

Математический Анализ. Теория.

Понятие первообразной.

Первообразной функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется функция F такая, что

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Теорема о множестве всех первообразных.

Пусть F - первообразная функции f на $\langle a, b \rangle$. Для того, чтобы Φ также была первообразной функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b \rangle, C \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\Psi = F - \Phi$, где F и Φ - первообразные для f на $\langle a, b \rangle$. Тогда

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Согласно теореме Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ таких, что $x_1 < x_2$,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Значит, $\Psi(x) \equiv C, C \in \mathbb{R}, x \in \langle a, b \rangle$

Докажем достаточность. Пусть на $\langle a, b \rangle$ выполнено условие $F - \Phi \equiv C, C \in \mathbb{R}$. Тогда на этом промежутке $\Phi = F - C$ и, к тому же,

$$\Phi' = F' - C' = F' - 0 = F' = f$$

Тем самым, Φ является первообразной для функции f на $\langle a, b \rangle$.

Теорема о достаточном условии существования первообразной.

Если $f \in C(\langle a, b \rangle)$, то множество первообразных f на $\langle a, b \rangle$ не пусто.

Понятие неопределенного интеграла.

Неопределенным интегралом функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется множество всех первообразных f на этом промежутке. Неопределенный интеграл обозначается следующим образом:

$$\int f dx$$

где

$\int$ - знак неопределенного интеграла,

f - подынтегральная функция,

$f dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования.

Справедливы следующие равенства:

$\int 0 dx = C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

где в последних двух строчках таблицы считается, что $a \neq 0$, а все написанные соотношения рассматриваются на области определения подынтегральной функции.

Доказательство. Понятно, что все приведенные равенства доказываются формальным дифференцированием правой части и приведением результата к подынтегральной функции. Для примера, докажем следующее равенство:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Для доказательства достаточно показать, что производная правой части (точнее – любой фиксированной функции из множества) равна подынтегральной функции. Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \end{aligned}$$

откуда и следует написанное.

Связь интеграла и производной.

$$\left(\int f dx \right)' = f, \quad d \left(\int f dx \right) = f dx$$

Линейность неопределенного интеграла.

Пусть на $\langle a, b \rangle$ существуют первообразные функций f и g . Тогда:

1. На $\langle a, b \rangle$ существует первообразная функции $f + g$, причем

$$\int (f + g)dx = \int fdx + \int gdx$$

2. На $\langle a, b \rangle$ существует первообразная функции αf , $\alpha \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$$

3. На $\langle a, b \rangle$ существует первообразная функции $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

$$\int (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$$

Доказательство.

1. Докажем первый пункт. Понятно, что по свойству производной суммы, $F + G$ - первообразная $f + g$. Значит, достаточно проверить равенство

$$\{F + G + C, C \in \mathbb{R}\} = \{F + C_1, C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2, C_2 \in \mathbb{R}\}$$

Пусть $H \in \{F + G + C, C \in \mathbb{R}\}$, тогда

$$H = F + G + C = (F + 0) + (G + C),$$

а значит $H \in \{F + C_1, C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2, C_2 \in \mathbb{R}\}$ при $C_1 = 0$, $C_2 = C$.

Наоборот, пусть $H \in \{F + C_1, C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2, C_2 \in \mathbb{R}\}$, то есть

$$H = F + C_1 + G + C_2 = F + G + (C_1 + C_2).$$

Тогда и $H \in \{F + G + C, C \in \mathbb{R}\}$ при $C = C_1 + C_2$. Тем самым, равенство множеств установлено.

2. Докажем второй пункт. Понятно, что по свойству производной, αF - первообразная для αf . Значит, достаточно показать, что при $\alpha \neq 0$ верно равенство

$$\{\alpha F + C, C \in \mathbb{R}\} = \{\alpha F + \alpha C_1, C_1 \in \mathbb{R}\}$$

Если $H \in \{\alpha F + C, C \in \mathbb{R}\}$, то

$$H = \alpha F + C = \alpha F + \alpha \cdot \frac{C}{\alpha},$$

откуда $H \in \{\alpha F + \alpha C_1, C_1 \in \mathbb{R}\}$ при $C_1 = \frac{C}{\alpha}$.

Обратное включение доказывается похожим образом и остается в качестве упражнения.

3. Доказательство третьего пункта немедленно следует из утверждений 1-ого и 2-ого пунктов.

Формула замены переменной

Пусть f имеет первообразную на $\langle a, b \rangle$, $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, φ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Тогда

$$\int f dx = \int f(\varphi) \varphi' dt$$

Доказательство. Пусть F - первообразная для функции f на $\langle a, b \rangle$. Тогда, согласно теореме о производной композиции, $F(\varphi)$ - первообразная для функции $f(\varphi)\varphi'$ на $\langle \alpha, \beta \rangle$, откуда

$$\int f dx = F + C = F(\varphi) + C = \int f(\varphi) \varphi' dt$$

Формула интегрирования по частям

Пусть u и v дифференцируемы на $\langle a, b \rangle$, и пусть на $\langle a, b \rangle$ существует первообразная от vu' . Тогда

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Доказательство. Согласно формуле производной произведения,

$$(uv)' = u'v + uv'$$

откуда

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Беря интегралы от обеих частей и пользуясь следствием, приходим к формуле

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

Понятие многочлена

Многочленом (полиномом) $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ будем называть функцию вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Многочленом нулевой степени назовем произвольную константу, отличную от нуля. У тождественно равного нулю многочлена степенью будем называть символ $-\infty$.

Понятие рациональной дроби

Рациональной дробью называется функция вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены степеней n и m , соответственно.

Понятие правильной рациональной дроби

Рациональная дробь

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

называется правильной, если $n < m$, иначе дробь называется неправильной.

Лемма о делении многочленов с остатком

Пусть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- неправильная дробь. Тогда существует единственное представление этой дроби в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $R_{n-m}(x)$ - многочлен степени $(n - m)$, $T_k(x)$ - многочлен степени k и $k < m$.

Теорема о разложении многочлена над $\mathbb{R}$

Пусть $P_n(x)$ - многочлен n -й степени, коэффициент при старшей степени которого равен единице. Тогда справедливо разложение

$$P_n(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_p)^{k_p} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$$

где при $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$a_i \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{N}, l_j \in \mathbb{N}, p_j^2 - 4q_j < 0, k_1 + k_2 + \dots + k_p + 2(l_1 + \dots + l_m) = n.$$

Понятие простейших дробей

Простейшими дробями (дробями первого и второго типов) называют дроби вида

$$\frac{A}{(x - a)^k}, \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $p^2 - 4q < 0$.

Лемма о дробях первого типа

Пусть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- правильная рациональная дробь и

$$Q_m(x) = (x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x), \text{ где } \tilde{Q}(a) \neq 0, \tilde{Q} - \text{многочлен.}$$

Существуют число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$, такие что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x - a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

причем данное представление единственно.

Доказательство. Докажем существование заявленного разложения. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)}$$

и выберем число A так, чтобы число a было корнем числителя, то есть чтобы выполнялось равенство

$$P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(a) = 0$$

Тогда, очевидно,

$$A = \frac{P_n(a)}{\tilde{Q}(a)},$$

причем деление на $\tilde{Q}(a)$ возможно, так как, по условию, $\tilde{Q}(a) \neq 0$.

При найденном A в числителе стоит многочлен с корнем a , значит, согласно теореме, его можно представить в виде

$$P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x) = (x-a)\tilde{P}(x),$$

а тогда

$$\frac{P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{(x-a) \cdot \tilde{P}(x)}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}.$$

Тем самым, существование разложения доказано.

