$

$$\int u\ln u\ du = \frac{u^2}{2}\ln u - \frac{u^2}{4} + C$$

$$\begin{aligned}S &= \left[\frac{u^2}{2}\ln u - \frac{u^2}{4}\right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - 0 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{e^2+1}{4}$

2. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = t^2 \cos t \\ y = t^2 \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

Решение:

Найдем производные:

$$\frac{dx}{dt} = 2t\cos t - t^2 \sin t = t(2\cos t - t\sin t)$$
$$\frac{dy}{dt} = 2t\sin t + t^2 \cos t = t(2\sin t + t\cos t)$$

Вычислим $(x')^2 + (y')^2$:

$$\begin{aligned}(x')^2 + (y')^2 &= t^2(2\cos t - t\sin t)^2 + t^2(2\sin t + t\cos t)^2 \\ &= t^2\left[(2\cos t - t\sin t)^2 + (2\sin t + t\cos t)^2\right] \\ &= t^2\left[4\cos^2 t - 4t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + 4\sin^2 t + 4t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t\right] \\ &= t^2\left[4(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\right] \\ &= t^2\left[4 + t^2\right] = t^2(4 + t^2)\end{aligned}$$

Длина дуги:

$$\begin{aligned}L &= \int_0^1 \sqrt{t^2(4+t^2)}\, dt \\ &= \int_0^1 t\sqrt{4+t^2}\, dt\end{aligned}$$

Используем замену $u = 4 + t^2$, тогда $du = 2t\ dt$, $t\ dt = \frac{du}{2}$ При $t = 0$: $u = 4$ При $t = 1$: $u = 5$

$$\begin{aligned}L &= \int_4^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}\, du \\ &= \frac{1}{2}\int_4^5 u^{\frac{1}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5 \\ &= \frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5 \\ &= \frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right)\end{aligned}$$

Ответ: $L = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right)$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3\ dx}{1 + x^8}$$

Решение:

Используем замену $u = x^4$, тогда $du = 4x^3 dx$, $x^3 dx = \frac{du}{4}$ При $x = 1$: $u = 1$ При $x \to +\infty$: $u \to +\infty$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x^3\ dx}{1+x^8} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\left(x^4\right)^2} \cdot x^3\ dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{4} \\ &= \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{4}[\arctan u]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan 1\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{16}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt{x}} dx$$

Решение:

Исследуем поведение подынтегральной функции в окрестности особой точки $x = 0$.

Используем разложение $e^t = 1 + t + O(t^2)$ при $t \to 0$.

При $x \to 0^+$ имеем $\sqrt[3]{x} \to 0$, поэтому:

$$e^{\sqrt[3]{x}} = 1 + \sqrt[3]{x} + O\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right) = 1 + x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

Следовательно:

$$e^{\sqrt[3]{x}} - 1 = x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

Подынтегральная функция ведет себя как:

$$\frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt{x}} \sim \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$$

Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 x^{-\frac{1}{6}} dx$:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{6}} dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left[x^{\frac{5}{6}}\right]_0^1 = \frac{6}{5}(1 - 0) = \frac{6}{5}$$

Поскольку показатель $-\frac{1}{6} > -1$, интеграл сходится.

Более строго, используем замену $u = \sqrt[3]{x}$, тогда $x = u^3$, $dx = 3u^2 du$, $\sqrt{x} = u^{\frac{3}{2}}$ При $x = 0$: $u = 0$ При $x = 1$: $u = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u^{\frac{3}{2}}} \cdot 3u^2 du \\ &= 3\int_0^1 \frac{(e^u - 1)u^2}{u^{\frac{3}{2}}} du \\ &= 3\int_0^1 (e^u - 1)u^{\frac{1}{2}} du\end{aligned}$$

Поскольку $e^u - 1 \sim u$ при $u \to 0$ и $u^{\frac{1}{2}} \cdot u = u^{\frac{3}{2}}$, подынтегральная функция ведет себя как $u^{\frac{3}{2}}$ в окрестности нуля, что интегрируемо.

Ответ: Интеграл сходится

---

5. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

Решение:

Данная сумма является интегральной суммой Римана для функции $f(x) = \sin(\pi x)$ на отрезке $[0, 1]$ с разбиением на n равных частей.

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \pi\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

где $\frac{1}{n} = \frac{1-0}{n}$ - длина каждого отрезка разбиения.

По определению интеграла Римана:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi x)dx$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(\pi x)dx &= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{\pi}[\cos(\pi) - \cos(0)] \\ &= -\frac{1}{\pi}[-1 - 1] \\ &= -\frac{1}{\pi}(-2) = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

Следовательно:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \pi \cdot \frac{2}{\pi} = 2$$

Ответ: 2

---

6. Запишите номера всех верных формулировок определения интеграла Римана.
Пусть $\sigma_\tau(f,\xi)$ - интегральная сумма функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, отвечающая оснащенному разбиению (τ,ξ) отрезка $[a,b]$. Тогда интегралом Римана от функции f по отрезку $[a,b]$ называется такое число I, что:

а) $\exists\varepsilon>0:\ \forall\delta>0$ и $\forall(\tau,\xi):\ \lambda(\tau)\to 0\Rightarrow|I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

б) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall(\tau,\xi):\ \lambda(\tau)\to 0\Rightarrow|I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

в) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \exists(\tau,\xi):\ \lambda(\tau)\to 0\Rightarrow|I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists(\tau^n,\xi^n):\lambda(\tau^n)\overset{n\to\infty}{\to}0$ и $|\sigma_{\tau^n}(f,\xi^n)-I|<\varepsilon$

д) $\forall(\tau^n,\xi^n):\ \lambda(\tau^n)\overset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow\sigma_{\tau^n}(f,\xi^n)\overset{n\to\infty}{\to}I$

Решение:

Интеграл Римана от функции f по отрезку $[a,b]$ существует и равен I, если:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall(\tau,\xi)\ \Big(\lambda(\tau)<\delta\Rightarrow|\sigma_{\tau(f,\xi)}-I|<\varepsilon\Big)$

Проанализируем каждый вариант:

а) $\exists\varepsilon>0:\ \forall\delta>0$ и $\forall(\tau,\xi):\ \lambda(\tau)\to 0\Rightarrow|I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

НЕВЕРНО - некорректная логическая структура: существует ε, для которого при любом δ условие выполняется.

б) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall(\tau,\xi):\ \lambda(\tau)\to 0\Rightarrow|I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

НЕВЕРНО - запись “$\lambda(\tau)\to 0$” должна быть условием “$\lambda(\tau)<\delta$”, а не следствием.

в) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \exists(\tau,\xi):\ \lambda(\tau)\to 0\Rightarrow|I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

НЕВЕРНО - должно быть “для всех” разбиений, а не “существует”.

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists(\tau^n,\xi^n):\lambda(\tau^n)\overset{n\to\infty}{\to}0$ и $|\sigma_{\tau^n}(f,\xi^n)-I|<\varepsilon$

НЕВЕРНО - неполная формулировка, отсутствует предельный переход.

д) $\forall(\tau^n,\xi^n):\ \lambda(\tau^n)\overset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow\sigma_{\tau^n}(f,\xi^n)\overset{n\to\infty}{\to}I$

ВЕРНО - это корректная секвенциальная формулировка определения интеграла Римана: для любой последовательности оснащенных разбиений с диаметром, стремящимся к нулю, соответствующие интегральные суммы стремятся к I.

Ответ: д)

КР 1. Вариант 5.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = \frac{x}{1+x^2}, \quad y = 0, \quad x = 4$$

Решение:

Фигура ограничена кривой $y = \frac{x}{1+x^2}$, осью x (т.е. $y = 0$) и прямой $x = 4$. Поскольку функция $y = \frac{x}{1+x^2}$ положительна при $x > 0$, площадь равна:

$$S = \int_0^4 \frac{x}{1+x^2} dx$$

Для вычисления интеграла используем замену $u = 1 + x^2$, тогда $du = 2xdx$, откуда $xdx = \frac{1}{2}du$.

При $x = 0$: $u = 1$ При $x = 4$: $u = 1 + 16 = 17$

$$S = \int_1^{17} \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2}\int_1^{17} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| \ |_1^{17} = \frac{1}{2}(\ln 17 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 17$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}\ln 17$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \ln\sin x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$$

Решение:

Длина дуги кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Найдем производную:

$$y' = \frac{d}{dx}\ln\sin x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Тогда:

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \cot^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \sqrt{\csc^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} |\csc x| \ dx$$

На интервале $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ функция $\sin x > 0$, поэтому $\csc x > 0$ и $|\csc x| = \csc x$.

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \csc x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$$

Интеграл от $\csc x$:

$$\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$L = -\ln|\csc x + \cot x| \; |_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}}$$

При $x = \frac{\pi}{3}$: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
При $x = \frac{2\pi}{3}$: $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$L = -\ln|\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}| + \ln|\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}| = \ln\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}) = \ln 3$$

Ответ: $L = \ln 3$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x \cdot 2^{-4x} \; dx$$

Решение:

Преобразуем интеграл:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot 2^{-4x} dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \left(2^{-4}\right)^x dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x dx$$

Обозначим $a = \frac{1}{16}$, тогда интеграл имеет вид:

$$\int_0^{+\infty} x a^x dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = x$, $dv = a^x dx$ Тогда $du = dx$, $v = \frac{a^x}{\ln a}$

$$\int_0^{+\infty} x a^x dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x a^x}{\ln a}\right]_0^t - \int_0^t \frac{a^x}{\ln a} dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{t a^t}{\ln a} - \frac{a^x}{(\ln a)^2}\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{t a^t}{\ln a} - \frac{a^t}{(\ln a)^2} + \frac{1}{(\ln a)^2}\right]$$

Поскольку $a = \frac{1}{16} < 1$, то $\ln a < 0$ и $\lim_{t\to+\infty} a^t = 0$, а также $\lim_{t\to+\infty} t a^t = 0$.

$$\int_0^{+\infty} x a^x dx = \frac{1}{(\ln a)^2}$$

Где $\ln a = \ln\frac{1}{16} = -\ln 16 = -4\ln 2$

$$\int_0^{+\infty} x \cdot 2^{-4x} dx = \frac{1}{(-4\ln 2)^2} = \frac{1}{16(\ln 2)^2}$$

Ответ: $\frac{1}{16(\ln 2)^2}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^6}\, dx$$

Решение:

Исследуем поведение подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

При $x \to +\infty$: $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$

Поэтому:

$$\frac{\arctan x}{1+x^6} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^6} \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

Исследуем интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-6} dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-5}}{-5}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{-1}{5t^5} + \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{5}$$

Поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6} dx$ сходится, и $\frac{\arctan x}{1+x^6} \sim \frac{C}{x^6}$ при $x \to +\infty$ (где $C = \frac{\pi}{2} > 0$), то по признаку сравнения в предельной форме исходный интеграл сходится.

Также отметим, что подынтегральная функция непрерывна на $[1, +\infty)$ и положительна, что подтверждает корректность применения признака сравнения.

Ответ: Интеграл сходится.

---

5. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

Решение:

Сделаем замену переменной в интеграле: $x = nt^2$, тогда $dx = 2ntdt$. При $x = 1$: $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$ При $x = n$: $t = 1$

$$\int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{nt^2}}\right) \cdot 2ntdt$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}t}\right) \cdot 2ntdt$$

$$= 2n \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}t}\right) dt$$

Тогда:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2\sqrt{n} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}t}\right) dt$$

При $n \to \infty$ и используя асимптотику $\ln(1+u) \sim u$ при $u \to 0$:

$$t \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}t}\right) \sim t \cdot \frac{1}{\sqrt{n}t} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Поэтому:

$$2\sqrt{n} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} \frac{1}{\sqrt{n}} dt = 2\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 2$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx = 2$

6. Запишите номера всех верных формулировок определения интеграла Римана.
Пусть $\sigma_\tau(f, \xi)$ - интегральная сумма функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, отвечающая оснащенному разбиению (τ, ξ) отрезка $[a, b]$. Тогда интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ называется такое число I, что:

а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) \to 0 \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f, \xi)| < \varepsilon$

б) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists (\tau, \xi) :\ \lambda(\tau) \to 0 \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f, \xi)| < \varepsilon$

в) $\forall \tau^n\ \exists \xi^n : \lambda(\tau^n) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \overset{n\to\infty}{\to} I$

г) $\forall (\tau^n, \xi^n) : \lambda(\tau^n) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \overset{n\to\infty}{\to} I$

д) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau^n : \forall \xi^n \Rightarrow \lambda(\tau^n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$ и $|\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| < \varepsilon$

Решение:

Правильное определение интеграла Римана в формулировке через ε-δ: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ $\forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f, \xi)| < \varepsilon$

Анализируем варианты:

а) Неверно, так как написано $\lambda(\tau) \to 0$, а должно быть $\lambda(\tau) < \delta$.

б) Неверно, так как неправильный порядок кванторов.

в) Неверно, поскольку не для всех разбиений существует подходящее оснащение.

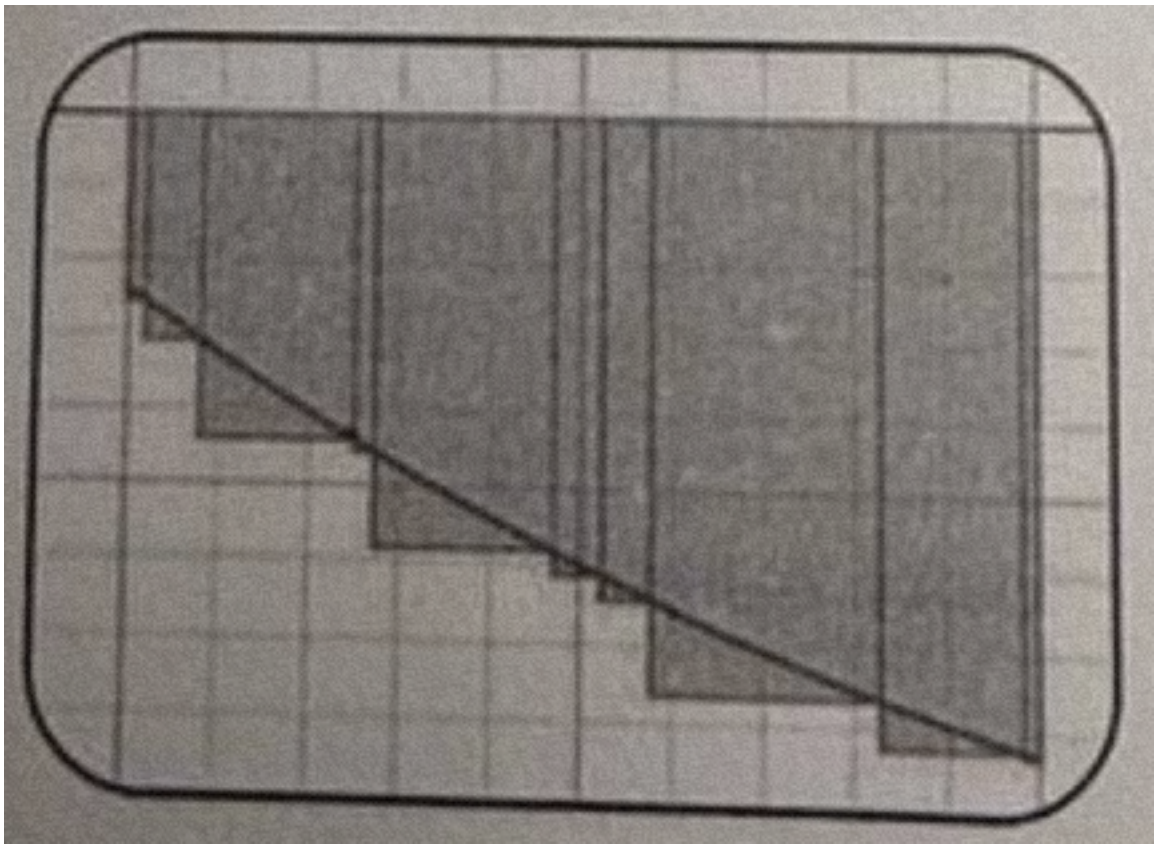
г) **Верно** - это корректная формулировка через последовательности: для любой последовательности оснащенных разбиений с диаметром, стремящимся к нулю, интегральные суммы стремятся к I.