Докажем единственность такого разложения. От противного, пусть существует два разложения

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Домножив на $(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, приходим к равенству

$$A_1 \cdot \tilde{Q}(x) \cdot (x-a) = A_2 \cdot \tilde{Q}(x) + \tilde{P}_2(x) \cdot (x-a),$$

верному при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x = a$, тогда это равенство превращается в

$$A_1 \cdot \tilde{Q}(a) = A_2 \cdot \tilde{Q}(a),$$

и, так как, $\tilde{Q}(a) \neq 0$ то $A_1 = A_2$. Но тогда коэффициенты многочлена $\tilde{P} = P_n(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно. Противоречие.

Лемма о дробях второго типа

Пусть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- правильная рациональная дробь и

$$Q_m(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x), \quad \text{где } \tilde{Q}(\alpha \pm i\beta) \neq 0, \quad \tilde{Q} - \text{многочлен,}$$

$p^2 - 4q < 0$, а $\alpha \pm i\beta$ - комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.
Существуют числа $A, B \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$ такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Докажем существование заявленного разложения. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{P_n(x) - (Ax + B) \cdot \tilde{Q}(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Выберем числа A и B так, чтобы число $\alpha + i\beta$ было корнем числителя, то есть чтобы

$$P_n(\alpha + i\beta) - (A(\alpha + i\beta) + B) \cdot \tilde{Q}(\alpha + i\beta) = 0.$$

Последнее равенство переписывается в виде

$$A\alpha + B + i(A\beta) = \frac{P_n(\alpha + i\beta)}{\tilde{Q}(\alpha + i\beta)} =: R$$

По определению равенства комплексных чисел,

$$\begin{cases} A\alpha + B = \Re(R) \\ A\beta = \Im(R) \end{cases}$$

Так как $\beta \neq 0$, то параметры A и B определяются из системы единственным образом:

$$A = \frac{\Im(R)}{\beta}, \quad B = -\frac{\alpha\Im(R)}{\beta} + \Re(R).$$

Если $\alpha + i\beta$ - корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\alpha - \beta i$ - тоже его корень, значит, при найденных A и B , числитель может быть представлен в виде

$$P_n(x) - (Ax + B) \cdot \tilde{Q}(x) = (x^2 + px + q) \cdot \tilde{P}(x),$$

а тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{(x^2 + px + q) \cdot \tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Тем самым существование разложения доказано. Доказательство единственности разложения аналогично доказательству единственности в предыдущей лемме и остается в качестве упражнения.

Теорема о разложении дроби на простейшие

Пусть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- рациональная дробь, причем

$$Q_m(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_p)^{k_p} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m},$$

где при $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad l_j \in \mathbb{N}, \quad p_j^2 - 4q_j < 0.$$

Тогда существует единственное разложение вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^{k_i-j+1}} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^{l_i-j+1}},$$

где все коэффициенты в числителе дробей справа - вещественные числа.

Доказательство. Пусть $n > m$, тогда по лемме о делении с остатком, ее можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)}, \quad k < m$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда исходная рациональная дробь является правильной и не сократимой.

По лемме о дробях первого типа, рассматриваемую дробь можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x - a_1)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)}$$

где

$$\tilde{Q}^{(1)}(x) = (x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_p)^{k_p} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}.$$

Далее, по той же самой лемме, можно найти число A_{12} и многочлен $\tilde{P}^{(12)}(x)$ такие, что

$$\frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x - a_1)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)}$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)} + \frac{\tilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\tilde{Q}^{(1)}(x)}$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности k_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^{k_i-j+1}} + \frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)}$$

где

$$\tilde{Q}^{(p)}(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$$

и дробь

$$\frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)}$$

- правильная.

Далее воспользуемся леммой о дробях второго типа, получим

$$\frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)} = \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{P}^{(11)}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1} \cdot \hat{Q}^{(1)}(x)},$$

где

$$\hat{Q}^{(1)}(x) = (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}.$$

Продолжая рассуждения таким же образом, как выше, только с использованием леммы о дробях второго типа, придем к разложению

$$\frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^{l_i-j+1}}.$$

Итого теорема доказана.

Понятие разбиения

Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (дробление) τ , если введена система точек x_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Понятие мелкости (ранга) разбиения

Величина

$$\lambda(\tau) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \Delta x_i$$

называется мелкостью (рангом, диаметром) разбиения (дробления).

Понятие оснащенного разбиения

Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (оснащенное разбиение) (τ, ξ) , если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ таким образом, что $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Понятие интегральной суммы

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и введено разбиение (τ, ξ) . Величина

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется интегральной суммой для функции f на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ) .

Понятие интеграла Римана

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \mid \sigma_\tau(f, \xi) - I \mid < \varepsilon.$$

Обозначают это число так:

$$I = \int_a^b f dx$$

Понятие интегрируемой функции

Функция f , для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a, b]$, называется интегрируемой по Риману на этом отрезке (или просто интегрируемой). Класс интегрируемых (по Риману) на отрезке $[a, b]$ функций будем обозначать так: $R[a, b]$.

По определению полагают

$$\int_a^a f dx = 0, \quad \int_b^a f dx = - \int_a^b f dx, \quad a < b$$

Определение интеграла через последовательности

Пусть f задана на $[a, b]$. Тогда I - интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности (τ^n, ξ^n) оснащенных разбиений отрезка $[a, b]$ такой, что $\lambda(\tau^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, выполняется, что

$$\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть I - интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ согласно исходному определению и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \mid \sigma_\tau(f, \xi) - I \mid < \varepsilon.$$

Пусть теперь (τ^n, ξ^n) - последовательность оснащенных разбиений отрезка $[a, b]$ такая, что $\lambda(\tau^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \lambda(\tau^n) < \delta.$$

Но тогда, при $n > n_0$ выполняется и

$$\mid \sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I \mid < \varepsilon,$$

откуда и следует утверждение.

Докажем достаточность. От противного, пусть выполнено утверждение теоремы, но I - не интеграл Римана, согласно исходному определению. Это значит, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists (\tau^\delta, \xi^\delta) : \lambda(\tau^\delta) < \delta \text{ и } \mid \sigma_{\tau^\delta}(f, \xi^\delta) - I \mid \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}$. Тогда, по написанному,

$$\exists (\tau^n, \xi^n) : \lambda(\tau^n) < \delta_n = \frac{1}{n} \text{ и } \mid \sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I \mid \geq \varepsilon_0.$$

Но так как $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $\lambda(\tau^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, а значит построенная последовательность оснащенных разбиений удовлетворяет условию теоремы. В то же время,

$$\mid \sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I \mid \geq \varepsilon_0,$$

что противоречит тому, что

$$\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I.$$

Понятие сумм Дарбу

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$ и τ - некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$
$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции f , отвечающими разбиению τ , соответственно.

Лемма о связи конечности сумм Дарбу и ограниченности функции

Ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности произвольной верхней (нижней) суммы Дарбу.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f ограничена сверху, то есть

$$\exists M : f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Пусть τ - произвольное разбиение $[a, b]$. Тогда, так как $M_i \leq M, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M(b-a) < +\infty.$$

Случай, когда f ограничена снизу доказывается аналогичным образом. Докажем достаточность. Пусть τ - разбиение $[a, b]$ и $S_\tau(f)$ конечна. Тогда

$$M_i < +\infty, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

и

$$f(x) \leq M = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} M_i = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

откуда и следует требуемое.

Аналогичным образом доказывается утверждение в случае конечности $s_\tau(f)$.