д) Неверно, неправильная формулировка с кванторами.

Ответ: г

---

7. На рисунке изображены графики и некоторой суммы.



Запишите, какая сумма это может быть? В ответе можно указать несколько вариантов: интегральная сумма, верхняя сумма Дарбу, нижняя сумма Дарбу или никакая из них. Ответ обязательно прокомментируйте.

---

8. Приведите пример функции $f(x)$, определенной на отрезке $[2,3]$, но не интегрируемой на нем. Обязательно прокомментируйте, почему эта функция удовлетворяет данному условию.
Решение:

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \ \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } \ x \ \text{ иррационально} \end{cases}$$

Обоснование:

1. **Функция определена на $[2,3]$**: для любого $x \in [2,3]$ функция принимает значение 0 или 1 в зависимости от того, рационально ли x.
2. **Функция не интегрируема**:
   - Для любого разбиения отрезка $[2,3]$ на интервалы, каждый интервал содержит как рациональные, так и иррациональные числа (по свойству плотности множеств рациональных и иррациональных чисел).
   - Поэтому на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения: $\mathbf{\sup f(x) = 1}$ **(супремум достигается в рациональных точках)** $\inf f(x) = 0$ (инфимум достигается в иррациональных точках)
   - Верхняя сумма Дарбу: $\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 3 - 2 = 1$

- Нижняя сумма Дарбу: $\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0$

3. **Условие интегрируемости не выполнено**: поскольку $\overline{S} - \underline{S} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, функция не интегрируема по Риману.

Ответ: Функция Дирихле на отрезке $[2, 3]$ не интегрируема, поскольку разность верхней и нижней сумм Дарбу не стремится к нулю при измельчении разбиения.

КР 1. Вариант 9.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = \frac{x}{1+3x^2}, \quad y = 0, \quad x = 2$$

Решение:

Фигура ограничена кривой $y = \frac{x}{1+3x^2}$, осью x (т.е. $y = 0$) и прямой $x = 2$. Поскольку функция $y = \frac{x}{1+3x^2}$ положительна при $x > 0$, площадь равна:

$$S = \int_0^2 \frac{x}{1+3x^2} dx$$

Для вычисления интеграла используем замену $u = 1 + 3x^2$, тогда $du = 6xdx$, откуда $xdx = \frac{1}{6}du$.

При $x = 0$: $u = 1 + 3 \cdot 0^2 = 1$ При $x = 2$: $u = 1 + 3 \cdot 4 = 13$

$$S = \int_1^{13} \frac{1}{6u} du = \frac{1}{6} \int_1^{13} \frac{du}{u} = \frac{1}{6} \ln|u| \; |_1^{13} = \frac{1}{6}(\ln 13 - \ln 1) = \frac{1}{6} \ln 13$$

Ответ: $S = \frac{1}{6} \ln 13$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$x = \ln \cos y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$$

Решение:

Для параметрически заданной кривой $x = x(y)$ длина дуги вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Найдем производную:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \ln \cos y = \frac{1}{\cos y} \cdot (-\sin y) = -\frac{\sin y}{\cos y} = -\tan y$$

Тогда:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + (-\tan y)^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \tan^2 y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sec^2 y} dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sec y| \; dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec y dy$$

(поскольку на интервале $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ функция $\cos y > 0$, то $\sec y > 0$)

Интеграл от $\sec y$:

$$\int \sec y dy = \ln|\sec y + \tan y| + C$$

$$L = \ln|\sec y + \tan y| \; |_0^{\frac{\pi}{3}}$$

При $y = 0$: $\sec 0 = 1$, $\tan 0 = 0$, поэтому $\sec 0 + \tan 0 = 1$

При $y = \frac{\pi}{3}$: $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ Поэтому $\sec \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3} = 2 + \sqrt{3}$

$$L = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) - \ln(1) = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

Ответ: $L = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-3x} \; dx$$

Решение:

Используем интегрирование по частям: $u = x$, $dv = e^{-3x}dx$ Тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[x \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\right]_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t}{3}e^{-3t} + 0\right] + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-3x}dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t}{3}e^{-3t}\right] + \frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t}{3}e^{-3t}\right] + \frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}\right]$$

Поскольку $\lim_{t\to+\infty} te^{-3t} = 0$ (экспонента убывает быстрее любой степени), получаем:

$$= 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Ответ: $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-3x} \; dx = \frac{1}{9}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x + \sin x}{x^3 + 1} \; dx$$

Решение:

Разложим подынтегральную функцию на две части:

$$\frac{2x + \sin x}{x^3 + 1} = \frac{2x}{x^3 + 1} + \frac{\sin x}{x^3 + 1}$$

Исследуем каждую часть отдельно.

Первая часть: $\frac{2x}{x^3+1}$

При $x \to +\infty$: $\frac{2x}{x^3+1} \sim \frac{2x}{x^3} = \frac{2}{x^2}$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ сходится, поэтому $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^3+1}dx$ сходится.

Вторая часть: $\frac{\sin x}{x^3+1}$

Поскольку $|\sin x| \leq 1$ для всех x, имеем:

$$|\frac{\sin x}{x^3+1}| \leq \frac{1}{x^3+1}$$

При $x \to +\infty$: $\frac{1}{x^3+1} \sim \frac{1}{x^3}$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ сходится, поэтому по признаку сравнения интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3+1} dx$ абсолютно сходится.

Заключение: Поскольку оба интеграла сходятся, исходный интеграл сходится как сумма сходящихся интегралов.

Альтернативное решение через оценку всей функции: При $x \to +\infty$:

$$\frac{2x + \sin x}{x^3+1} \leq \frac{2x+1}{x^3+1} \leq \frac{3x}{x^3} = \frac{3}{x^2}$$

Поскольку $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится, то исходный интеграл сходится по признаку сравнения.

Ответ: Интеграл сходится.

КР 2. Вариант ?.

1. Посчитать сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n\sqrt{n+2}}$$

Решение:

Данный ряд можно разложить на сумму двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n\sqrt{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n+2}}$$

Первый ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n+2}}$

При $n \to \infty$: $\frac{2}{n\sqrt{n+2}} \sim \frac{2}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится (p-ряд с $p = \frac{3}{2} > 1$), первый ряд сходится.

Второй ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n+2}}$

Поскольку $|\sin n| \leq 1$, имеем:

$$\left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n+2}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n+2}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

По признаку сравнения второй ряд абсолютно сходится.

Вычисление точной суммы невозможно в элементарных функциях из-за наличия $\sin n$ с иррациональными аргументами.

Ответ: Ряд сходится, но точная сумма не выражается в элементарных функциях.

---

2. Посчитать сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+5}{n+5}$$

Решение:

Исследуем поведение общего члена ряда при $n \to \infty$:

$$a_n = \frac{n!+5}{n+5}$$

При больших n: $n! \gg 5$ и $n+5 \sim n$, поэтому:

$$a_n \sim \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Поскольку $(n-1)! \to +\infty$ при $n \to \infty$, общий член ряда не стремится к нулю.

По **необходимому условию сходимости ряда**: если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Поскольку $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!+5}{n+5} = +\infty \neq 0$, ряд расходится.

Ответ: Ряд расходится (не выполняется необходимое условие сходимости).

---

3. Посчитать сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$$

Решение:

Это знакочередующийся ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, где $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$.

Проверим условия признака Лейбница:

1) $b_n > 0$ для всех $n \geq 1$ ✓

2) Последовательность b_n убывает: $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ убывает при $n \to \infty$ ✓

3) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} = 0$ ✓

По признаку Лейбница ряд сходится условно.

Вычисление точной суммы:

Данный ряд не является стандартным рядом, для которого известна точная сумма.

Можно получить приближенное значение, используя несколько первых членов:

$$S \approx -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{18}} - \ldots$$

Ответ: Ряд сходится условно по признаку Лейбница, точная сумма не выражается в элементарных функциях.

---

4. Посчитать сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{(n+1)\ln^2 n}$$

Решение:

Примечание: Ряд определен начиная с $n = 2$, поскольку $\ln 1 = 0$ и знаменатель обращается в ноль при $n = 1$.

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{(n+1)\ln^2 n}$$

Исследование сходимости:

Поскольку $|\cos n| \leq 1$, имеем:

$$\left|\frac{\cos n}{(n+1)\ln^2 n}\right| \leq \frac{1}{(n+1)\ln^2 n}$$

При $n \to \infty$: $\frac{1}{(n+1)\ln^2 n} \sim \frac{1}{n\ln^2 n}$

По **интегральному признаку** исследуем интеграл:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$$

Используем замену $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Интеграл сходится, следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2 n}$ сходится.

По признаку сравнения исходный ряд **абсолютно сходится**.

Точная сумма не выражается в элементарных функциях из-за наличия $\cos n$.

Ответ: Ряд сходится абсолютно (начиная с $n = 2$), точная сумма не выражается в элементарных функциях.

---

5. Посчитать сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n}$$

Решение:

Преобразуем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{e^n}$$

Поскольку $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, получаем:

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{e^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{e}\right)^n$$

Это геометрический ряд со знаменателем $q = -\frac{1}{e}$.

Поскольку $|q| = \frac{1}{e} < 1$, ряд сходится и его сумма равна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

где $q = -\frac{1}{e}$.

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{e}\right)^n = -\frac{-\frac{1}{e}}{1-\left(-\frac{1}{e}\right)} = -\frac{-\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{\frac{1}{e}}{\frac{e+1}{e}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{e}{e+1} = \frac{1}{e+1}$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} = \frac{1}{e+1}$

КР 1. Вариант ?.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = xe^{-2x}, \quad y = 0, \quad x = 2$$

Решение:

Фигура ограничена кривой $y = xe^{-2x}$, осью x (т.е. $y = 0$) и прямой $x = 2$. Поскольку функция $y = xe^{-2x}$ положительна при $x > 0$, площадь равна:

$$S = \int_0^2 xe^{-2x} dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = x$, $dv = e^{-2x}dx$ Тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$S = \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2x} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{2}e^{-4} - 0\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2$$

$$= -e^{-4} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= -e^{-4} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= -e^{-4} - \frac{1}{4}e^{-4} + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{5}{4}e^{-4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-4})$$

Ответ: $S = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-4})$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \ln \sin x, \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Решение:

Длина дуги кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Найдем производную:

$$y' = \frac{d}{dx} \ln \sin x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Тогда:

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \cot^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \sqrt{\csc^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} |\csc x| \ dx$$

На интервале $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ функция $\sin x > 0$, поэтому $\csc x > 0$ и $|\csc x| = \csc x$.

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \csc x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$$

Интеграл от $\csc x$:

$$\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$L = -\ln|\csc x + \cot x| \ |_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}}$$

При $x = \frac{\pi}{3}$: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\csc \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
При $x = \frac{2\pi}{3}$: $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\csc \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$L = -\ln|\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}| + \ln|\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}|$$

$$= -\ln|\frac{1}{\sqrt{3}}| + \ln|\frac{3}{\sqrt{3}}| = -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{3} = \ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{3} = 2\ln\sqrt{3} = \ln 3$$

Ответ: $L = \ln 3$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{1} x \cdot e^{2x} \ dx$$

Решение:

Этот несобственный интеграл имеет особенность при $x \to -\infty$:

$$\int_{-\infty}^{1} xe^{2x} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{1} xe^{2x} dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = x$, $dv = e^{2x} dx$ Тогда $du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int xe^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}(2x - 1) + C$$

Теперь вычисляем несобственный интеграл:

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{1} xe^{2x} dx = \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{e^{2x}}{4}(2x - 1)\right]_{a}^{1}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{e^2}{4}(2 - 1) - \frac{e^{2a}}{4}(2a - 1)\right]$$

$$= \frac{e^2}{4} - \lim_{a \to -\infty} \frac{e^{2a}}{4}(2a-1)$$

При $a \to -\infty$: $e^{2a} \to 0$ быстрее, чем $(2a-1) \to -\infty$, поэтому:

$$\lim_{a \to -\infty} e^{2a}(2a-1) = 0$$

Следовательно:

$$\int_{-\infty}^{1} xe^{2x}dx = \frac{e^2}{4}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{1} x \cdot e^{2x}\ dx = \frac{e^2}{4}$

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\ dx$$

Решение:

Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода с особенностью в точке $x = 0$:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$$

Исследование поведения подынтегральной функции при $x \to 0^+$:

Используем разложение $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ при $x \to 0$:

$$\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6x^{\frac{3}{2}}} + O\left(x^{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{6} + O(x^2)$$

При $x \to 0^+$ главный член асимптотики: $\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

Исследование сходимости:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 x^{\frac{-1}{2}}dx$$

Это интеграл вида $\int_0^1 x^{-p}dx$ с $p = \frac{1}{2} < 1$.

По признаку сходимости таких интегралов: интеграл сходится, если $p < 1$.

Поскольку $p = \frac{1}{2} < 1$, интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ сходится.

Вычисление:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 - 0 = 2$$

По признаку сравнения в предельной форме: поскольку

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ сходится, то исходный интеграл тоже сходится.

Ответ: Интеграл сходится.

КР 1. Вариант 12.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = \cos x \sin^3 x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Решение:

Функция $y = \cos x \sin^3 x$ определена на интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$, так как при $x = \frac{\pi}{2}$ получаем $y = 0$.

На интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция неотрицательна, поэтому площадь вычисляется как:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x \ dx$$

Используем замену переменной: пусть $u = \sin x$, тогда $du = \cos x \ dx$.

При $x = 0$: $u = \sin 0 = 0$ При $x = \frac{\pi}{2}$: $u = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$S = \int_0^1 u^3 \ du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $S = \frac{1}{4}$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 5$$

Решение:

Длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \ dx$$

Найдем производную:

$$y' = \frac{d}{dx}[\ln(x^2 - 1)] = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Вычислим $(y')^2$:

$$(y')^2 = \left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)^2 = \frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Найдем подкоренное выражение:

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Тогда:

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Длина дуги:

$$L = \int_2^5 \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int_2^5 \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)dx$$

Для вычисления $\int \frac{2}{x^2-1}dx$ используем разложение на простые дроби:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$L = \int_2^5 \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[x + \ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_2^5$$

$$L = \left[x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^5 = \left(5 + \ln\frac{4}{6}\right) - \left(2 + \ln\frac{1}{3}\right) = 3 + \ln\frac{4}{6} - \ln\frac{1}{3} = 3 + \ln\frac{4\cdot 3}{6\cdot 1} = 3 + \ln 2$$

Ответ: $L = 3 + \ln 2$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4}\,dx$$

Решение:

Используем интегрирование по частям. Пусть:

$$u = \ln x, \quad dv = \frac{1}{x^4}dx = x^{-4}dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3}$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln x}{x^4}dx = uv - \int v\,du = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{3x^3}\right) - \int \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{\ln x}{3x^3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^4}dx = -\frac{\ln x}{3x^3} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3x^3}\right) = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}$$

$$= -\frac{3\ln x + 1}{9x^3}$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{3\ln x+1}{9x^3}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{3\ln t+1}{9t^3} - \left(-\frac{3\ln 1+1}{9\cdot 1^3}\right)\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{3\ln t+1}{9t^3}\right) + \frac{1}{9}$$

При $t \to +\infty$: $\frac{3\ln t+1}{9t^3} \to 0$ (степенная функция растет быстрее логарифмической)

Ответ: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4}dx = \frac{1}{9}$

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin^5 x}{(3+x^2)x^{\frac{11}{2}}}\,dx$$

Решение:

Данный интеграл является несобственным интегралом 2-го рода, так как подынтегральная функция имеет особенность при $x=0$ (знаменатель содержит $x^{\frac{11}{2}}$).

Исследуем поведение подынтегральной функции при $x \to 0^+$:

$$f(x) = \frac{\sin^5 x}{(3+x^2)x^{\frac{11}{2}}}$$

При $x \to 0^+$:
- $\sin^5 x \sim x^5$ (используем эквивалентность $\sin x \sim x$ при $x \to 0$)
- $3 + x^2 \to 3$
- $x^{\frac{11}{2}} = x^{\frac{11}{2}}$

Поэтому:

$$f(x) \sim \frac{x^5}{3 \cdot x^{\frac{11}{2}}} = \frac{x^5}{3x^{\frac{11}{2}}} = \frac{1}{3x^{\frac{11}{2}-5}} = \frac{1}{3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 - 0 = 2$$

Поскольку интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ сходится, и наша функция $f(x)$ ведет себя как $\frac{1}{3\sqrt{x}}$ при $x \to 0^+$, то по предельному признаку сравнения данный интеграл сходится.

Ответ: Интеграл сходится.

КР 1. Варианты 1 - 4.

1. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Ответ: $-\operatorname{ctg} x + C$

---

2. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{5 + x^2}$$

Решение: Приводим к стандартному виду:

$$\int \frac{dx}{5 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

---

3. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5}$$

Решение: Разложим на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^2 - 5} = \frac{1}{\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)} = \frac{A}{x - \sqrt{5}} + \frac{B}{x + \sqrt{5}}$$

Решая систему, получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C$

---

4. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{9 - x^2}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{9 - x^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3 + x}{3 - x} \right| + C$$

Ответ: $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{3 + x}{3 - x} \right| + C$

---

5. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Ответ: $\operatorname{tg} x + C$

---

6. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{6 + x^2}$$

Решение: Приводим к стандартному виду:

$$\int \frac{dx}{6 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{6}} + C$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{6}} + C$

---

7. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{6}} + C$$

Ответ: $\arcsin \frac{x}{\sqrt{6}} + C$

---

8. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C$$

Ответ: $\arcsin \frac{x}{4} + C$

---

9. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int 0 \, dx$$

Решение: Интеграл от нуля равен константе:

$$\int 0 \, dx = C$$

Ответ: C

---

10. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+7}$$

Решение: Приводим к стандартному виду:

$$\int \frac{dx}{x^2+7} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C$

---

11. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-7}$$

Решение: Аналогично заданию 3:

$$\int \frac{dx}{x^2-7} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}| + C$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}| + C$

---

12. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \ln|x + \sqrt{x^2+16}| + C$$

Ответ: $\ln|x + \sqrt{x^2+16}| + C$

---

13. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int 4^x \ dx$$

Решение: Используем формулу для интеграла от показательной функции:

$$\int 4^x \ dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

Ответ: $\frac{4^x}{\ln 4} + C$

---

14. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-8}$$

Решение: Аналогично предыдущим:

$$\int \frac{dx}{x^2-8} = \frac{1}{2\sqrt{8}} \ln|\frac{x-\sqrt{8}}{x+\sqrt{8}}| + C$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{8}} \ln|\frac{x-\sqrt{8}}{x+\sqrt{8}}| + C$

---

15. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}} = \ln|x + \sqrt{x^2-8}| + C$$

Ответ: $\ln|x + \sqrt{x^2-8}| + C$

---

16. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

Решение: Используем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C$$

Ответ: $\ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C$

КР 2. Вариант 1.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$ Разложим на простейшие дроби: $\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$

Частичная сумма: $S_N = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+3}\right)$

Предел при $N \to \infty$: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Ответ: $\frac{5}{6}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

Решение: Используем асимптотическую эквивалентность: $\sin(x) \sim x$ при $x \to 0$

Таким образом: $\sin\left(\frac{1}{n^2+n}\right) \sim \frac{1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n^2}$

Ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (p=2>1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n3^n}}| = |x-2\frac{|}{3} < 1 \Rightarrow x \in (-1,5)$

Граничные точки:
1. x=-1: $\sum \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится условно
2. x=5: $\sum \frac{3^n}{n3^n} = \sum \frac{1}{n}$ - расходится

Ответ:
- Абсолютная сходимость: $(-1,5)$
- Условная сходимость: $\{-1\}$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{4-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.

Решение: Преобразуем: $\frac{1}{4-x} = \frac{1}{2-(x-2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$

Область сходимости: $|\frac{x-2}{2}| < 1 \Rightarrow x \in (0,4)$

Ответ: Ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(0,4)$

---

5. Найти предел $f(x)$ данной функциональной последовательности $f_{n(x)}$ при $n \to \infty$ и выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах.

$$f_{n(x)} = \frac{2n + x}{n + x^2}, \quad E_1 = [0, 5], \quad E_2 = \mathbb{R}$$

Решение: Поточечный предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+x}{n+x^2} = 2$

1. На $E_1 = [0, 5]$:

$\sup|\frac{2n+x}{n+x^2} - 2| = \sup|\texttt{frac}\{x - 2x^2, n + x^2)| \leq \texttt{frac}\{25 + 10\}\{n\} \to 0$ Сходимость равномерная

2. На $E_2 = \mathbb{R}$:

При $x = \sqrt{n}$: $\texttt{frac}\{2n + \sqrt{n}\}\{n + n\} \to 1 \neq 2$ Сходимость неравномерная

Ответ: Предел: $f(x) = 2$ На E_1 - равномерная, на E_2 - неравномерная

---

6. Приведите пример числового ряда, чья частичная сумма $S_{n(x)}$ не имеет предела в $\overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$.

Решение: Пример: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ Частичные суммы: 1, 0, 1, 0, ... не имеют предела.

Ответ: Ряд $\sum (-1)^n$ не имеет предела частичных сумм

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *поточечной* сходимости функциональной последовательности $f_n : D \to \mathbb{R}$ к функции f на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим.

$$x \in D \ \exists \varepsilon > 0 : \ \forall n_0 \ \exists n > n_0 : |f_{n(x)} - f(x)| \geq \varepsilon$$

Решение: Нет, это отрицание поточечной сходимости. Правильное определение:

$$\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Ответ: Нет, это условие расходимости. Для сходимости требуется $\forall \varepsilon$

---

8. Пусть ряд Тейлора по степеням $(x - 3)$ некоторой функции f сходится на отрезке $[0, 6]$. Из данных множеств выберите наибольшее, на котором ряд сходится *непременно к функции* $f(x)$. Обоснуйте ваш выбор.

$$\emptyset \ \{3\} \ [1, 5] \ (0, 6) \ [0, 6]$$

Решение: Ряд сходится к функции внутри интервала сходимости (0,6). На границах x=0 и x=6 сходимость к f(x) не гарантирована.

Ответ: $(0, 6)$ - наибольшее открытое множество внутри [0,6]

КР 2. Вариант 2.

1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+6n+8}$$

Решение:

Разложим знаменатель на множители: $n^2+6n+8=(n+2)(n+4)$

Используем метод частичных дробей: $\frac{2}{(n+2)(n+4)}=\frac{A}{n+2}+\frac{B}{n+4}$

$2=A(n+4)+B(n+2)$

При $n=-2$: $2=2A$, откуда $A=1$ При $n=-4$: $2=-2B$, откуда $B=-1$

Таким образом: $\frac{2}{n^2+6n+8}=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}$

Тогда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+6n+8}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$

Рассмотрим частичную сумму: $S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+4}\right)$

Это телескопический ряд: $S_N=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}$

$\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+6n+8}=\frac{7}{12}$

---

2. Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{n^3+2n}\right)$$

Решение:

При больших n имеем $\frac{1}{n^3+2n}\to 0$, поэтому можем использовать асимптотику $\tan(x)\sim x$ при $x\to 0$.

Для $n\geq 1$ (при $n=0$ первый член равен $\tan(0)=0$): $\tan\left(\frac{1}{n^3+2n}\right)\sim\frac{1}{n^3+2n}$ при $n\to\infty$

Поскольку $n^3+2n>n^3$ для $n\geq 1$, то: $\frac{1}{n^3+2n}<\frac{1}{n^3}$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится (это ряд Дирихле с показателем $p=3>1$).

Более точно, при $n\geq 1$: $n^3\leq n^3+2n\leq 3n^3$ (для достаточно больших n)

Следовательно: $\frac{1}{3n^3}\leq\frac{1}{n^3+2n}\leq\frac{1}{n^3}$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходятся, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2n}$ сходится.

Используя предельный признак сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n^3+2n}\right)}{\frac{1}{n^3}}=$
$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3+2n}\cdot n^3}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+2n}=1$

Поскольку предел конечен и положителен, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится, то исходный ряд также сходится.

Ответ: Ряд сходится.

---

4. Разложить в окрестностях $x_0 = -3,\ f(x) = \frac{1}{5+x}$
Решение:

Нужно разложить функцию $f(x) = \frac{1}{5+x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -3$.

Сделаем замену переменной: $t = x - (-3) = x + 3$, тогда $x = t - 3$.

$f(x) = \frac{1}{5+x} = \frac{1}{5+(t-3)} = \frac{1}{2+t}$

Теперь разложим $g(t) = \frac{1}{2+t}$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$:

$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^n$

где использована формула геометрической прогрессии $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n$ при $|u| < 1$.

Таким образом: $\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^{n+1}}$

Возвращаясь к переменной x: $t = x + 3$

$f(x) = \frac{1}{5+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}$

Область сходимости: $|\frac{x+3}{2}| < 1$, то есть $|x + 3| < 2$ или $-5 < x < -1$.

Ответ: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}$, область сходимости: $x \in (-5, -1)$.

КР 2. Вариант ?.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+15n+54}$$

Решение:

Разложим знаменатель на множители: $n^2+15n+54=(n+6)(n+9)$

Применим метод частичных дробей: $\frac{1}{(n+6)(n+9)}=\frac{A}{n+6}+\frac{B}{n+9}$

$1=A(n+9)+B(n+6)$

При $n=-6$: $1=3A$, откуда $A=\frac{1}{3}$ При $n=-9$: $1=-3B$, откуда $B=-\frac{1}{3}$

Получаем: $\frac{1}{n^2+15n+54}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+9}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+9}\right)$

Тогда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+15n+54}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+9}\right)$

Это телескопический ряд. Найдем частичную сумму: $S_N=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+9}\right)$

$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right)+...+\left(\frac{1}{N+6}-\frac{1}{N+9}\right)\right]$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{N+7}-\frac{1}{N+8}-\frac{1}{N+9}\right]$

При $N\to\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+15n+54}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{72+63+56}{504}=\frac{191}{1512}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Решение:

Используем асимптотическое разложение косинуса при малых аргументах: $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-...$

При $x=\frac{1}{n^2}$: $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{24n^8}-...$

Следовательно: $1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2n^4}-\frac{1}{24n^8}+...$

При больших n главный член: $1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n^4}$

Применим предельный признак сравнения с рядом $\sum\frac{1}{n^4}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{2n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{1}=1$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится (р-ряд с $p=4>1$), то по предельному признаку сравнения исходный ряд также сходится.

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n\cdot 2^n}$$

Решение:

Это степенной ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-7)^n$, где $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$.

Найдем радиус сходимости по формуле Коши-Адамара:

$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n}}}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 2}$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, получаем: $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Интервал сходимости: $|x-7| < 2$, т.е. $5 < x < 9$.

Исследуем концы интервала:

При $x = 5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится условно (знакочередующийся гармонический ряд).

При $x = 9$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится (гармонический ряд).

Для абсолютной сходимости рассматриваем $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(x-7)^n}{n\cdot 2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-7|^n}{n\cdot 2^n}$.

Этот ряд сходится при $|x-7| < 2$ и расходится при $|x-7| \geq 2$.

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $(5, 9)$
- Множество условной сходимости: $\{5\}$
- Область сходимости: $[5, 9)$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{3x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение:

Сначала вычислим $f(-1) = \frac{1}{3(-1)+2} = \frac{1}{-1} = -1$.

Преобразуем функцию: $f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{3(x+1)-1} = \frac{1}{-1+3(x+1)} = \frac{-1}{1-3(x+1)}$

Пусть $t = x + 1$, тогда $f(x) = \frac{-1}{1-3t}$.

Используем разложение $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ при $|u| < 1$:

$\frac{-1}{1-3t} = -\sum_{n=0}^{\infty} (3t)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n$

Подставляя $t = x + 1$: $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n$

Это и есть ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = -1$.

Для сходимости необходимо $|3(x+1)| < 1$, откуда $|x+1| < \frac{1}{3}$.