Лемма о связи сумм Дарбу и интегральных сумм

Справедливы равенства

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), \quad s_\tau(f) = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Рассмотрим сначала случай, когда функция f ограничена сверху на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по определению супремума,

$$\exists \xi_i \in \Delta_i : M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i

$$\sum_{i=1}^{n(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a})} \Delta x_i < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

или

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi) \Leftrightarrow S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi).$$

Так как, как уже отмечалось, $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f, \xi)$, то в итоге проверено, что

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Пусть теперь f не ограничена сверху на $[a, b]$, тогда $S_\tau(f) = +\infty$. Ясно, что при фиксированном разбиении τ функция f не ограничена сверху хотя бы на одном отрезке разбиения Δ_i . Не нарушая общности можно считать, что она не ограничена на Δ_1 . Тогда существует последовательность ξ_1^k , что $f(\xi_1^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$. Пусть $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in \{2, \dots, n\}$, - какие-то фиксированные точки, $\xi^k = \{\xi_1^k, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Тогда, в силу определения супремума,

$$\sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(\xi_1^k) \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) = +\infty = S_\tau(f)$$

Понятие измельчения разбиения

Пусть на отрезке $[a, b]$ введены разбиения τ_1 и τ_2 . Говорят, что разбиение τ_1 является измельчением разбиения τ_2 , если $\tau_2 \subset \tau_1$.

Лемма о монотонности сумм Дарбу

Пусть $\tau_2 \subset \tau_1$, тогда

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Достаточно рассмотреть случай, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x} \in \Delta_k = (x_{k-1}, x_k)$.

Тогда

$$S_{\tau_2}(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k.$$

Пусть

$$M_{k'} = \sup_{x \in [x_{k-1}, \hat{x}]} f(x), \quad M_{k''} = \sup_{x \in [\hat{x}, x_k]} f(x),$$

тогда

$$M_k \geq M_{k'}, \quad M_k \geq M_{k''}$$

и

$$M_k \Delta x_k = M_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \hat{x}) \geq M_{k'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_{k''}(x_k - \hat{x}),$$

откуда

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M_{k'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_{k''}(x_k - \hat{x}) = S_{\tau_1}(f).$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма об ограниченности сумм Дарбу

Пусть τ_1 и τ_2 - разбиения отрезка $[a, b]$, тогда

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f).$$

Доказательство. Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. Пользуясь монотонностью сумм Дарбу, получим

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

что и доказывает утверждение.

Необходимое условие интегрируемости

Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Если предположить, что f не ограничена, например, сверху, то, по лемме,

$$S_{\tau}(f) = +\infty$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда, согласно определению интегрируемости,

$$\exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \mid \sigma_{\tau}(f, \xi) - I \mid < 1 \Leftrightarrow I - 1 < \sigma_{\tau}(f, \xi) < I + 1.$$

В частности, при фиксированном разбиении τ , мелкость которого меньше δ , интегральные суммы ограничены (по ξ). Но это противоречит тому, что при том же разбиении,

$$\sup_{\xi} \sigma_{\tau}(f, \xi) = S_{\tau}(f) = +\infty.$$

Критерий Дарбу

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} (S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f)) = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \mid S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) \mid < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \mid \sigma_{\tau}(f, \xi) - I \mid < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_{\tau}(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в правой части неравенства к супремуму, а в левой части к инфимуму по ε , получаем

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau(f), \quad S_\tau(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Складывая неравенства

$$-s_\tau(f) \leq \frac{\varepsilon}{3} - I, \quad S_\tau(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3},$$

приходим к тому, что

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Так как $\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} (S_\tau(f) - s_\tau(f)) = 0$, то все верхние и нижние суммы Дарбу конечны. В силу леммы,

$$\sup_\tau s_\tau(f) = I_* < +\infty, \quad \inf_\tau S_\tau(f) = I^* < +\infty,$$

причем $I_* \leq I^*$. Пользуясь сказанным и тем, что для любого τ

$$s_\tau(f) \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau(f),$$

получим

$$0 \leq I^* - I_* \leq S_\tau(f) - s_\tau(f),$$

откуда, так как правая часть принимает сколь угодно малые значения $I_* = I^*$. Пусть $I = I_* = I^*$. Из неравенств

$$s_\tau(f) \leq I \leq S_\tau(f), \quad s_\tau(f) \leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f),$$

получаем

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| \leq S_\tau(f) - s_\tau(f).$$

Осталось воспользоваться утверждением критерия Дарбу и заметить, что мы приходим к тому, что

$$\int_a^b f dx = I,$$

что и доказывает утверждение.

Понятие колебания

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Колебанием функции f на множестве E назовем величину

$$\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} (f(x) - f(y)).$$

Теорема об интегрируемости непрерывной функции

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b].$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Кантора, непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем, а значит

$$\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть τ - такое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\lambda(\tau) < \delta$, тогда

$$\omega(f, \Delta_i) = \sup_{x, y \in \Delta_i} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и

$$\sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

Значит, по следствию из критерия Дарбу, $f \in R[a, b]$.

Теорема о невлиании на интеграл значения функции в конкретной точке

Если значения интегрируемой функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. Пусть $f \in R[a, b]$, а функция $\tilde{f}$ отличается от f в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$. Так как, согласно необходимому условию интегрируемости, $|f| \leq C$, то

$$|\tilde{f}| \leq C_1, \quad C_1 = \max(C, |\tilde{f}(x_1)|, \dots, |\tilde{f}(x_n)|).$$

Заметим, что интегральные суммы для f и $\tilde{f}$ отличаются не больше, чем в $2n$ слагаемых, причем

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\tilde{f}, \xi)| \leq 2n(C + C_1)\lambda(\tau) \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} 0,$$

что доказывает одновременное существование интегралов и их равенство между собой.

Теорема об интегрируемости функции и ее сужения

Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $f \in R[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Тогда $f \in R[\alpha, \beta]$.
2. Пусть $f \in R[a, c]$ и $f \in R[c, b]$, $a < c < b$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Доказательство. 1. Воспользуемся критерием Дарбу и, выбрав $\varepsilon > 0$, найдем δ , что выбрав разбиение τ отрезка $[a, b]$ мелкости меньшей, чем δ , будет выполняться

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Пусть теперь τ' - какое-то разбиение $[\alpha, \beta]$ мелкости меньшей δ . Дополним это разбиение, разбив отрезки $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$, до разбиения τ отрезка $[a, b]$ так, чтобы мелкость $\lambda(\tau)$ была меньше, чем δ . Тогда

$$0 \leq S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) \leq S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

2. Интегрируемость постоянной функции нам уже известна. Не нарушая общности будем считать, что f не постоянна, а значит $\omega(f, [a, b]) > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию интегрируемости найдем δ_1, δ_2 , что для любых разбиений отрезка $[a, c]$ таких, что $\lambda(\tau_1) < \delta_1$, и для любых разбиений отрезка $[c, b]$ таких, что $\lambda(\tau_2) < \delta_2$, выполняется

$$S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_{\tau_2}(f) - s_{\tau_2}(f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega(f, [a, b])}\right)$ и τ - разбиение отрезка $[a, b]$, что $\lambda(\tau) < \delta$. Пусть точка c принадлежит какому-то промежутку $[x_{i-1}, x_i]$. Обозначим

$$\tau' = \tau \cup \{c\}, \quad \tau_1 = \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, b].$$

Тогда, согласно выбору δ ,

$$S_{\tau}(f) - s_{\tau}(f) \leq S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) + S_{\tau_2}(f) - s_{\tau_2}(f) + \omega(f, [a, b])\delta < \varepsilon,$$

что, согласно критерию Дарбу, влечет интегрируемость f на $[a, b]$.

Понятие кусочно-непрерывной функции

Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной, если ее множество точек разрыва конечно или пусто, и все разрывы - разрывы первого рода.

Теорема об интегрируемости кусочно-непрерывной функции

Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

Доказательство. Пусть $a_1 < \dots < a_m$ - все точки разрыва функции f на (a, b) . Функция f непрерывна во внутренних точках и имеет конечные односторонние пределы на концах отрезков $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_m, b]$, а значит интегрируема на каждом из них, отличаясь от непрерывной функции не более чем в двух точках, согласно теореме. Тогда, по только что доказанной теореме, она интегрируема на $[a, b]$.

Арифметические свойства интегрируемых функций

Пусть $f, g \in R[a, b]$. Тогда:

1. Линейная комбинация f и g интегрируема, то есть

$$\alpha f + \beta g \in R[a, b], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Произведение f и g интегрируемо, то есть

$$fg \in R[a, b].$$

3. Модуль функции интегрируем, то есть

$$|f| \in R[a, b].$$

4. Если $|f| > C$ на $[a, b]$, $C > 0$, то

$$\frac{1}{f} \in R[a, b].$$

Доказательство. 1. Так как

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)| \leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E),$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E),$$

верное для произвольного множества E .

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, то по следствию из критерия Дарбу интегрируемости функции,

$$\exists \delta_1 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_1 \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}.$$

Аналогично, так как $g \in R[a, b]$, то по следствию из критерия Дарбу интегрируемости функции,

$$\exists \delta_2 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_2 \sum_{i=1}^n \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i=1}^n \omega(\alpha f + \beta g, \Delta_i) \Delta x_i \leq |\alpha| \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i + |\beta| \sum_{i=1}^n \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i \leq \frac{|\alpha| \varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta| \varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, по следствию из критерия Дарбу интегрируемости функции, $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$.

2. Так как $f, g \in R[a, b]$, то по необходимому условию они ограничены на $[a, b]$, то есть

$$\exists C : |f(x)| < C, |g(x)| < C \quad \forall x \in [a, b].$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} & |f(x)g(x) - f(y)g(y)| = \\ & |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq |f(x)| |g(x) - \\ & - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)| \leq C(\omega(f, E) + \omega(g, E)), \end{aligned}$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega(fg, E) \leq C(\omega(f, E) + \omega(g, E)),$$

верное для произвольного множества E . Дальнейшие обоснования проводятся тем же образом, что и в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

4. Так как

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \left| \frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)} \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{C^2} \leq \frac{\omega(f, E)}{C^2},$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega\left(\frac{1}{f}, E\right) \leq \frac{\omega(f, E)}{C^2},$$

верное для любого множества E . Дальнейшие обоснования проводятся тем же образом, что и в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

Теорема о линейности интеграла Римана

Пусть $f, g \in R[a, b]$, тогда

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Доказательство.

То, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$, известно из теоремы об арифметических свойствах интегрируемых функций. Осталось лишь в равенстве

$$\sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

перейти к пределу при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$, откуда и получим требуемое.

Теорема об аддитивности по промежутку

Пусть $f \in R[a, b]$, $c \in [a, b]$, тогда

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$ известна из ранее доказанной теоремы. Значит, для вычисления интеграла мы можем брать удобное для нас разбиение. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$, содержащее точку c . Это разбиение порождает разбиение τ_1 отрезка $[a, c]$ и τ_2 отрезка $[c, b]$, причем $\lambda(\tau_1) \leq \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \leq \lambda(\tau)$. Так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

и при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$ одновременно $\lambda(\tau_1) \rightarrow 0$ и $\lambda(\tau_2) \rightarrow 0$, то получаем требуемое.

Теорема о монотонности интеграла

Пусть $f, g \in R[a, b]$, $a \leq b$ и $f(x) \leq g(x)$ при $x \in [a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$, получаем требуемое.

Теорема о связи модуля интеграла и интеграла от модуля

Пусть $f \in R[a, b]$, тогда

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна из теоремы об арифметических свойствах интегрируемых функций. Так как

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i,$$

то при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$ получается требуемое.

Первая теорема о среднем

Пусть $f, g \in R[a, b]$, g не меняет знак на $[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Тогда:

$$\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx.$$

Кроме того, если $f \in C[a, b]$, то

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f g dx = f(\xi) \int_a^b g dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, тогда

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x), \quad x \in [a, b]$$

и, по теореме о монотонности интеграла,

$$m \int_a^b g dx \leq \int_a^b f g dx \leq M \int_a^b g dx.$$

Если $\int_a^b g dx = 0$, то, согласно неравенству выше,

$$\int_a^b f g dx = 0,$$

а значит равенство

$$\int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx$$

верно при любом μ .

Если же $\int_a^b g dx \neq 0$, то, так как $g \geq 0$, выполнено, что $\int_a^b g dx > 0$.

Поделив все то же неравенство на этот интеграл, приходим к неравенству

$$m \leq \frac{\int_a^b f g dx}{\int_a^b g dx} \leq M.$$

Положив

$$\mu = \frac{\int_a^b f g dx}{\int_a^b g dx},$$

приходим к первому утверждению теоремы.

Если предположить, что $f \in C[a, b]$, то по второй теореме Больцано-Коши для каждого $\mu \in [m, M]$ существует $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$, что доказывает вторую часть теоремы.

Понятие интеграла с переменным верхним пределом

Пусть $f \in R[a, b]$ и $x \in [a, b]$. Функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f dx$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

$$\Phi \in C[a, b].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Так как $f \in R[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть существует $C > 0$, что

$$|f(x)| \leq C, \quad x \in [a, b].$$

Тогда, пользуясь следствием из теоремы об аддитивности, а также теоремой о сравнении интеграла от функции и интеграла от модуля функции, получим:

$$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f| dx \right| \leq C \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dx \right| = C|\Delta x|.$$

Значит, при $\Delta x \rightarrow 0$ выполняется $\Phi(x_0 + \Delta x) \rightarrow \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0 . Так как x_0 - произвольная точка отрезка $[a, b]$, то утверждение доказано.

Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом

Φ дифференцируема в точках непрерывности функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем в этих точках

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть f непрерывна в точке x_0 и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Рассмотрим цепочку преобразований:

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f dt - f(x_0)\Delta x}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt}{\Delta x} \right|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу непрерывности функции f в точке x_0 ,

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in [a, b] : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $|\Delta x| < \delta$, тогда

$$\left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt}{\Delta x} \right| < \varepsilon \cdot \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dt}{\Delta x} \right| = \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Формула Ньютона-Лейбница для непрерывных функций

Пусть $f \in C[a, b]$ и F - ее первообразная. Тогда:

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Согласно следствию о существовании первообразной непрерывной функции, любая первообразная непрерывной функции имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f dt + C.$$

Подставим сначала $x = a$, получим

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Усиленная формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f \in R[a, b]$ и F - некоторая первообразная f на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Введем следующее разбиение отрезка $[a, b]$:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Пусть F - какая-то первообразная f на $[a, b]$. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

Согласно теореме Лагранжа, существует $\xi_k^n \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1}),$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k,$$

и мы получаем интегральную сумму для функции f по отрезку $[a, b]$ с оснащённым разбиением (τ^n, ξ^n) .

Так как $f \in R[a, b]$ и так как при $n \rightarrow \infty$ выполняется $\lambda(\tau^n) \rightarrow 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k = \int_a^b f dx.$$

С другой стороны,

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k,$$

а значит

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Формула интегрирования по частям

Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b]$, причем $u', v' \in R[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx$$

или

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доказательство. Согласно свойствам интегрируемых функций, $uv' \in R[a, b]$ и $u'v \in R[a, b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + uv' \in R[a, b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = \int_a^b (u'v + uv') dx = \int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b,$$

откуда и следует утверждение.

Формула замены переменной

Пусть $f \in C[a, b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$.