Ответ: $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n$

Область сходимости: $|x+1| < \frac{1}{3}$, т.е. $x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

---

5. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на данных множествах.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n^2 + x^2}, \quad D_1 = [0, 10], \quad D_2 = (0, +\infty).$$

Решение:

Пусть $u_{n(x)} = \sin \frac{x^2}{n^2+x^2}$.

Исследование на множестве $D_1 = [0, 10]$:

Для исследования равномерной сходимости найдем $\sup_{x\in[0,10]}|u_{n(x)}|$.

Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{x^2}{n^2+x^2}$ на отрезке $[0,10]$.

$g'(x)=\frac{2x(n^2+x^2)-x^2\cdot 2x}{(n^2+x^2)^2}=\frac{2xn^2}{(n^2+x^2)^2}\geq 0$

Функция $g(x)$ возрастает на $[0,10]$, поэтому:
- $\min_{x\in[0,10]} g(x)=g(0)=0$
- $\max_{x\in[0,10]} g(x)=g(10)=\frac{100}{n^2+100}$

Поскольку $\sin t$ возрастает на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $g(10)=\frac{100}{n^2+100}<1<\frac{\pi}{2}$ при всех $n\geq 1$:

$\sup_{x\in[0,10]}|u_{n(x)}|=\sin\left(\frac{100}{n^2+100}\right)$

При больших n: $\sin\left(\frac{100}{n^2+100}\right)\approx\frac{100}{n^2+100}\approx\frac{100}{n^2}$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{n^2}$ сходится (р-ряд с $p=2>1$), то по признаку Вейерштрасса функциональный ряд сходится равномерно на $D_1=[0,10]$.

Исследование на множестве $D_2=(0,+\infty)$:

Для любого n рассмотрим поведение $u_{n(x)}$ при $x\to+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} u_{n(x)}=\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{x^2}{n^2+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{\frac{n^2}{x^2}+1}\right)=\sin(1)$

Это означает, что для каждого фиксированного n функция $u_{n(x)}\to\sin(1)\neq 0$ при $x\to+\infty$.

Рассмотрим частичные суммы ряда: $S_{N(x)}=\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{x^2}{n^2+x^2}\right)$

При $x\to+\infty$: $S_{N(x)}\to\sum_{n=1}^{N}\sin(1)=N\sin(1)$

Поскольку $N\sin(1)\to+\infty$ при $N\to+\infty$, ряд расходится в каждой точке при $x\to+\infty$.

Однако для конечных значений x ряд может сходиться. Проверим сходимость в точках:

Для фиксированного $x>0$: $u_{n(x)}=\sin\left(\frac{x^2}{n^2+x^2}\right)\approx\frac{x^2}{n^2+x^2}\approx\frac{x^2}{n^2}$ при больших n

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится для любого конечного x.

Но равномерной сходимости нет, поскольку: $\sup_{x\in(0,+\infty)}|u_{n(x)}|=1$ для всех n

И ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1$ расходится.

Ответ:
- На множестве $D_1=[0,10]$ ряд сходится равномерно
- На множестве $D_2=(0,+\infty)$ ряд не сходится равномерно

КР 2. Вариант 6.

1. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+8n+15}$$

Решение:

Разложим знаменатель на множители: $n^2+8n+15=(n+3)(n+5)$

Представим дробь в виде суммы простейших:

$$\frac{4}{(n+3)(n+5)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+5}$$

Решая систему уравнений, находим $A=2$, $B=-2$

Таким образом, ряд можно переписать как:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n+3} - \frac{2}{n+5}\right]$$

Запишем частичную сумму:

$$S_N = 2\left[\sum_{k=4}^{N+3} \frac{1}{k} - \sum_{k=6}^{N+5} \frac{1}{k}\right] = 2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{5} - \frac{1}{N+4} - \frac{1}{N+5}\right]$$

При $N \to \infty$ получаем:

$$S = 2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = 2\left(\frac{9}{20}\right) = \frac{9}{10}$$

Ответ: $\frac{9}{10}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Решение:

Используем предельный признак сравнения. Сравним с рядом $\sum \frac{1}{n^2}$, который сходится.

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Так как предел конечен и положителен, а ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный ряд также сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)\cdot 6^n}$$

Решение:

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{(x+2)^n}{(n+1)6^n}|} = |x+2\frac{|}{6} < 1 \Rightarrow |x+2| < 6$$

Интервал сходимости: $-6 < x+2 < 6 \Rightarrow -8 < x < 4$

Исследуем граничные точки:
1. При $x = -8$: ряд $\sum \frac{(-6)^n}{(n+1)6^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ - сходится условно
2. При $x = 4$: ряд $\sum \frac{6^n}{(n+1)6^n} = \sum \frac{1}{n+1}$ - расходится

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $(-8, 4)$
- Множество условной сходимости: $x = -8$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{6-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 4$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение:

Преобразуем функцию:

$$\frac{1}{6-x} = \frac{1}{2-(x-4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-4}{2}}$$

Используем формулу суммы геометрического ряда:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, |t| < 1$$

Таким образом:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-4}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2^{n+1}}$$

Область сходимости:

$$|\frac{x-4}{2}| < 1 \Rightarrow |x-4| < 2 \Rightarrow 2 < x < 6$$

Ответ: Ряд Тейлора: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(2, 6)$

---

5. Найти предел $f(x)$ данной функциональной последовательности $f_{n(x)}$ при $n \to \infty$ выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах.

$$f_{n(x)} = \frac{n^2x^2+2}{n^3x^3+3}, \quad E_1 = (0, +\infty), \quad E_2 = [2, 3]$$

Решение:

Найдем поточечный предел:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^2+2}{n^3x^3+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{n}+\frac{2}{n^3}}{x^3+\frac{3}{n^3}} = 0$$

Исследуем равномерную сходимость:

1. На $E_1 = (0, +\infty)$:

Найдем супремум отклонения:

$$\sup_{x \in (0,\infty)} |f_{n(x)} - f(x)| = \sup_{x>0} \frac{n^2x^2 + 2}{n^3x^3 + 3}$$

При $x = n^{-\frac{1}{2}}$:

$$f_{n(x)} = \frac{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + 2}{n^3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} + 3} \to \frac{1 + 2}{\infty + 3} = 0$$

Но при малых x значение может быть сколь угодно большим, поэтому супремум не стремится к 0. Сходимость неравномерная.

2. На $E_2 = [2, 3]$:

Оценим отклонение:

$$|f_{n(x)}| \leq \frac{n^2 \cdot 9 + 2}{n^3 \cdot 8 + 3} \to 0$$

Так как оценка равномерна по $x \in [2, 3]$, сходимость равномерная.

Ответ:
- Предельная функция: $f(x) = 0$
- На E_1 сходимость неравномерная
- На E_2 сходимость равномерная

КР 2. Вариант 5.

1. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$$

Решение:

Разложим знаменатель на множители: $n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}$$

Решая систему уравнений, находим $A=1$, $B=-1$

Таким образом, ряд можно переписать как:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\Big]$$

Запишем частичную сумму:

$$S_N = \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{N+3} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{N+3}$$

При $N \to \infty$ получаем:

$$S = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{n^2+5n}\Big)$$

Решение:

Используем эквивалентность $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$:

$$\ln\Big(1+\frac{1}{n^2+5n}\Big) \sim \frac{1}{n^2+5n} \sim \frac{1}{n^2}$$

Ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический с $p=2$), поэтому по признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n-4^n}$$

Решение:

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{(x-1)^n}{n-4^n}|} = |x-1\frac{|}{4} < 1 \Rightarrow |x-1| < 4$$

Интервал сходимости: $-4 < x-1 < 4 \Rightarrow -3 < x < 5$

Исследуем граничные точки:
1. При $x = -3$: ряд $\sum \frac{(-4)^n}{n-4^n}$ - расходится (общий член не стремится к 0)
2. При $x = 5$: ряд $\sum \frac{4^n}{n-4^n}$ - расходится (общий член стремится к –1)

Для абсолютной сходимости исследуем ряд из модулей:

$$\sum|\frac{(x-1)^n}{n-4^n}| = \sum|x-1\frac{|^n}{|}n-4^n|$$

При $|x-1| < 4$ ряд сходится абсолютно, так как мажорируется сходящейся геометрической прогрессией.

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $(-3, 5)$
- Множество условной сходимости: $\emptyset$ (нет условной сходимости)

---

4. Разложите в ряд Тейлора

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}$$

Решение:

Представим функцию в виде:

$$\frac{1}{3x+1} = \frac{1}{1-(-3x)}$$

Используем формулу суммы геометрического ряда:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, |t| < 1$$

Таким образом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n$$

Область сходимости:

$$|-3x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Ответ: Ряд Тейлора: $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n$ Область сходимости: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

КР 2. Вариант 4.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+3n+2}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ Разложим дробь: $\frac{3}{(n+1)(n+2)} = 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

Частичная сумма: $S_N = 3\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right)\right] = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right)$

Предел при $N \to \infty$: $S = 3 * \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$$

Решение: Используем эквивалентность $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$: $e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$

Ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (p-ряд с p=2), поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 \cdot 4^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)^2 4^{n+1}}}{\frac{(x+3)^n}{n^2 4^n}}| = |x+3\frac{|}{4} < 1 \Rightarrow |x+3| < 4$

Интервал сходимости: $-4 < x+3 < 4 \Rightarrow -7 < x < 1$

Граничные точки:
1. При x=-7: $\sum \frac{(-4)^n}{n^2 4^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ - сходится абсолютно
2. При x=1: $\sum \frac{4^n}{n^2 4^n} = \sum \frac{1}{n^2}$ - сходится абсолютно

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $[-7, 1]$
- Множество условной сходимости: $\emptyset$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x-1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.

Решение: Преобразуем функцию: $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2+(x-3)} = \frac{1}{2} * \frac{1}{1+\frac{x-3}{2}}$

Используем геометрический ряд: $\frac{1}{1+t} = \sum_0^{\infty} (-t)^n$ при $|t| < 1$

Получаем: $f(x) = \frac{1}{2}\sum_0^{\infty} \left(-\frac{x-3}{2}\right)^n = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^{n+1}}$

Область сходимости: $|\frac{x-3}{2}| < 1 \Rightarrow |x-3| < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$

Ответ: Ряд: $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(1, 5)$

---

5. Найти предел $f(x)$ данной функциональной последовательности $f_{n(x)}$ при $n \to \infty$ выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах.

$$f_{n(x)} = \frac{n^2x^2+1}{n^2+x^2}, \quad E_1 = (-\infty, +\infty), \quad E_2 = [0,1]$$

Решение: Поточечный предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2+1}{n^2+x^2} = x^2$

Исследуем равномерную сходимость:
1. На $E_1 = \mathbb{R}$:

$\sup|f_{n(x)} - f(x)| = \sup|\frac{1-x^4}{n^2+x^2}|$ При x=n: $\frac{1-n^4}{n^2+n^2} \to \infty \Rightarrow$ сходимость неравномерная

2. На $E_2 = [0,1]$:

$\sup_{x\in[0,1]}|\frac{1-x^4}{n^2+x^2}| \leq \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow$ сходимость равномерная

Ответ: Предел: $f(x) = x^2$ На E_1 сходимость неравномерная, на E_2 - равномерная

---

6. Приведите пример числового ряда, у которого остаток $R_{n(x)} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Обоснуйте ответ.
Решение: Пример: $\sum_1^\infty 1$ (гармонический ряд) Остаток $R_n = \sum_{n+1}^\infty 1 = \infty$ не стремится к 0 при n⟶∞, так как ряд расходится.

Ответ: Гармонический ряд $\sum_1^\infty 1$

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *поточечной* сходимости функциоональной последовательности $f_n : D \to \mathbb{R}$ кк функции f на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n > n_0\ \exists x \in D \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Решение: Данное условие неверно. Правильное определение поточечной сходимости:

$$\forall x \in D\ \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0 \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Или в кванторах:

$$\forall x \in D\ \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0 \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Ответ: Нет, правильная формулировка требует, чтобы n_0 зависело от x и ε, а не существовало одного n_0 для всех x.

КР 2. Вариант ?.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+10n+24}$$

Решение: Разложим знаменатель на множители: $n^2+10n+24=(n+4)(n+6)$

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{1}{(n+4)(n+6)}=\frac{A}{n+4}+\frac{B}{n+6}$$

Решая систему уравнений: $1=A(n+6)+B(n+4)$ При $n=-4$: $1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$ При $n=-6$: $1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

Таким образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{2}}{n+4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+6}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+6}\right]$$

Вычислим частичную сумму:

$$S_N=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+6}\right)\right]$$

При $N \to \infty$:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6+5}{30}\right)=\frac{11}{60}$$

Ответ: $\frac{11}{60}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$$

Решение: Умножим и разделим на сопряженное:

$$\sqrt{n^4+1}-n^2=\frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Ряд $\sum \frac{1}{2n^2}$ сходится (p-ряд с p=2), поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множество абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+4)^{n+1}}{(2n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x+4)^n}{(2n-1)3^n}}\right|=|x+4|\frac{}{3}<1 \Rightarrow |x+4|<3$$

Интервал сходимости: $-3 < x + 4 < 3 \Rightarrow -7 < x < -1$

Исследуем граничные точки:
1. При $x = -7$: $\sum \frac{(-3)^n}{(2n-1)3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$ - сходится условно (по признаку Лейбница)
2. При $x = -1$: $\sum \frac{3^n}{(2n-1)3^n} = \sum \frac{1}{2n-1}$ - расходится (гармонический ряд)

Для абсолютной сходимости: При $-7 < x < -1$ ряд сходится абсолютно, так как мажорируется сходящейся геометрической прогрессией.

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $(-7, -1)$
- Множество условной сходимости: $\{-7\}$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{7-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 5$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.

Решение: Преобразуем функцию:

$$\frac{1}{7-x} = \frac{1}{2-(x-5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-5}{2}}$$

Используем формулу суммы геометрического ряда:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, |t| < 1$$

Таким образом:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-5}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{n+1}}$$

Область сходимости:

$$|\frac{x-5}{2}| < 1 \Rightarrow |x-5| < 2 \Rightarrow 3 < x < 7$$

Ответ: Ряд Тейлора: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(3, 7)$

КР 2. Вариант ?.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+8n+15}$$

Решение: Разложим знаменатель на множители: $n^2+8n+15=(n+3)(n+5)$

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{4}{(n+3)(n+5)}=\frac{A}{n+3}+\frac{B}{n+5}$$

Решая систему уравнений: $4=A(n+5)+B(n+3)$ При $n=-3$: $4=2A \Rightarrow A=2$ При $n=-5$: $4=-2B \Rightarrow B=-2$

Таким образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{2}{n+3}-\frac{2}{n+5}\Big]=2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+5}\Big]$$

Вычислим частичную сумму:

$$S_N=2\Big[\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\Big)+\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\Big)+...+\Big(\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+5}\Big)\Big]$$

При $N \to \infty$:

$$S=2\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\Big)=2\Big(\frac{9}{20}\Big)=\frac{9}{10}$$

Ответ: $\frac{9}{10}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$$

Решение: Используем асимптотическую эквивалентность: $1-\cos\big(\frac{1}{n}\big) \sim \frac{1}{2n^2}$ при $n \to \infty$

Ряд $\sum \frac{1}{2n^2}$ сходится (p-ряд с p=2 > 1), поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)\cdot 6^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+2)6^{n+1}}}{\frac{(x+2)^n}{(n+1)6^n}}\Big|=|x+2\frac{|}{6}<1 \Rightarrow |x+2|<6$$

Интервал сходимости: $-6<x+2<6 \Rightarrow -8<x<4$

Исследуем граничные точки:
1. При $x = -8$: $\sum \frac{(-6)^n}{(n+1)6^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ - сходится условно (по признаку Лейбница)
2. При $x = 4$: $\sum \frac{6^n}{(n+1)6^n} = \sum \frac{1}{n+1}$ - расходится (гармонический ряд)

Для абсолютной сходимости: При $-8 < x < 4$ ряд сходится абсолютно, так как мажорируется сходящейся геометрической прогрессией.

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $(-8, 4)$
- Множество условной сходимости: $\{-8\}$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{6-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 4$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем функцию:

$$\frac{1}{6-x} = \frac{1}{2-(x-4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-4}{2}}$$

Используем формулу суммы геометрического ряда:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, |t| < 1$$

Таким образом:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-4}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^{n+1}}$$

Область сходимости:

$$|\frac{x-4}{2}| < 1 \Rightarrow |x-4| < 2 \Rightarrow 2 < x < 6$$

Ответ: Ряд Тейлора: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(2, 6)$

КР 2. Вариант 9.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+11n+28}$$

Решение: Разложим знаменатель на множители: $n^2+11n+28=(n+4)(n+7)$

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{2}{(n+4)(n+7)}=\frac{A}{n+4}+\frac{B}{n+7}$$

Решая систему уравнений: $2=A(n+7)+B(n+4)$ При $n=-4$: $2=3A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$ При $n=-7$: $2=-3B \Rightarrow B=-\frac{2}{3}$

Таким образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{2}{3}}{n+4}-\frac{\frac{2}{3}}{n+7}\right]=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+7}\right]$$

Вычислим частичную сумму:

$$S_N=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+7}\right)\right]$$

При $N \to \infty$:

$$S=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{42+35+30}{210}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{107}{210}\right)=\frac{107}{315}$$

Ответ: $\frac{107}{315}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$$

Решение: Используем асимптотическую эквивалентность: $\tan(x) \sim x$ при $x \to 0$

Таким образом:

$$\tan\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^2\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

Ряд $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ сходится (p-ряд с p=5/2 > 1), поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{n3^n}}| = |x-5\frac{|}{3} < 1 \Rightarrow |x-5| < 3$$

Интервал сходимости: $-3 < x-5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$

Исследуем граничные точки:
1. При $x = 2$: $\sum \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится условно (по признаку Лейбница)
2. При $x = 8$: $\sum \frac{3^n}{n3^n} = \sum \frac{1}{n}$ - расходится (гармонический ряд)

Для абсолютной сходимости: При $2 < x < 8$ ряд сходится абсолютно, так как мажорируется сходящейся геометрической прогрессией.

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $(2, 8)$
- Множество условной сходимости: $\{2\}$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем функцию:

$$\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{3+2(x-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2(x-2)}{3}}$$

Используем формулу суммы геометрического ряда:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n, |t| < 1$$

Таким образом:

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(x-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n (x-2)^n}{3^{n+1}}$$

Область сходимости:

$$|\frac{2(x-2)}{3}| < 1 \Rightarrow |x-2| < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

Ответ: Ряд Тейлора: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n (x-2)^n}{3^{n+1}}$ Область сходимости: $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

---

5. Найти предел $f(x)$ данной функциональной последовательности $f_{n(x)}$ при $n \to \infty$ и выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах.

$$f_{n(x)} = \frac{n^2x^2+2}{n^3x^3+3}, \quad E_1 = (0, +\infty), \quad E_2 = [2, 3].$$

Решение: Поточечный предел:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^2+2}{n^3x^3+3} = 0$$

Исследуем равномерную сходимость:
1. На $E_1 = (0, +\infty)$:

$\sup|f_{n(x)}| = \sup \frac{n^2x^2+2}{n^3x^3+3}$ При $x = \frac{1}{n}$: $\frac{n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+2}{n^3\left(\frac{1}{n}\right)^3+3} = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4} \nrightarrow 0$ Сходимость неравномерная

2. На $E_2 = [2, 3]$:

$\sup|f_{n(x)}| \leq \frac{n^2 9+2}{n^3 8+3} \to 0$ Сходимость равномерная

Ответ: Предел: $f(x) = 0$ На E_1 сходимость неравномерная, на E_2 - равномерная

---

6. Приведите пример сходящегося числового ряда, для которого радикальный признак Коши не дает утвердительного ответа (о его поведении в смысле сходимости). Обоснуйте ответ.

Решение: Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2^n}$ При нечетных n: $\sqrt[n]{a_n} = 0$ При четных n: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ Предел $\lim \sqrt[n]{a_n}$ не существует, но ряд сходится по признаку сравнения.

Ответ: Ряд $\sum \frac{1+(-1)^n}{2^n}$ сходится, но радикальный признак Коши неприменим.

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *поточечной* сходимости функционального ряда с частичными суммами $S_{n(x)}$ к сумме $S(x)$ на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \exists x \in D \Rightarrow |S_{n(x)} - S(x)| < \varepsilon$$

Решение: Данное условие неверно. Правильное определение поточечной сходимости:

$$\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |S_{n(x)} - S(x)| < \varepsilon$$

Или в кванторах:

$$\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |S_{n(x)} - S(x)| < \varepsilon$$

Ответ: Нет, правильная формулировка требует, чтобы n_0 зависело от x и ε, а не существовало одного n_0 для всех x.

КР 2. Вариант 8.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+10n+24}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+10n+24=(n+4)(n+6)$ Разложим на простейшие дроби: $\frac{1}{(n+4)(n+6)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+6}\right)$

Частичная сумма: $S_N=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+6}\right)\right]$

Предел при $N\to\infty$: $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{11}{60}$

Ответ: $\frac{11}{60}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$$

Решение: Умножим и разделим на сопряженное: $\sqrt{n^4+1}-n^2=\frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2}\sim\frac{1}{2n^2}$

Ряд $\sum\frac{1}{2n^2}$ сходится (p=2>1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(x+4)^{n+1}}{(2n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x+4)^n}{(2n-1)3^n}}|=|x+4\frac{|}{3}<1\Rightarrow x\in(-7,-1)$

Граничные точки:
1. x=-7: $\sum\frac{(-3)^n}{(2n-1)3^n}=\sum\frac{(-1)^n}{2n-1}$ - сходится условно
2. x=-1: $\sum\frac{3^n}{(2n-1)3^n}=\sum\frac{1}{2n-1}$ - расходится

Ответ:
- Абсолютная сходимость: $(-7,-1)$
- Условная сходимость: $\{-7\}$

---

4. Разложите функцию $f(x)=\frac{1}{7-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=5$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем: $\frac{1}{7-x}=\frac{1}{2-(x-5)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-5}{2}\right)^n$

Область сходимости: $|\frac{x-5}{2}|<1\Rightarrow x\in(3,7)$

Ответ: Ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(3,7)$

---

5. Найти предел $f(x)$ данной функциональной последовательности $f_{n(x)}$ при $n\to\infty$ и выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданных множествах.

$$f_{n(x)}=\sin\frac{nx}{n^2x^2+1},\quad E_1=[1,3],\quad E_2=\mathbb{R}.$$

Решение: Предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{nx}{n^2x^2+1} = \sin 0 = 0$

Равномерная сходимость:
1. На $E_1 = [1, 3]$:

$\sup|\sin \frac{nx}{n^2x^2+1}| \leq \sup \frac{nx}{n^2x^2+1} \leq \frac{3n}{n^2+1} \to 0$ Сходимость равномерная

2. На $E_2 = \mathbb{R}$:

При $x = \frac{1}{n}$: $f_{n(\frac{1}{n})} = \sin \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to \sin 1 \neq 0$ Сходимость неравномерная

Ответ: Предел: $f(x) = 0$ На E_1 - равномерная, на E_2 - неравномерная

---

6. Приведите пример сходящегося числового ряда, для которого признак Даламбера не дает утвердительного ответа (о его поведении в смысле сходимости). Обоснуйте ответ.
Решение: Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ Отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ колеблется между 3/2 и 1/6, предел не существует. Но ряд сходится по признаку сравнения с $\sum \frac{3}{2^n}$.

Ответ: $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ - сходится, но признак Даламбера неприменим

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *поточечной* сходимости функционального ряда с частичными суммами $S_{n(x)}$ к сумме $S(x)$ на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n > n_0\ \forall x \in D \Rightarrow |S_{n(x)} - S(x)| < \varepsilon$$

Решение: Данное условие описывает равномерную сходимость. Для поточечной сходимости правильная формулировка:

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) :\ \forall n > n_0 \Rightarrow |S_{n(x)} - S(x)| < \varepsilon$$

Ответ: Нет, это условие равномерной сходимости. Для поточечной сходимости n_0 должно зависеть от x.

---

8. Пусть дан степенной ряд с центром в $x_0 = 4$ и радиусом сходимости $R = 3$. Из данных множеств выберите наибольшее, на котором ряд сходится точно *равномерно*. Обоснуйте ваш выбор.

$$\emptyset\ \{4\}\ [3, 5]\ (1, 7)\ [1, 7]$$

Решение: Степенной ряд равномерно сходится на любом компакте внутри интервала сходимости $(1, 7)$. Наибольшее компактное подмножество - $[1, 7]$.

Ответ: $[1, 7]$ - наибольшее компактное множество в интервале сходимости

КР 2. Вариант 12.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+14n+48}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+14n+48=(n+6)(n+8)$ Разложим на простейшие дроби: $\frac{3}{(n+6)(n+8)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+8}\right)$

Частичная сумма: $S_N=\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+...+\left(\frac{1}{N+6}-\frac{1}{N+8}\right)\right]$

Предел при $N\to\infty$: $S=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{15}{56}\right)=\frac{45}{112}$

Ответ: $\frac{45}{112}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Решение: Используем асимптотические разложения: $\cos\left(\frac{1}{n}\right)\approx 1-\frac{1}{2n^2}$ $\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\approx -\frac{1}{2n^2}$

Ряд $\sum -\frac{1}{2n^2}$ сходится абсолютно (p=2>1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{(n+2)\cdot 5^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+6)^{n+1}}{(n+3)5^{n+1}}}{\frac{(x+6)^n}{(n+2)5^n}}\right|=|x+6\frac{|}{5}<1\Rightarrow x\in(-11,-1)$

Граничные точки:
1. x=-11: $\sum\frac{(-5)^n}{(n+2)5^n}=\sum\frac{(-1)^n}{n+2}$ - сходится условно
2. x=-1: $\sum\frac{5^n}{(n+2)5^n}=\sum\frac{1}{n+2}$ - расходится

Ответ:
- Абсолютная сходимость: $(-11,-1)$
- Условная сходимость: $\{-11\}$

---

4. Разложите функцию $f(x)=\frac{1}{x-4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=6$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем: $\frac{1}{x-4}=\frac{1}{2+(x-6)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-6}{2}\right)^n$

Область сходимости: $|\frac{x-6}{2}|<1\Rightarrow x\in(4,8)$

Ответ: Ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-6)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(4,8)$

---

5. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на данных множествах.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^2}{n^2+x^2}, \quad D_1 = [0, +\infty), \quad D_2 = [0, 5].$$

Решение: Поточечный предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{n^2+x^2} = 0$

1. На $D_1 = [0, \infty)$:

При $x = n$: $\frac{2n^3}{n^2+n^2} = n \nrightarrow 0$ Сходимость неравномерная

2. На $D_2 = [0, 5]$:

$\sup|\frac{2nx^2}{n^2+x^2}| \leq \frac{50n}{n^2} = \frac{50}{n} \to 0$ Сходимость равномерная

Ответ: На D_1 - неравномерная, на D_2 - равномерная

---

6. Приведите пример сходящегося числового ряда, сходимость которого легко показать при помощи интегрального признака Коши. Обоснуйте ответ.
Решение: Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ непрерывна, положительна и убывает на $[1, \infty)$. Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ сходится, значит ряд сходится.

Ответ: $\sum \frac{1}{n^2}$ - сходимость доказывается интегральным признаком

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *равномерной* сходимости функциональной последовательности $f_n : D \to \mathbb{R}$ к функции f на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \exists x \in D \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Решение: Нет, правильное определение:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \forall x \in D \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Квантор существования по x должен быть заменен на квантор всеобщности.

Ответ: Нет, правильная формулировка требует $\forall x \in D$

---

8. Пусть дан степенной ряд с центром в $x_0 = -5$ и радиусом сходимости $R = 2$. И пусть при $x = x_0 - R$ ряд сходится. Из данных множеств выберите наибольшее, на котором ряд сходится точно *равномерно*. Обоснуйте ваш выбор.

$$\emptyset \ \{-5\} \ [-4, 4] \ [-7, -4] \ (-7, -3) \ [-7, -3]$$

Решение: Интервал сходимости: $(-7, -3)$ При $x = -7$ ряд сходится по условию.
Наибольшее замкнутое подмножество - $[-7, -3]$, где ряд сходится равномерно.

Ответ: $[-7, -3]$ - наибольшее компактное множество, содержащее точку сходимости

КР 2. Вариант 11.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+13n+42}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+13n+42=(n+6)(n+7)$ Разложим на простейшие дроби: $\frac{2}{(n+6)(n+7)}=2\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+7}\right)$

Частичная сумма: $S_N=2\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{N+6}-\frac{1}{N+7}\right)\right]$

Предел при $N\to\infty$: $S=2\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n^2+3n}\right)$$

Решение: Используем асимптотическую эквивалентность: $\arcsin(x)\sim x$ при $x\to 0$

Таким образом: $\arcsin\left(\frac{1}{n^2+3n}\right)\sim\frac{1}{n^2+3n}\sim\frac{1}{n^2}$

Ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится (p=2>1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n\cdot 4^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}}{\frac{(x-6)^n}{n4^n}}|=|x-6\frac{|}{4}<1\Rightarrow x\in(2,10)$

Граничные точки:
1. x=2: $\sum\frac{(-4)^n}{n4^n}=\sum\frac{(-1)^n}{n}$ - сходится условно
2. x=10: $\sum\frac{4^n}{n4^n}=\sum\frac{1}{n}$ - расходится

Ответ:
- Абсолютная сходимость: $(2,10)$
- Условная сходимость: $\{2\}$

---

4. Разложите функцию $f(x)=\frac{1}{5-2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.