Тогда:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \varphi' dt.$$

Доказательство. Ясно, что интеграл от правой функции определен, ведь $f \circ \varphi \in C[\alpha, \beta]$, а значит $f(\varphi) \in R[\alpha, \beta]$ и, по свойствам интегрируемых функций, $f(\varphi)\varphi' \in R[\alpha, \beta]$. Кроме того, если F - первообразная f на $[a, b]$, то $F(\varphi)$ - первообразная $f(\varphi)\varphi'$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \varphi' dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f dx.$$

Теорема об интеграле от четной функции по симметричному промежутку

Пусть $f \in R[0, a]$ и является четной. Тогда:

$$\int_{-a}^a f dx = 2 \int_0^a f dx.$$

Доказательство. Так как $f(-x) = f(x)$, то, по теореме, $f \in R[-a, a]$. Пользуясь аддитивностью интеграла по промежутку, получим:

$$\int_{-a}^a f dx = \int_{-a}^0 f dx + \int_0^a f dx.$$

В первом интеграле можно сделать замену $t = -x, dt = -dx$, откуда

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt.$$

Значит,

$$\int_{-a}^a f dx = \int_0^a f dt + \int_0^a f dx = 2 \int_0^a f dx.$$

Теорема об интеграле от нечетной функции по симметричному промежутку

Пусть $f \in R[0, a]$ и является нечетной. Тогда:

$$\int_{-a}^a f dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей и остается в качестве упражнения.

Теорема об интеграле от периодической функции по периоду

Пусть $f \in R[0, T]$ и является периодической с периодом T . Тогда:

$$\int_a^{a+T} f dx = \int_0^T f dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей и остается в качестве упражнения.

Понятие длины арифметического вектора

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Элемент x иногда называется вектором, а иногда - точкой. Под длиной вектора (или под расстоянием от x до начала координат) будем понимать следующую величину:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Понятие движения

Отображение $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется движением, если

$$|x - y| = |U(x) - U(y)|.$$

Понятие площади

Функция множеств (функционал) $S: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве “квадрируемых” подмножеств плоскости, называется площадью, если

1. $S(A) \geq 0, A \in \mathcal{U}$.
2. Если $A, B \in \mathcal{U}, A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B \in \mathcal{U}$ и

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

3. Площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab .

4. Если $A \in \mathcal{U}$, U - движение, то $U(A) \in \mathcal{U}$ и

$$S(U(A)) = S(A).$$

Понятия подграфика и криволинейной трапеции

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Множество

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется подграфиком функции f .

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то подграфик называется криволинейной трапецией.

Теорема о вычислении площади подграфика

Пусть $f \in R[a, b]$ и G_f - подграфик функции f . Если подграфик имеет площадь, то

$$S(G_f) = \int_a^b f dx.$$

Доказательство. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$. Геометрически очевидно, что

$$s_\tau(f) \leq S(G_f) \leq S_\tau(f).$$

Поскольку $f \in R[a, b]$, то

$$S_\tau(f) \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \int_a^b f dx \xleftarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} s_\tau(f).$$

Значит, по теореме о сжатой переменной,

$$S(G_f) = \int_a^b f dx.$$

Теорема о площади фигуры между графиками функций

Пусть $f, g \in R[a, b]$, $f \leq g$. Тогда площадь фигуры $S(G_{f,g})$, где

$$G_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

вычисляется по формуле

$$S(G_{f,g}) = \int_a^b (g - f) dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перенести фигуру выше оси абсцисс, добавив к f и g такую постоянную c , чтобы $f + c \geq 0$. Тогда, пользуясь свойством сохранения площади при движении, а также предыдущей теоремой,

$$S(G_{f,g}) = S(G_{f+c, g+c}) = S(G_{g+c}) - S(G_{f+c}) = \int_a^b (g + c) dx - \int_a^b (f + c) dx = \int_a^b (g - f) dx.$$

Понятия подграфика и криволинейного сектора

Пусть $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Множество

$$\widetilde{G}_f = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f в полярных координатах. Если функция f непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то подграфик называется криволинейным сектором.

Теорема о площади подграфика в полярных координатах

Пусть $f \in R[\alpha, \beta]$ и $\widetilde{G}_f$ - подграфик функции f . Если подграфик имеет площадь, то

$$S(\widetilde{G}_f) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ - разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi).$$

Воспользовавшись тем, что площадь сектора радиуса r с углом φ равна $\frac{r^2\varphi}{2}$, составим суммы

$$s_{\tau}(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S_{\tau}(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Геометрически очевидно, что

$$s_{\tau}(f) \leq S(\widetilde{G}_f) \leq S_{\tau}(f).$$

Кроме того, $s_{\tau}(f)$ и $S_{\tau}(f)$ - суммы Дарбу функции $\frac{f^2(\varphi)}{2}$. Поскольку $f^2 \in R[\alpha, \beta]$, то

$$S_{\tau}(f) \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi \xleftarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} s_{\tau}(f).$$

Значит, по теореме о сжатой переменной,

$$S(\widetilde{G}_f) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

Понятие объема

Функция множеств (функционал) $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве “кубируемых” подмножеств пространства $\mathbb{R}^3$, называется объемом, если

1. $V(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{U}$
2. Если $A, B \in \mathcal{U}$, $A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B \in \mathcal{U}$ и

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

3. Объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c равен abc
4. Если $A \in \mathcal{U}$, U - движение, то $U(A) \in \mathcal{U}$ и

$$V(U(A)) = V(A).$$

Свойства объема

Пусть $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ - объем. Тогда:

1. Объем монотонен, то есть если $A, B \in \mathcal{U}, A \subset B$,

$$V(A) \leq V(B).$$

2. Пусть $A \in \mathcal{U}$ содержится в некотором прямоугольнике. Тогда $V(A) = 0$.

3. Если множества $A, B \in \mathcal{U}$ пересекаются по множеству нулевого объема, то

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

Доказательство. 1. Заметим, что $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Тогда, предполагая кубируемость $(B \setminus A)$, согласно второму свойству из определения объема,

$$V(A \cup (B \setminus A)) = V(A) + V(B \setminus A) \geq V(A),$$

где последнее неравенство справедливо в виду неотрицательности объема.

2. Выберем $\varepsilon > 0$, тогда найдется параллелепипед P_ε , что

$$A \subset P_\varepsilon \text{ и } V(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Тогда, по доказанному в первом пункте,

$$0 \leq V(A) \leq V(P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

что, в силу произвольности ε , влечет равенство $V(A) = 0$.

3. Пусть $C = A \cap B$, причем $V(C) = 0$, тогда

$$V(A) = V(A \setminus C) + V(C) = V(A \setminus C),$$

откуда

$$V(A \cup B) = V(A \setminus C) + V(B) = V(A) + V(B).$$

Понятие сечения

Пусть T - тело, $x \in \mathbb{R}$. Множество

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$$

называется сечением тела T координатой x .

Теорема о вычислении объема через площади сечений

Пусть тело T удовлетворяет требованиям, озвученным выше. В рамках введенных обозначений, если тело T имеет объем, то

$$V(T) = \int_a^b S dx.$$

Доказательство. Пусть T имеет объем и τ - разбиение $[a, b]$. Пусть

$$m_k = \min_{\Delta_k} S(x), \quad M_k = \max_{\Delta_k} S(x),$$

тогда

$$S(T(\xi_k^*)) = m_k, \quad S(T(\xi_k^{**})) = M_k.$$

Пусть

$$q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^*), \quad Q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^{**}),$$

тогда

$$q_k \subset T_k \subset Q_k, \quad T_k = \{(x, y, z) \in T : x \in \Delta_k\}.$$

Но тогда

$$\bigcup_{k=1}^n q_k \subset T \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k.$$

По пункту 3 леммы о свойствах объема,

$$\begin{aligned} V\left(\bigcup_{k=1}^n q_k\right) &= \sum_{k=1}^n V(q_k) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = s_\tau, \\ V\left(\bigcup_{k=1}^n Q_k\right) &= \sum_{k=1}^n V(Q_k) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S_\tau. \end{aligned}$$

По монотонности объема,

$$s_\tau \leq V(T) \leq S_\tau.$$

Так как s_τ и S_τ - суммы Дарбу функции S , а последняя интегрируема, то

$$V(T) = \int_a^b S dx.$$

Понятие тела вращения

Пусть $f \in C[a, b]$, причем $f \geq 0$. Множество

$$T_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

называется телом вращения, полученным вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox .

Теорема о вычислении объема тела вращения

Пусть T - тело вращения, полученное вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox . Тогда

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2 dx.$$

Доказательство. Ясно, что $S(x) = \pi f^2(x)$, все условия предыдущей теоремы выполнены, а значит

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2 dx.$$

Понятие пути

Путем в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, все координатные функции которого непрерывны на $[a, b]$.

Понятия начала и конца пути, замкнутого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Точка $\gamma(a)$ называется началом пути, а точка $\gamma(b)$ - концом пути γ . Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то путь γ называется замкнутым.

Понятие носителя пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Множество $\gamma([a, b])$ называется носителем пути γ .

Понятие гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, причем

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

Говорят, что γ - путь гладкости $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, если $x_i \in C^m[a, b]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Если $m = 1$, то путь γ часто просто называют гладким.

Понятие кусочно-гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Если отрезок $[a, b]$ можно разбить точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

так, что сужение пути γ на каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, \dots, k\}$ - гладкий путь, то путь γ называется кусочно-гладким.

Понятие эквивалентных путей

Путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется эквивалентным пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, если существует строго возрастающая биекция $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u).$$

Лемма

Введенное понятие эквивалентности путей - отношение эквивалентности на множестве путей.

Доказательство. Проверим все три свойства отношения эквивалентности.

1. Симметричность. Пусть путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u).$$

По свойствам обратных функций, $u^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ - возрастающая биекция, а значит

$$\gamma(u^{-1}) = \tilde{\gamma}(u(u^{-1})) = \tilde{\gamma},$$

и путь $\tilde{\gamma}$ эквивалентен пути γ .

2. Рефлексивность. Каждый путь, конечно, эквивалентен сам себе. В качестве функции u достаточно взять тождественное отображение.
3. Транзитивность. Пусть путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u).$$

Пусть, кроме того, путь $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\hat{\gamma} : [\varphi, \psi] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $w : [\alpha, \beta] \rightarrow [\varphi, \psi]$, что

$$\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}(w).$$

Тогда $w(u) : [a, b] \rightarrow [\varphi, \psi]$ - возрастающая биекция, причем

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u) = \hat{\gamma}(w(u)).$$

Понятие кривой

Класс эквивалентных путей называют кривой, а каждый представитель класса - параметризацией кривой. Кривую часто обозначают $\{\gamma\}$, где γ - какая-либо ее параметризация.

Понятие гладкости кривой

Кривая $\{\gamma\}$ называется гладкой (m -гладкой, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, кусочно-гладкой), если у нее существует гладкая (m -гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.

Понятие вписанной ломаной

Множество отрезков, соединяющих точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, называется ломаной, вписанной в путь γ , отвечающей разбиению τ . Эту ломаную будем обозначать s_τ .

Лемма о длине вписанной ломаной

Длина $|s_\tau|$ ломаной s_τ , вписанной в путь γ , равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Доказательство. Длина отрезка, соединяющего точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, вычисляется по теореме Пифагора и равна, очевидно,

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Тогда длина s_τ ломаной s_τ равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Понятие длины пути

Длиной пути γ называется величина

$$l_\gamma = \sup_\tau |s_\tau|.$$

Понятие спрямляемого пути

Если $l_\gamma < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Лемма о длинах эквивалентных путей

Длины эквивалентных путей равны.

Доказательство. Пусть путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ - возрастающая биекция. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^k$ - дробление $[a, b]$, тогда $\tilde{\tau}_k = u(t_k)$ - дробление $[\alpha, \beta]$. Значит,

$$s_{\tilde{\gamma}} = \sum_{k=1}^n |\tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_k) - \tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = s_\gamma \leq l_\gamma,$$

и, тем самым, $l_{\tilde{\gamma}} \leq l_\gamma$. Меняя γ и $\tilde{\gamma}$ местами, проводя аналогичные приведенным выше выкладки, придем к неравенству $l_\gamma \leq l_{\tilde{\gamma}}$, откуда $l_\gamma = l_{\tilde{\gamma}}$.

Понятие длины кривой

Длиной кривой называют длину любой ее параметризации.

Лемма об аддитивности длины

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ - путь, $c \in (a, b)$, γ^1, γ^2 - сужения пути γ на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$, соответственно. Путь γ спрямляем тогда и только тогда, когда спрямляемы пути γ^1 и γ^2 , причем

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть путь γ спрямляем и пусть τ - разбиение $[a, b]$, содержащее точку c . Ясно, что $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 - разбиение $[a, c]$ и τ_2 - разбиение $[c, b]$. Тогда ломанная s_τ - объединение ломаных s_{τ_1} и s_{τ_2} , причем

$$|s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| = |s_\tau| \leq l_\gamma < +\infty.$$

Отсюда сразу следует, что каждый из путей γ^1 и γ^2 спрямляем. Переходя в предыдущем неравенстве сначала к супремуму по τ_1 , а потом по τ_2 , получим

$$l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} \leq l_\gamma.$$

Докажем достаточность и, заодно, противоположное неравенство. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$. Если оно не содержит точку c , то добавим ее, получив разбиение $\tau' = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 - разбиение $[a, c]$ и τ_2 - разбиение $[c, b]$. Пусть точка c попала в i -ый отрезок разбиения, то есть $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Длина ломаной, отвечающей разбиению τ' , могла только увеличиться по сравнению с длиной ломаной, отвечающей разбиению τ , так как, согласно неравенству треугольника,

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \leq$$

$$\sqrt{(x(c) - x(t_{i-1}))^2 + (y(c) - y(t_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(t_i) - x(c))^2 + (y(t_i) - y(c))^2}$$

Значит,

$$|s_\tau| \leq |s_{\tau'}| = |s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} < +\infty.$$

и, тем самым, кривая γ спрямляема. Переходя к супремуму по τ в левой части неравенства, получим

$$l_\gamma \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Объединяя это неравенство и последнее неравенство, полученное в пункте необходимости, заключаем, что

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2},$$

и теорема полностью доказана.

Достаточное условие спрямляемости пути

Пусть γ - гладкий путь, тогда он спрямляем.

Доказательство. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$. Длина ломаной, вписанной в путь γ , равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа, найдутся точки $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, что

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

откуда

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \Delta t_i.$$

Пусть

$$M_x = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad M_y = \max_{t \in [a, b]} |y'(t)|,$$

$$m_x = \min_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad m_y = \min_{t \in [a, b]} |y'(t)|,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \Delta t_i \leq |s_\tau| \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \Delta t_i,$$

откуда

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \leq |s_\tau| \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a).$$

Переходя к супремуму по τ , имеем

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \leq l_\gamma \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a).$$

и правое неравенство дает возможность заключить, что путь спрямляем.