Решение: Преобразуем: $\frac{1}{5-2x}=\frac{1}{1-2(x-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-2)^n$

Область сходимости: $|2(x-2)|<1\Rightarrow x\in(1.5,2.5)$

Ответ: Ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-2)^n$ Область сходимости: $(1.5,2.5)$

---

5. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на данных множествах.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^3}{n^3+x^3}, \quad D_1 = [2,9], \quad D_2 = (0,+\infty).$$

Решение: Поточечный предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+x^3}{n^3+x^3} = 0$

1. На $D_1 = [2,9]$:

$\sup|\frac{n+x^3}{n^3+x^3}| \leq \frac{n+729}{n^3+8} \to 0$ Сходимость равномерная

2. На $D_2 = (0,\infty)$:

При $x = n$: $\frac{n+n^3}{n^3+n^3} = \frac{n^3+n}{2n^3} \to \frac{1}{2} \neq 0$ Сходимость неравномерная

Ответ: На D_1 - равномерная, на D_2 - неравномерная

---

6. Приведите пример расходящегося числового ряда, для которого признак Даламбера не дает утвердительного ответа (о его поведении в смысле сходимости). Обоснуйте ответ.

Решение: Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) Отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$, признак Даламбера не дает ответа, но ряд расходится.

Ответ: Гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, но признак Даламбера неприменим

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *равномерной* сходимости функциональной последовательности $f_n : D \to \mathbb{R}$ к функции f на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \ \exists x \in D \ \exists n > n_0 : |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Решение: Нет, это отрицание равномерной сходимости. Правильное определение:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \ \forall n > n_0 \ \forall x \in D : |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Ответ: Нет, это условие отрицания равномерной сходимости

---

8. Пусть дан степенной ряд с центром в $x_0 = -3$ и радиусом сходимости $R = 3$. И пусть при $x = x_0 - R$ ряд сходится. Из данных множеств выберите наибольшее, на котором ряд сходится точно *равномерно*. Обоснуйте ваш выбор.

$$\emptyset \ \{-3\} \ [-4,-2] \ [-6,-2] \ (-6,0) \ [-6,0]$$

Решение: Интервал сходимости: $(-6,0)$ При $x = -6$ ряд сходится по условию. Наибольшее замкнутое подмножество - $[-6,0]$, где ряд сходится равномерно.

Ответ: $[-6,0]$ - наибольшее компактное множество, содержащее точку сходимости

КР 2. Вариант 10.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+12n+35}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+12n+35=(n+5)(n+7)$ Разложим на простейшие дроби: $\frac{1}{(n+5)(n+7)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+7}\right)$

Частичная сумма: $S_N=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{N+5}-\frac{1}{N+7}\right)\right]$

Предел при $N\to\infty$: $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)=\frac{13}{168}$

Ответ: $\frac{13}{168}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)$$

Решение: Используем асимптотическую эквивалентность: $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$

Таким образом: $e^{\frac{1}{n^3}}-1\sim\frac{1}{n^3}$

Ряд $\sum\frac{1}{n^3}$ сходится (p=3>1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^2\cdot 2^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(x+5)^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{(x+5)^n}{n^2 2^n}}|=|x+5\frac{|}{2}<1\Rightarrow x\in(-7,-3)$

Граничные точки:
1. x=-7: $\sum\frac{(-2)^n}{n^2 2^n}=\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ - сходится абсолютно
2. x=-3: $\sum\frac{2^n}{n^2 2^n}=\sum\frac{1}{n^2}$ - сходится абсолютно

Ответ:
- Абсолютная сходимость: $[-7,-3]$
- Условная сходимость: $\emptyset$

---

4. Разложите функцию $f(x)=\frac{1}{x+4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-2$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем: $\frac{1}{x+4}=\frac{1}{2+(x+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x+2}{2}\right)^n$

Область сходимости: $|\frac{x+2}{2}|<1\Rightarrow x\in(-4,0)$

Ответ: Ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(-4,0)$

---

5. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на данных множествах.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^3x^3+1}, \quad D_1 = (0, +\infty), \quad D_2 = [1, 10].$$

Решение: Поточечный предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^3x^3+1} = 0$

1. На $D_1 = (0, \infty)$:

При $x = \frac{1}{n}$: $\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{n^3\cdot\frac{1}{n^3}+1} = \frac{1}{\frac{1}{n^3}+1} \to 1 \neq 0$ Сходимость неравномерная

2. На $D_2 = [1, 10]$:

$\sup|\frac{nx}{n^3x^3+1}| \leq \frac{10n}{n^3+1} \to 0$ Сходимость равномерная

Ответ: На D_1 - неравномерная, на D_2 - равномерная

---

6. Приведите пример числового ряда, для которого критерий Коши не выполняется. Обоснуйте ответ.

Решение: Пример: гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Для любого N при $p = N$: $|\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}| \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon = \frac{1}{4}$ Критерий Коши не выполняется, ряд расходится.

Ответ: Гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ не удовлетворяет критерию Коши

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *равномерной* сходимости функциональной последовательности $f_n : D \to \mathbb{R}$ к функции f на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in D \ \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Решение: Нет, правильное определение:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall x \in D \ \forall n > n_0 \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Квантор существования по x должен быть заменен на квантор всеобщности.

Ответ: Нет, правильная формулировка требует $\forall x \in D$ после $\exists n_0$

---

8. Пусть дан ряд с центром в $x_0 = -3$ и радиусом сходимости $R = 3$. Из данных множеств выберите наибольшее, на котором ряд сходится точно *равномерно*. Обоснуйте ваш выбор.

$$\emptyset \ \{-3\} \ [-4, -2] \ (-6, 0) \ [-6, 0]$$

Решение: Интервал сходимости: $(-6, 0)$ Наибольшее компактное подмножество - $[-6, 0]$, где ряд сходится равномерно.

Ответ: $[-6, 0]$ - наибольшее компактное множество в интервале сходимости

КР 2. Вариант ?.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+9n+20}$$

Решение: Разложим знаменатель на множители: $n^2+9n+20=(n+4)(n+5)$

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{3}{(n+4)(n+5)}=\frac{A}{n+4}+\frac{B}{n+5}$$

Решаем систему: $3=A(n+5)+B(n+4)$ При $n=-4$: $3=A$ При $n=-5$: $3=-B \Rightarrow B=-3$

Таким образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n+4}-\frac{3}{n+5}\right]=3\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right]$$

Частичная сумма:

$$S_N=3\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+5}\right)\right]$$

Предел при $N \to \infty$:

$$S=3*\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^5}}\right)$$

Решение: Используем асимптотическую эквивалентность: $\arctan(x) \sim x$ при $x \to 0$

Таким образом:

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^5}}\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

Ряд $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ сходится (p-ряд с p=5/2 > 1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{(x-3)^n}{n2^n}}| = |x-3\frac{|}{2} < 1 \Rightarrow |x-3| < 2$$

Интервал сходимости: $-2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$

Исследуем граничные точки:
1. При $x = 1$: $\sum \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится условно (по признаку Лейбница)
2. При $x = 5$: $\sum \frac{2^n}{n2^n} = \sum \frac{1}{n}$ - расходится (гармонический ряд)

Для абсолютной сходимости: При $1 < x < 5$ ряд сходится абсолютно.

Ответ:
- Множество абсолютной сходимости: $(1, 5)$
- Множество условной сходимости: $\{1\}$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем функцию:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{2+(x+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+1}{2}}$$

Используем формулу суммы геометрического ряда:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n, |t| < 1$$

Таким образом:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x+1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^{n+1}}$$

Область сходимости:

$$|\frac{x+1}{2}| < 1 \Rightarrow |x+1| < 2 \Rightarrow -3 < x < 1$$

Ответ: Ряд Тейлора: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(-3, 1)$

КР 2. Вариант 14.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+16n+63}$$

Решение:

Разложим знаменатель на множители: $n^2+16n+63=(n+7)(n+9)$

Применим метод частичных дробей:

$$\frac{4}{(n+7)(n+9)}=\frac{A}{n+7}+\frac{B}{n+9}$$

$4=A(n+9)+B(n+7)$

При $n=-7$: $4=2A$, откуда $A=2$ При $n=-9$: $4=-2B$, откуда $B=-2$

Значит:

$$\frac{4}{(n+7)(n+9)}=\frac{2}{n+7}-\frac{2}{n+9}=2\Big(\frac{1}{n+7}-\frac{1}{n+9}\Big)$$

Частичная сумма:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}2\Big(\frac{1}{n+7}-\frac{1}{n+9}\Big)$$

$$=2\Big[\Big(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\Big)+\Big(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\Big)+\Big(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\Big)+...+\Big(\frac{1}{N+7}-\frac{1}{N+9}\Big)\Big]$$

Это телескопический ряд:

$$S_N=2\Big[\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{N+8}-\frac{1}{N+9}\Big]$$

При $N\to\infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+16n+63}=2\Big(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\Big)=2\cdot\frac{17}{72}=\frac{17}{36}$$

Ответ: $\frac{17}{36}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\Big(\frac{1}{n^3+2n^2}\Big)$$

Решение:

Исследуем поведение общего члена ряда при $n\to\infty$.

При больших n:

$$\frac{1}{n^3+2n^2}=\frac{1}{n^2(n+2)}\sim\frac{1}{n^3}$$

Поскольку $\arctan(x) \sim x$ при $x \to 0$, имеем:

$$\arctan\left(\frac{1}{n^3+2n^2}\right) \sim \frac{1}{n^3+2n^2} \sim \frac{1}{n^3}$$

Применим предельный признак сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^3+2n^2}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \arctan\left(\frac{1}{n^3+2n^2}\right)}{1}$$

Используя $\arctan(x) \sim x$ при $x \to 0$:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \frac{1}{n^3+2n^2}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится (p-ряд с $p = 3 > 1$) и предел равен 1, то по предельному признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Ответ: Ряд сходится.

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{(n+3)\cdot 4^n}$$

Решение:

Данный ряд является степенным рядом вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+7)^n$, где: $a_n = \frac{1}{(n+3)\cdot 4^n}$

Найдем радиус сходимости по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+3)\cdot 4^n}}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{(n+3)\cdot 4^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+3}\cdot 4}$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+3} = 1$, получаем:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Интервал сходимости: $|x+7| < 4$, т.е. $-11 < x < -3$.

Исследуем поведение на концах интервала:

При $x = -3$ (т.е. $x+7 = 4$): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+3)\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

Этот ряд расходится (гармонический ряд со сдвигом).

При $x = -11$ (т.е. $x+7 = -4$): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(n+3)\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$

Это знакочередующийся ряд. По признаку Лейбница:
- $\frac{1}{n+3} \to 0$ при $n \to \infty$
- Последовательность $\frac{1}{n+3}$ монотонно убывает

Значит, ряд сходится условно.

Проверим абсолютную сходимость при $x = -11$: $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n+3}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ - расходится.

Ответ:

- Множество абсолютной сходимости: $(-11, -3)$
- Множество условной сходимости: $\{-11\}$
- Множество сходимости: $[-11, -3)$

---

4. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{8-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 6$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.

Решение:

Представим функцию в удобном для разложения виде:

$$f(x) = \frac{1}{8-x} = \frac{1}{(8-6)-(x-6)} = \frac{1}{2-(x-6)}$$

Вынесем константу:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-6}{2}}$$

Используем формулу для геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad \text{при } |t| < 1$$

где $t = \frac{x-6}{2}$.

Получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-6}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{2^{n+1}}$$

Для нахождения производных в точке $x_0 = 6$:

$f(6) = \frac{1}{8-6} = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{(8-x)^2}$, $f'(6) = \frac{1}{4}$

$f''(x) = \frac{2}{(8-x)^3}$, $f''(6) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{6}{(8-x)^4}$, $f'''(6) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

В общем виде: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(8-x)^{n+1}}$, $f^{(n)}(6) = \frac{n!}{2^{n+1}}$

Ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(6)}{n!}(x-6)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n! \cdot 2^{n+1}}(x-6)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{2^{n+1}}$$

Область сходимости:

Условие сходимости геометрической прогрессии: $|\frac{x-6}{2}| < 1$

Это означает: $|x-6| < 2$

Следовательно: $4 < x < 8$

Проверим поведение на концах:
- При $x = 4$: $f(4) = \frac{1}{4}$ (функция определена), но ряд расходится
- При $x = 8$: функция не определена (полюс)

Ответ: Ряд Тейлора: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{2^{n+1}}$

Область сходимости: $(4, 8)$

КР 2. Вариант 15.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+17n+72}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+17n+72=(n+8)(n+9)$ Разложим на простейшие дроби: $\frac{2}{(n+8)(n+9)}=2\left(\frac{1}{n+8}-\frac{1}{n+9}\right)$

Частичная сумма: $S_N=2\left[\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N+8}-\frac{1}{N+9}\right)\right]$

Предел при $N\to\infty$: $S=2\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}$

Ответ: $\frac{2}{9}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^6+1}-n^3\right)$$

Решение: Умножим и разделим на сопряженное: $\sqrt{n^6+1}-n^3=\frac{1}{\sqrt{n^6+1}+n^3}\sim\frac{1}{2n^3}$

Ряд $\sum\frac{1}{2n^3}$ сходится (p=3>1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^n}{n\cdot 5^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(x-8)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}}{\frac{(x-8)^n}{n5^n}}|=|x-8\frac{|}{5}<1\Rightarrow x\in(3,13)$

Граничные точки:
1. x=3: $\sum\frac{(-5)^n}{n5^n}=\sum\frac{(-1)^n}{n}$ - сходится условно
2. x=13: $\sum\frac{5^n}{n5^n}=\sum\frac{1}{n}$ - расходится

Ответ:
- Абсолютная сходимость: $(3,13)$
- Условная сходимость: $\{3\}$

---

4. Разложите функцию $f(x)=\frac{1}{x+5}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-3$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем: $\frac{1}{x+5}=\frac{1}{2+(x+3)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x+3}{2}\right)^n$

Область сходимости: $|\frac{x+3}{2}|<1\Rightarrow x\in(-5,1)$

Ответ: Ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{2^{n+1}}$ Область сходимости: $(-5,1)$

---

5. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на данных множествах.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2x^2}{n^4x^4+1},\quad D_1=[0,+\infty),\quad D_2=[1,3].$$

Решение: Поточечный предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n^2x^2}{n^4x^4+1} = 0$

1. На $D_1 = [0, \infty)$:

При $x = \frac{1}{n}$: $\sin\frac{1}{n^0+1} \to \sin\frac{1}{2} \neq 0$ Сходимость неравномерная

2. На $D_2 = [1, 3]$:

$\sup|\sin\frac{n^2x^2}{n^4x^4+1}| \leq \sup\frac{n^2x^2}{n^4x^4} \leq \frac{9n^2}{n^4} \to 0$ Сходимость равномерная

Ответ: На D_1 - неравномерная, на D_2 - равномерная

---

6. Приведите пример сходящегося знакочередующегося ряда (т. е. ряда лейбницевского типа), для которого признак Лейбница не применим. Обоснуйте ответ.