Теорема о гладкости длины участка пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - гладкий путь. Тогда $l_\gamma \in C^1[a, b]$, причем

$$l'_{\gamma(t)} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$, причем $t_0, t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Согласно последнему неравенству в доказательстве предыдущей теоремы, сохраняя те же обозначения, на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ выполнено

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \Delta t \leq l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0) \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \Delta t.$$

Поделив неравенство на $\Delta t > 0$, получим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \leq \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Так как $M_x = \max_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |x'(t)|$, и функция $x'(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} M_x = x'(t_0).$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} m_x = x'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} M_y = y'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} m_y = y'(t_0).$$

Значит,

$$\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \leq \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}.$$

Аналогично рассматривается случай $\Delta t < 0$. Значит, в силу произвольности t_0 ,

$$l'_{\gamma(t)} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Теорема о вычислении длины пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - гладкий путь, тогда

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Доказательство. Так как $l'_\gamma \in C[a, b]$ и $l_\gamma(a) = 0$, то, по формуле Ньютона-Лейбница

$$l_{\gamma(t)} = l_\gamma(t) - l_\gamma(a) = \int_a^t l'_\gamma dt.$$

Так как $l_\gamma = l_\gamma(b)$, то

$$l_\gamma = l_{\gamma(b)} = \int_a^b l'_\gamma dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Теорема о длине графика гладкой функции

Пусть $f \in C^1[a, b]$ и

$$\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x), x \in [a, b]\}$$

- график функции f . Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx.$$

Доказательство. Действительно, график Γ_f может быть задан следующей параметризацией:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Дальше остается сослаться на только что доказанную теорему.

Теорема о длине графика функции в полярной системе координат

Пусть $f \in C^1[\varphi_0, \varphi_1]$, $f \geq 0$ и

$$\Gamma_f = \{(\varphi, r) : r = f(\varphi), \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$$

- график функции f в полярной системе координат. Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi.$$

Доказательство. Действительно, график Γ_f может быть задан следующей параметризацией:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = f(\varphi) \cos(\varphi) \\ y = f(\varphi) \sin(\varphi) \end{cases}, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1].$$

Дальше остается сослаться на только что доказанную теорему.

Понятие локальной интегрируемости

Говорят, что функция f локально интегрируема на множестве E , и пишут $f \in R_{loc}(E)$, если $f \in R[a, b]$ для любого $[a, b] \subset E$.

Понятие несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. Тогда символ

$$\int_a^b f dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a, b)$.

Понятие значения несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ и $\omega \in [a, b)$. Предел

$$\lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла от функции f по множеству $[a, b)$.

Понятие сходящегося несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ и $\omega \in [a, b)$. Если предел

$$\lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f dx$$

существует в $\mathbb{R}$, то несобственный интеграл называется сходящимся. Иначе - расходящимся.

Понятия интегралов первого и второго родов

Несобственный интеграл по неограниченному промежутку часто называется несобственным интегралом первого рода.

Несобственный интеграл от неограниченной функции по промежутку конечной длины часто называется несобственным интегралом второго рода.

Лемма о совпадении несобственного интеграла и интеграла Римана

Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f dx = \int_a^b f dx,$$

где справа стоит интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из свойства непрерывности интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема о линейности несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если сходятся интегралы

$$\int_a^b f dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g dx,$$

то

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в равенстве, справедливом для интеграла Римана:

$$\int_a^\omega (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^\omega f dx + \beta \int_a^\omega g dx.$$

Теорема об аддитивности по промежутку

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда для любого $c \in (a, b)$ справедливо равенство

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx,$$

причем интегралы

$$\int_a^b f \, dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f \, dx$$

сходятся или нет одновременно.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в равенстве, справедливом для интеграла Римана:

$$\int_a^\omega f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^\omega f \, dx.$$

Понятие остатка несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\int_c^b f \, dx$$

называется остатком несобственного интеграла от f по $[a, b)$.

Лемма

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда сходимость несобственного интеграла от f по $[a, b)$ равносильна тому, что

$$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_c^b f \, dx = 0.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть несобственный интеграл от f по $[a, b)$ сходится. Тогда, по теореме об аддитивности по промежутку,

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx.$$

Пусть теперь $c \rightarrow b - 0$, тогда

$$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f \, dx = \int_a^b f \, dx,$$

откуда и следует требуемое.

Докажем достаточность. Пусть остаток интеграла стремится к нулю. Значит, при некотором $c \in (a, b)$

$$\int_c^b f \, dx \in \mathbb{R}.$$

Но тогда, при $\omega > c$ выполнено

$$\int_a^\omega f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^\omega f \, dx$$

и при $\omega \rightarrow b - 0$ приходим к требуемому.

Теорема о монотонности несобственного интеграла

Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$, причем

$$\int_a^b f \, dx \in \overline{\mathbb{R}} \text{ и } \int_a^b g \, dx \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Если $f \leq g$ на $[a, b)$, то

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в неравенстве, справедливом для интеграла Римана:

$$\int_a^\omega f \, dx \leq \int_a^\omega g \, dx.$$

Формула интегрирования по частям

Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b uv' \, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' \, dx, \quad uv \Big|_a^b = \lim_{\omega \rightarrow b-0} u(\omega)v(\omega) - u(a)v(a),$$

или

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du,$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует (в $\mathbb{R}$) хотя бы два предела из трех.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в верном для интеграла Римана равенстве:

$$\int_a^\omega uv' \, dx = uv \Big|_a^\omega - \int_a^\omega vu' \, dx.$$

Формула замены переменной

Пусть $f \in C[A, B)$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta) \rightarrow [A, B)$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$. Пусть, кроме того, существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' \, dt,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi)\varphi' dt, \quad F(C) = \int_{\varphi(\alpha)}^C f dx.$$

Согласно формуле замены переменной в интеграле Римана, $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

1. Пусть существует

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f dx = I \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Докажем, что второй интеграл тоже существует и равен I . Пусть $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$, причем $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \in [A, B)$ и $\varphi(\gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(\beta-0)$. Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\varphi(\gamma_n)) = I.$$

В силу произвольности последовательности γ_n , приходим к требуемому.

2. Пусть теперь существует

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi' dt = I \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Докажем, что второй интеграл тоже существует. Тогда, по уже доказанному в первом пункте, он равен I . Если $\varphi(\beta-0) \in [A, B)$, то интеграл существует в собственном смысле и доказывать нечего. Пусть теперь $\varphi(\beta-0) = B$. Пусть $C_n \in [A, B)$, $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$. Не нарушая общности можно считать, что $C_n \in [\varphi(\alpha), B)$. По теореме Больцано-Коши, найдутся точки $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$, что $\varphi(\gamma_n) = C_n$. Покажем, что $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$.

Если некоторая подпоследовательность $\gamma_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tau \in [\alpha, \beta)$, то, по непрерывности φ , $\varphi(\gamma_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(\tau) < B$, что неверно. Значит, $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\gamma_n) = I.$$

Критерий сходимости интеграла от знакопостоянной функции

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$. Тогда функция

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f dx, \quad \omega \in [a, b),$$

возрастает, а сходимость интеграла

$$\int_a^b f dx$$

равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.

Доказательство. Ясно, что если $a \leq \omega_1 \leq \omega_2 < b$, то, так как $f \geq 0$, по свойству интеграла Римана,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f \, dx \geq 0.$$

Но тогда

$$F(\omega_2) = \int_a^{\omega_2} f \, dx = \int_a^{\omega_1} f \, dx + \int_{\omega_1}^{\omega_2} f \, dx \geq \int_a^{\omega_1} f \, dx = F(\omega_1),$$

откуда $F(\omega_2) \geq F(\omega_1)$, что и доказывает неубывание $F(\omega)$.

Значит, вопрос сходимости несобственного интеграла, то есть вопрос существования конечного предела $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow b - 0$, сводится к теореме Вейерштрасса. Как мы знаем, конечность предела (или сходимость заявленного интеграла) в этом случае равносильна ограниченности $F(\omega)$.