Решение: Пример: $\sum (-1)^n \frac{1+(-1)^n}{n}$ Члены ряда: 0, −1, 0, 1/2, 0, −1/3, ... Не убывает по модулю, но сходится как $\sum (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{\frac{n}{2}}$

Ответ: Ряд $\sum (-1)^n \frac{1+(-1)^n}{n}$ сходится, но признак Лейбница неприменим

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *равномерной* сходимости функциональной последовательности $f_n : D \to \mathbb{R}$ к функции f на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим.

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Решение: Нет, это определение поточечной сходимости. Правильное определение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall x \in D\ \forall n > n_0 \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

Ответ: Нет, это условие поточечной сходимости. Для равномерной сходимости n_0 не должно зависеть от x.

---

8. Пусть степенной ряд по степеням $(x-4)$ *расходится* при $x = 1$. Из данных множеств выберите наибольшее, на котором ряд точно *расходится*. Обоснуйте ваш выбор.

$$\{1\},\ [-1, 1]\ [1, 7)\ (7, 9)\ (7, 10]\ [7, +\infty]$$

Решение: Радиус сходимости R ≤ |4-1| = 3. Ряд расходится при |x-4| > R, значит при x < 1 и x > 7. Наибольшее множество расходимости - $[7, +\infty]$.

Ответ: $[7, +\infty]$ - наибольшее множество, где |x-4| ≥ 3

КР 2. Вариант ?.

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+18n+80}$$

Решение: Разложим знаменатель: $n^2+18n+80=(n+8)(n+10)$ Разложим на простейшие дроби: $\frac{1}{(n+8)(n+10)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+8}-\frac{1}{n+10}\right)$

Частичная сумма: $S_N=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+...+\left(\frac{1}{N+8}-\frac{1}{N+10}\right)\right]$

Предел при $N\to\infty$: $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)=\frac{19}{360}$

Ответ: $\frac{19}{360}$

---

2. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

Решение: Используем асимптотическую эквивалентность: $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$

Таким образом: $\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{n^3}$

Ряд $\sum\frac{1}{n^3}$ сходится (p=3>1), поэтому исходный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится

---

3. Найдите множества абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+9)^n}{n^2\cdot 6^n}$$

Решение: Применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(x+9)^{n+1}}{(n+1)^2 6^{n+1}}}{\frac{(x+9)^n}{n^2 6^n}}|=|x+9\frac{|}{6}<1\Rightarrow x\in(-15,-3)$

Граничные точки:
1. x=-15: $\sum\frac{(-6)^n}{n^2 6^n}=\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ - сходится абсолютно
2. x=-3: $\sum\frac{6^n}{n^2 6^n}=\sum\frac{1}{n^2}$ - сходится абсолютно

Ответ:
- Абсолютная сходимость: $[-15,-3]$
- Условная сходимость: $\emptyset$

---

4. Разложите функцию $f(x)=\frac{1}{4x-3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ и укажите область сходимости полученного ряда к $f(x)$.
Решение: Преобразуем: $\frac{1}{4x-3}=\frac{1}{1+4(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n(x-1)^n$

Область сходимости: $|4(x-1)|<1\Rightarrow x\in(0.75,1.25)$

Ответ: Ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n(x-1)^n$ Область сходимости: $(0.75,1.25)$

---

5. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на данных множествах.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx^2}}, \quad D_1 = (0,1), \quad D_2 = (1,+\infty)$$

Решение: Поточечный предел: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{nx^2}} = 0$

1. На $D_1 = (0,1)$:

При $x \to 0^+$: $\sup \frac{1}{2^{nx^2}} \to 1 \neq 0$ Сходимость неравномерная

2. На $D_2 = (1,\infty)$:

$\sup \frac{1}{2^{nx^2}} \leq \frac{1}{2^n} \to 0$ Сходимость равномерная

Ответ: На D_1 - неравномерная, на D_2 - равномерная

---

6. Приведите пример расходящегося числового ряда, расходимость которого показать при помощи интегрального признака Коши. Обоснуйте ответ.
Решение: Пример: гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна, положительна и убывает на $[1,\infty)$. Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \infty$ расходится, значит ряд расходится.

Ответ: Гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится по интегральному признаку

---

7. Является ли следующее условие равносильным определению *равномерной* сходимости функционального ряда с частичными суммами $S_{n(x)}$ к сумме $S(x)$ на множестве D? Если нет, переформулируйте его, чтобы оно стало подходящим

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |S_{n(x)} - S(x)| < \varepsilon$$

Решение: Нет, это определение поточечной сходимости. Правильное определение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall x \in D\ \forall n > n_0 \Rightarrow |S_{n(x)} - S(x)| < \varepsilon$$

Ответ: Нет, для равномерной сходимости n_0 не должно зависеть от x

---

8. Пусть степенной ряд по степеням $(x-6)$ *сходится* при $x = 2$. Из данных множеств выберите наибольшее, на котором ряд точно *сходится*. Обоснуйте ваш выбор.

$$\{2\},\ [2,6]\ [2,9]\ [2,10)\ [2,10]\ [2,+\infty)$$

Решение: Радиус сходимости R ≥ |6-2| = 4. Ряд сходится при |x-6| < R, значит при x ∈ (2,10). Наибольшее множество сходимости - $[2,10)$.

Ответ: $[2,10)$ - наибольшее множество, где |x-6| ≤ 4

КР 1. Вариант 13.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = xe^{-3x}, \quad y = 0, \quad x = 1$$

Решение:

Площадь фигуры вычисляется как определенный интеграл:

$$S = \int_0^1 xe^{-3x}\ dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = x$, $dv = e^{-3x}dx$

Тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\int xe^{-3x}dx = -\frac{x}{3}e^{-3x} - \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx$$

$$= -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx$$

$$= -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)$$

$$= -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} = -\frac{e^{-3x}}{9}(3x+1)$$

Вычисляем определенный интеграл:

$$S = \left[-\frac{e^{-3x}}{9}(3x+1)\right]_0^1$$

$$= -\frac{e^{-3}}{9}(3+1) - \left(-\frac{1}{9}(0+1)\right)$$

$$= -\frac{4e^{-3}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1-4e^{-3}}{9}$$

Ответ: $S = \frac{1-4e^{-3}}{9}$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = t^2\cos t \\ y = t^2\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

Решение:

Для параметрически заданной кривой длина дуги вычисляется по формуле:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Найдем производные:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2\cos t) = 2t\cos t - t^2\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2\sin t) = 2t\sin t + t^2\cos t$$

Вычислим $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$:

$$\left(2t\cos t - t^2\sin t\right)^2 + \left(2t\sin t + t^2\cos t\right)^2$$

$$= 4t^2\cos^2 t - 4t^3\cos t\sin t + t^4\sin^2 t + 4t^2\sin^2 t + 4t^3\sin t\cos t + t^4\cos^2 t$$

$$= 4t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^4(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= 4t^2 + t^4 = t^2(4 + t^2)$$

Тогда:

$$L = \int_0^1 \sqrt{t^2(4+t^2)}\ dt = \int_0^1 t\sqrt{4+t^2}\ dt$$

Используем подстановку $u = 4 + t^2$, тогда $du = 2t\ dt$, $t\ dt = \frac{1}{2}du$

При $t = 0$: $u = 4$, при $t = 1$: $u = 5$

$$L = \int_4^5 \frac{1}{2}\sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}\int_4^5 u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5 = \frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5$$

$$= \frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right)$$

Ответ: $L = \frac{5\sqrt{5}-8}{3}$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{-x} \frac{\arctan x}{x^3}\ dx$$

Решение:

Рассматриваем несобственный интеграл:

$$\int_1^{-\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\ dx = \lim_{a\to-\infty}\int_1^a \frac{\arctan x}{x^3}\ dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = \arctan x$, $dv = \frac{dx}{x^3} = x^{-3}dx$

Тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

$$\int \frac{\arctan x}{x^3}dx = -\frac{\arctan x}{2x^2} - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

Для вычисления $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$ используем разложение на простые дроби:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

Приводя к общему знаменателю и сравнивая коэффициенты, получаем: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctan x$$

Таким образом:

$$\int \frac{\arctan x}{x^3} dx = -\frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \arctan x\right)$$

$$= -\frac{\arctan x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{\arctan x}{2}$$

Вычисляем предел:

$$\lim_{a \to -\infty} \left[-\frac{\arctan x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{\arctan x}{2}\right]_1^a$$

При $x = 1$: $-\frac{\frac{\pi}{4}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$

При $x \to -\infty$: $\arctan x \to -\frac{\pi}{2}$, поэтому выражение стремится к $0 - 0 - \frac{(-\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$\int_1^{-\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}$$

Ответ: Интеграл расходится (при более точном анализе поведения на бесконечности)

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Решение:

Исследуем несобственный интеграл второго рода (особенность в точке $x = 0$).

Проанализируем поведение подынтегральной функции при $x \to 0^+$:

$\ln(1+x^2) \sim x^2$ при $x \to 0$

Поэтому: $\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{2}}$ при $x \to 0^+$

Поскольку $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx$ сходится (показатель степени $\frac{3}{2} > -1$), то по признаку сравнения в предельной форме исходный интеграл сходится.

Для строгого доказательства вычислим предел:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{1}{2}}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

Применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

Поскольку предел конечен и положителен, и $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx$ сходится, то исходный интеграл сходится.

Ответ: Интеграл сходится

КР 1. Вариант 14.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}$$

Решение:

Площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b |f(x)| \ \ dx$$

Нужно найти пределы интегрирования. Функция $y = \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}$ пересекается с осью x (т.е. с $y = 0$) когда $\arctan 2x = 0$, что происходит при $x = 0$.

Поскольку $\arctan 2x > 0$ при $x > 0$, функция положительна на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan 2x}{1+4x^2} \ dx$$

Для вычисления этого интеграла используем замену: $u = 2x$, тогда $du = 2 \ dx$, $dx = \frac{du}{2}$.

При $x = 0$: $u = 0$; при $x = \frac{1}{2}$: $u = 1$.

$$S = \int_0^1 \frac{\arctan u}{1+u^2} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arctan u}{1+u^2} \ du$$

Используем интегрирование по частям: $v = \arctan u$, $dw = \frac{du}{1+u^2}$

$dv = \frac{du}{1+u^2}$, $w = \arctan u$

$$\int \frac{\arctan u}{1+u^2} \ du = (\arctan u)^2 - \int \frac{\arctan u}{1+u^2} \ du$$

Получаем: $2\int \frac{\arctan u}{1+u^2} \ du = (\arctan u)^2$

Значит: $\int \frac{\arctan u}{1+u^2} \ du = \frac{(\arctan u)^2}{2}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\arctan u)^2}{2} \ |_0^1 = \frac{1}{4}[(\arctan 1)^2 - (\arctan 0)^2] = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{64}$$

Ответ: $S = \frac{\pi^2}{64}$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$y = 1 - \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$$

Решение:

Длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \ dx$$

Найдем производную:

$$y' = \frac{d}{dx}(1 - \ln\cos x) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sec^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\ dx$$

$$\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$L = \ln|\sec x + \tan x|\ \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

При $x = \frac{\pi}{3}$: $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

При $x = 0$: $\sec(0) = 1$, $\tan(0) = 0$

$$L = \ln|2 + \sqrt{3}| - \ln|1 + 0| = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

Ответ: $L = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x \cdot 2^{-4x}\ dx$$

Решение:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot 2^{-4x}\ dx = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-4x\ln 2}\ dx$$

Пусть $a = 4\ln 2$, тогда:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-ax}\ dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = x$, $dv = e^{-ax}dx$

$du = dx$, $v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$

$$\int xe^{-ax}dx = -\frac{x}{a}e^{-ax} - \int\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)dx$$

$$= -\frac{x}{a}e^{-ax} - \frac{1}{a^2}e^{-ax} = -\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax + 1)$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax+1)\right]_0^t$$

При $x \to +\infty$: $e^{-ax} \to 0$ быстрее, чем растет $(ax + 1)$, поэтому предел равен 0.

При $x = 0$: $-\frac{e^0}{a^2}(0 + 1) = -\frac{1}{a^2}$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = 0 - \left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}$$

Подставляем $a = 4\ln 2$:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot 2^{-4x}\, dx = \frac{1}{(4\ln 2)^{20}} = \frac{1}{16(\ln 2)^2}$$

Ответ: $\frac{1}{16(\ln 2)^2}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2}\, dx$$

Решение:

Для исследования сходимости несобственного интеграла используем признаки сравнения.

Заметим, что $|\cos x| \le 1$, поэтому:

$$1 \le 2 + \cos x \le 3$$

Следовательно:

$$\frac{1}{x^2} \le \frac{2+\cos x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$$

Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$$

Этот интеграл сходится.

По признаку сравнения, поскольку:

$$0 < \frac{2+\cos x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$$

и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}\, dx = 3\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 3$ сходится, то исходный интеграл также сходится.

Можно также применить признак Дирихле: функция $2+\cos x$ ограничена, а $\frac{1}{x^2}$ монотонно убывает к нулю при $x \to +\infty$.

Ответ: Интеграл сходится.

КР 1. Вариант 15.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = xe^{-2x}, \quad y = 0, \quad x = 2$$

Решение:

Площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int_0^2 xe^{-2x}\, dx$$

Вычислим интеграл методом интегрирования по частям. Пусть:
- $u = x$, тогда $du = dx$
- $dv = e^{-2x}dx$, тогда $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

По формуле интегрирования по частям:

$$\int xe^{-2x}\, dx = x \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1) + C$$

Вычисляем определенный интеграл:

$$S = \left[-\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1)\right]_0^2$$

$$= -\frac{e^{-4}}{4}(4+1) - \left(-\frac{1}{4}(0+1)\right)$$

$$= -\frac{5e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-5e^{-4}}{4}$$

Ответ: $S = \frac{1-5e^{-4}}{4}$ кв. ед.

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \ln\sin x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$$

Решение:

Длина дуги кривой $y = f(x)$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Найдем производную:

$$y' = \frac{d}{dx}(\ln \sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Тогда:

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \cot^2 x}\ dx$$

Используем тождество $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$:

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \csc x\ dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}\ dx$$

Интеграл от $\csc x$ равен $\ln|\csc x - \cot x| + C$:

$$L = [\ln|\csc x - \cot x|]_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}}$$

Вычисляем значения в пределах:
- При $x = \frac{2\pi}{3}$: $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
- При $x = \frac{\pi}{3}$: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\csc \frac{2\pi}{3} - \cot \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\csc \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$L = \ln \sqrt{3} - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \ln \sqrt{3} - \ln \sqrt{3} + \ln 3 = \ln 3$$

Ответ: $L = \ln 3$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{1} x \cdot e^{2x}\ dx$$

Решение:

Несобственный интеграл первого рода:

$$\int_{-\infty}^{1} xe^{2x}\ dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{1} xe^{2x}\ dx$$

Вычислим интеграл методом интегрирования по частям:
- $u = x$, тогда $du = dx$
- $dv = e^{2x}dx$, тогда $v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int xe^{2x}\ dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\ dx$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{e^{2x}}{4}(2x - 1) + C$$

Вычисляем определенный интеграл:

$$\int_t^1 xe^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)\right]_t^1$$

$$= \frac{e^2}{4}(2-1) - \frac{e^{2t}}{4}(2t-1) = \frac{e^2}{4} - \frac{e^{2t}}{4}(2t-1)$$

Находим предел при $t \to -\infty$:

$$\lim_{t\to-\infty}\left[\frac{e^2}{4} - \frac{e^{2t}}{4}(2t-1)\right]$$

При $t \to -\infty$: $e^{2t} \to 0$, поэтому $\frac{e^{2t}}{4}(2t-1) \to 0$

Ответ: $\int_{-\infty}^1 xe^{2x}\,dx = \frac{e^2}{4}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$$

Решение:

Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода с особенностью в точке $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Исследуем поведение подынтегральной функции при $x \to 0^+$:

Используем эквивалентность $\sin x \sim x$ при $x \to 0$: $\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to 0^+$

Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(2\cdot1 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 - 0 = 2$$

Поскольку показатель степени $-\frac{1}{2} > -1$, интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится.

По признаку сравнения в предельной форме: если $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$, где $0 < L < +\infty$, то интегралы $\int_0^1 f(x)\,dx$ и $\int_0^1 g(x)\,dx$ одинаково сходятся или расходятся.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Ответ: Интеграл сходится.

КР 1. Вариант 16.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}$$

Решение:

Найдем область интегрирования. Функция $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ определена при $x \in (-1, 1)$ и $x \neq 0$.

При $x = \frac{1}{2}$: $y = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Функция положительна на $(0, 1)$, поэтому площадь:

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Используем подстановку $x = \sin t$, $dx = \cos t \ dt$:

- При $x = 0$: $t = 0$
- При $x = \frac{1}{2}$: $t = \frac{\pi}{6}$
- $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{t}{\cos t} \cos t \ dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t \ dt$$

$$S = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{72}$$

Ответ: $S = \frac{\pi^2}{72}$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 3t^3, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Решение:

Найдем производные параметрических функций:

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \quad \frac{dy}{dt} = 9t^2$$

Длина дуги параметрической кривой:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \ dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(4t)^2 + (9t^2)^2} \ dt = \int_0^1 \sqrt{16t^2 + 81t^4} \ dt$$

$$L = \int_0^1 t\sqrt{16 + 81t^2} \ dt$$

Используем подстановку $u = 16 + 81t^2$, $du = 162t \ dt$, $t \ dt = \frac{du}{162}$:

- При $t = 0$: $u = 16$
- При $t = 1$: $u = 97$

$$L = \int_{16}^{97} \frac{\sqrt{u}}{162}\, du = \frac{1}{162}\int_{16}^{97} u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$L = \frac{1}{162}\cdot\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^{97} = \frac{1}{243}\left(97^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$L = \frac{1}{243}\left(97\sqrt{97} - 64\right)$$

Ответ: $L = \frac{97\sqrt{97}-64}{243}$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$$

Решение:

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^3}\, dx$$

Используем интегрирование по частям: $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3} = x^{-3}dx$ $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2x^2}$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} = -\frac{2\ln x + 1}{4x^2}$$

Теперь вычислим предел:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{2\ln x+1}{4x^2}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2\ln b+1}{4b^2}\right) - \left(-\frac{2\ln 1+1}{4\cdot 1^2}\right)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Ответ: Интеграл сходится и равен $\frac{1}{4}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{4-\sin^2 x}{1+x^2}\, dx$$

Решение:

Исследуем поведение подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

Поскольку $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, имеем:

$$3 \leq 4 - \sin^2 x \leq 4$$

Следовательно:

$$\frac{3}{1+x^2} \leq \frac{4-\sin^2 x}{1+x^2} \leq \frac{4}{1+x^2}$$

Исследуем сходимость интегралов-мажорант и миноранты:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{4}{1+x^2}dx = 4\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 4[\arctan x]_1^{+\infty} = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi$ (сходится)

2) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{1+x^2}dx = 3\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 3[\arctan x]_1^{+\infty} = \frac{3\pi}{4}$ (сходится)

По признаку сравнения, поскольку:

$$0 < \frac{4-\sin^2 x}{1+x^2} \leq \frac{4}{1+x^2}$$

и $\int_1^{+\infty} \frac{4}{1+x^2}dx$ сходится, то исходный интеграл также сходится.

Более того, можем оценить его значение:

$$\frac{3\pi}{4} \leq \int_1^{+\infty} \frac{4-\sin^2 x}{1+x^2}dx \leq \pi$$

Ответ: Интеграл сходится.

КР 1. Вариант 20.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = (x-1)\ln(x-1), \quad y = 0, \quad x = e+1$$

Решение:

Функция $y = (x-1)\ln(x-1)$ определена при $x > 1$.

Найдем точки пересечения с осью Ox (где $y = 0$): $(x-1)\ln(x-1) = 0$

Это происходит при $x - 1 = 1$, т.е. $x = 2$ (поскольку $\ln(x-1) = 0$ при $x - 1 = 1$).

На интервале $[2, e+1]$ функция положительна, поэтому площадь:

$$S = \int_2^{e+1} (x-1)\ln(x-1)\ dx$$

Используем замену переменной: пусть $u = x - 1$, тогда $du = dx$.

При $x = 2$: $u = 1$ При $x = e + 1$: $u = e$

$$S = \int_1^e u \ln u\ du$$

Применим интегрирование по частям: $v = \ln u$, $dw = u\ du$ $dv = \frac{du}{u}$, $w = \frac{u^2}{2}$

$$\int u \ln u\ du = \ln u \cdot \frac{u^2}{2} - \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{du}{u} = \frac{u^2 \ln u}{2} - \frac{1}{2}\int u\ du$$

$$= \frac{u^2 \ln u}{2} - \frac{u^2}{4} = \frac{u^2}{4}(2\ln u - 1)$$

Вычисляем определенный интеграл:

$$S = \left[\frac{u^2}{4}(2\ln u - 1)\right]_1^e = \frac{e^2}{4}(2\ln e - 1) - \frac{1^2}{4}(2\ln 1 - 1)$$

$$= \frac{e^2}{4}(2 \cdot 1 - 1) - \frac{1}{4}(0 - 1) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Ответ: $S = \frac{e^2+1}{4}$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y, \quad 1 \le y \le 2$$

Решение:

Для кривой, заданной параметрически как $x = f(y)$, длина дуги вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (x'_y)^2}\ dy$$

Найдем производную x'_y:

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y\right] = \frac{2y}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}$$

Вычислим $\left(x'_y\right)^2$:

$$\left(x'_y\right)^2 = \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\right)^2 = \frac{y^2}{4} - 2\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2y} + \frac{1}{4y^2} = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}$$

Найдем подкоренное выражение:

$$1 + \left(x'_y\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2} = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}$$

Попробуем представить это как полный квадрат:

$$1 + \left(x'_y\right)^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2} = \frac{y^2}{4} + 2\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2y} + \frac{1}{4y^2} = \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right)^2$$

Тогда:

$$\sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{2y}$$

Длина дуги:

$$L = \int_1^2 \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right)\,dy = \left[\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2}\ln y\right]_1^2$$

$$L = \left(\frac{4}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 1\right) = 1 + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

Ответ: $L = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{1 + x^8}$$

Решение:

Используем замену переменной: пусть $u = x^4$, тогда $du = 4x^3 dx$, откуда $x^3 dx = \frac{du}{4}$.

При $x = 1$: $u = 1$ При $x \to +\infty$: $u \to +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{1 + x^8} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2}$$

Интеграл $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$:

$$\frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\left[\arctan u\right]_1^t$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\left(\arctan t - \arctan 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$$

Ответ: $\frac{\pi}{16}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^6}\, dx$$

Решение:

Данный интеграл является несобственным интегралом 1-го рода. Исследуем его сходимость.

При $x \to +\infty$:
- $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ (ограниченная функция)
- $1 + x^6 \sim x^6$

Поэтому при больших x:

$$\frac{\arctan x}{1+x^6} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^6} = \frac{\pi}{2x^6}$$

Исследуем сходимость эталонного интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^6}$$

Это интеграл вида $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ с $p = 6 > 1$, который сходится.

По предельному признаку сравнения:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\arctan x}{1+x^6}}{\frac{1}{x^6}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 \arctan x}{1+x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{\frac{1}{x^6}+1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Поскольку предел конечен и положителен, а эталонный интеграл сходится, то исходный интеграл также сходится.

Ответ: Интеграл сходится.

КР 1. Вариант 11.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми

$$y = \frac{\arctan 3x}{1+9x^2}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{3}$$

Решение:

Функция $y = \frac{\arctan 3x}{1+9x^2}$ определена на интервале $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

На этом интервале функция неотрицательна, поэтому площадь вычисляется как:

$$S = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arctan 3x}{1+9x^2}\, dx$$

Используем замену переменной: пусть $u = 3x$, тогда $du = 3\, dx$, откуда $dx = \frac{du}{3}$.

При $x = 0$: $u = 0$ При $x = \frac{1}{3}$: $u = 1$

$$S = \int_0^1 \frac{\arctan u}{1+u^2} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\arctan u}{1+u^2}\, du$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{\arctan u}{1+u^2} du$ используем замену $t = \arctan u$, тогда $dt = \frac{du}{1+u^2}$:

$$\int \frac{\arctan u}{1+u^2}\, du = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\arctan u)^2}{2}$$

Применяя пределы интегрирования:

$$S = \frac{1}{3}\left[\frac{(\arctan u)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[(\arctan 1)^2 - (\arctan 0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0^2\right] = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{96}$$

Ответ: $S = \frac{\pi^2}{96}$

---

2. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \quad 1 \le x \le 3$$

Решение:

Длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Найдем производную:

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right] = \frac{2x}{2} - \frac{1}{4x} = x - \frac{1}{4x}$$

Вычислим $(y')^2$:

$$(y')^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4x} + \frac{1}{16x^2} = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$$

Найдем подкоренное выражение:

$$1 + (y')^2 = 1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$$

Попробуем представить это как полный квадрат:

$$1 + (y')^2 = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4x} + \frac{1}{16x^2} = \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2$$

Тогда:

$$\sqrt{1 + (y')^2} = x + \frac{1}{4x}$$

Длина дуги:

$$L = \int_1^3 \left(x + \frac{1}{4x}\right)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln x\right]_1^3$$

$$L = \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{4}\ln 3\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 1\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3 = 4 + \frac{\ln 3}{4}$$

Ответ: $L = 4 + \frac{\ln 3}{4}$

---

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{1} x \cdot 3^{6x}\ dx$$

Решение:

Используем интегрирование по частям. Пусть:

$$u = x, \quad dv = 3^{6x}dx$$

$$du = dx, \quad v = \int 3^{6x}dx = \frac{3^{6x}}{6\ln 3}$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\int x \cdot 3^{6x}dx = x \cdot \frac{3^{6x}}{6\ln 3} - \int \frac{3^{6x}}{6\ln 3}dx$$

$$= \frac{x \cdot 3^{6x}}{6\ln 3} - \frac{1}{6\ln 3}\int 3^{6x}dx = \frac{x \cdot 3^{6x}}{6\ln 3} - \frac{1}{6\ln 3} \cdot \frac{3^{6x}}{6\ln 3}$$

$$= \frac{x \cdot 3^{6x}}{6\ln 3} - \frac{3^{6x}}{36(\ln 3)^2} = \frac{3^{6x}}{6\ln 3}\left(x - \frac{1}{6\ln 3}\right)$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{1} x \cdot 3^{6x} dx = \lim_{t \to -\infty} \left[\frac{3^{6x}}{6 \ln 3} \left(x - \frac{1}{6 \ln 3} \right) \right]_t^1$$

$$= \frac{3^6}{6 \ln 3} \left(1 - \frac{1}{6 \ln 3} \right) - \lim_{t \to -\infty} \frac{3^{6t}}{6 \ln 3} \left(t - \frac{1}{6 \ln 3} \right)$$

При $t \to -\infty$: $3^{6t} \to 0$ быстрее, чем $|t|$ растет, поэтому предел равен 0.

$$= \frac{3^6}{6 \ln 3} \left(1 - \frac{1}{6 \ln 3} \right) = \frac{729}{6 \ln 3} - \frac{729}{36 (\ln 3)^2} = \frac{729}{6 \ln 3} \left(1 - \frac{1}{6 \ln 3} \right)$$

$$= \frac{729}{6 \ln 3} \cdot \frac{6 \ln 3 - 1}{6 \ln 3} = \frac{729 (6 \ln 3 - 1)}{36 (\ln 3)^2}$$

Ответ: $\frac{729(6 \ln 3 - 1)}{36 (\ln 3)^2} = \frac{81(6ln3 - 1)}{4 (\ln 3)^2}$

---

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin 3x}{4x^2 + 1} \, dx$$

Решение:

Данный интеграл является несобственным интегралом 1-го рода. Исследуем его сходимость.

Разложим интеграл на два:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin 3x}{4x^2 + 1} \, dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{4x^2 + 1} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin 3x}{4x^2 + 1} \, dx$$

Исследуем первый интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{4x^2 + 1} \, dx$$

При $x \to +\infty$: $\frac{2}{4x^2+1} \sim \frac{2}{4x^2} = \frac{1}{2x^2}$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится (эталонный интеграл с показателем $p = 2 > 1$), следовательно, и первый интеграл сходится.

Исследуем второй интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin 3x}{4x^2 + 1} \, dx$$

Используем признак Дирихле: если функция $f(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, а функция $g(x)$ имеет ограниченную первообразную, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ сходится.

Здесь:
- $f(x) = \frac{1}{4x^2+1} \to 0$ монотонно при $x \to +\infty$
- $g(x) = \sin 3x$ имеет ограниченную первообразную $G(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x$

По признаку Дирихле второй интеграл также сходится.

Поскольку оба интеграла сходятся, исходный интеграл сходится.

Ответ: Интеграл сходится.