Признаки сравнения

Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$ и $0 \leq f \leq g$ при $x \in [a, b)$. Тогда:

1. Сходимость интеграла от g по $[a, b)$ влечет сходимость интеграла от f по $[a, b)$, то есть

$$\int_a^b g \, dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f \, dx < +\infty.$$

2. Расходимость интеграла от f по $[a, b)$ влечет расходимость интеграла от g по $[a, b)$, то есть

$$\int_a^b f \, dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b g \, dx = +\infty.$$

3. Если $f \sim g$ при $x \rightarrow b - 0$, то интегралы от f и g по $[a, b)$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Согласно предыдущей теореме, функция

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f \, dx$$

не убывает с ростом ω . Используя монотонность интеграла Римана, а также используя теорему Вейерштрасса, при каждом $\omega \in [a, b)$ справедлива цепочка неравенств:

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f \, dx \leq \int_a^{\omega} g \, dx \leq \sup_{\omega \in [a, b)} \int_a^{\omega} g \, dx = \int_a^b g \, dx < +\infty,$$

где последнее неравенство выполнено, согласно условию. Но тогда $F(\omega)$ ограничена, а значит, по предыдущей теореме, интеграл от f по $[a, b)$ сходится.

2. От противного. Пусть интеграл

$$\int_a^b g \, dx$$

сходится. Тогда, по только что доказанному первому пункту, сходится и

$$\int_a^b f \, dx,$$

что противоречит условию.

3. Согласно определению, эквивалентность f и g при $x \rightarrow b - 0$ означает, что существует такая функция α , что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \text{ при } x \in U(b) \cap [a, b), \text{ причем } \lim_{x \rightarrow b-0} \alpha(x) = 1.$$

Тогда существует $\Delta > a$, что при $x \in [\Delta, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2},$$

откуда, при $x \in [\Delta, b)$,

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Кроме того, сходимость интегралов

$$\int_a^b f \, dx \text{ и } \int_a^b g \, dx$$

равносильна сходимости интегралов

$$\int_{\Delta}^b f \, dx \text{ и } \int_{\Delta}^b g \, dx.$$

Для последних же рассуждения проводятся использованием пунктов 1 и 2 данной теоремы, опираясь на приведенное выше неравенство.

Скажем, если сходится интеграл от g по $[\Delta, b)$, то, используя правую часть полученного неравенства, сходится и интеграл от f по $[\Delta, b)$. Если же расходится интеграл от f по $[\Delta, b)$, то, опять же, используя правую часть того же самого неравенства, расходится и интеграл от g по $[\Delta, b)$. Аналогичные рассуждения относительно левого неравенства завершают доказательство.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Для того чтобы интеграл

$$\int_a^b f \, dx$$

сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \mid \int_{\delta_1}^{\delta_2} f \, dx \mid < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f \, dx.$$

Согласно определению, сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow b - 0$. Согласно критерию Коши существования предела функции, это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \mid F(\delta_2) - F(\delta_1) \mid < \varepsilon.$$

Последнее же неравенство, в силу свойств интеграла, переписывается как

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f \, dx \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое.

Понятие абсолютной сходимости

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f| \, dx.$$

Теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, то, согласно критерию Коши,

$$\exists \Delta : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \quad \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f| \, dx \right| < \varepsilon.$$

Но, согласно свойствам интеграла,

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f \, dx \right| \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f| \, dx \right| < \varepsilon,$$

а значит, по критерию Коши, интеграл от f по $[a, b)$ сходится.

Понятие условно сходящегося интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл от f по $[a, b)$ сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что интеграл сходится условно.

Понятие несобственного интеграла с двумя особенностями на концах

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Тогда символ

$$\int_a^b f \, dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству (a, b) .

Понятие значения несобственного интеграла с двумя особенностями на концах

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Тогда величина

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow a+0} \int_{\omega_1}^c f \, dx + \lim_{\omega_2 \rightarrow b-0} \int_c^{\omega_2} f \, dx,$$

если оба предела существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и не равны бесконечностям разных знаков, называется значением несобственного интеграла от функции f по множеству (a, b) .

Понятие сходящегося (расходящегося) несобственного интеграла

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Если

$$\left(\lim_{\omega_1 \rightarrow a+0} \int_{\omega_1}^c f \, dx + \lim_{\omega_2 \rightarrow b-0} \int_c^{\omega_2} f \, dx \right) \in \mathbb{R}$$

то несобственный интеграл от функции f по (a, b) называется сходящимся, иначе - расходящимся.

Лемма

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Легко проверить, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Пусть $n > 1$, тогда

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(-\cos(x)) = -\cos(x) \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

где последнее равенство верно в силу того, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. В итоге,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

откуда легко получается требуемое.

Формула Валлиса

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Доказательство. Ясно, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Обозначив

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx,$$

получим $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, откуда, по предыдущей лемме,

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Пусть

$$x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2,$$

тогда

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi,$$

откуда, по теореме о сжатой переменной, получается требуемое.

Интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Легко проверить, что при $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$e^x \geq 1 + x.$$

Тогда

$$(1 - x^2) \leq e^{-x^2} = (e^{x^2})^{-1} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Будем рассматривать левое неравенство при $x \in [-1, 1]$, а правое - при $x \in \mathbb{R}$, тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(1 + x^2)^k},$$

а значит, в силу неотрицательности интеграла от неотрицательной функции и монотонности интеграла

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^k dx \leq \int_{-1}^1 e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^k}.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = \sin t$, а в последнем замену $x = \tan t$. Тогда, согласно формуле замены переменной, придем к неравенству

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2} t dt,$$

откуда, в силу четности косинуса,

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2} t dt.$$

Так как, как было показано ранее,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то приходим к цепочке неравенств

$$2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} \, dx \leq \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Сделаем в интеграле замену $t = \sqrt{k}x$ и придем к неравенству

$$2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \leq \pi \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

или

$$2\sqrt{k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \leq \pi \sqrt{k} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}.$$

По формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}.$$

Тогда

$$2\sqrt{k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}$$

и

$$\pi \sqrt{k} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^{-1} \frac{2k}{2k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы о сжатой переменной.

Понятие ряда

Пусть дана последовательность a_k . Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

называется числовым рядом с общим членом a_k .

Понятие частичной суммы ряда

n -ой частичной суммой ряда с общим членом a_k называется величина

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Понятие суммы ряда

Суммой ряда с общим членом a_k называют предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Понятие сходящегося ряда

Ряд с общим членом a_k называется сходящимся, если его сумма существует в $\overline{\mathbb{R}}$. Иначе ряд называется расходящимся.

Критерий Коши

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно определению, сходимость ряда - это сходимость последовательности его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

По критерию Коши эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \mid S_{n+p} - S_n < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно тому, что $\mid \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \mid < \varepsilon$.

Необходимое условие сходимости ряда

Пусть ряд с общим членом a_k сходится. Тогда

$$a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Так как ряд сходится, то, так как S_{n-1} - подпоследовательность S_n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}.$$

Но тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S - S = 0.$$

Пусть дан ряд с общим членом a_k . Тогда

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

называется m -ым остатком ряда.

Лемма о сходимости ряда в терминах остатков

Для сходимости ряда с общим членом a_k необходимо и достаточно, чтобы сходился любой его остаток R_m . В этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + R_m = S_m + R_m.$$

Доказательство. Ясно, что при $n > m$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k.$$

Так как первое слагаемое после знака равенства - число, не зависящее от n , то сходимость исходного ряда равносильна сходимости R_m . Заявленное равенство получается предельным переходом.

Лемма о стремлении остатка к нулю

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0.$$

Доказательство. 1. Докажем необходимость. Пусть ряд сходится. Тогда, по предыдущей лемме,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_m + R_m.$$

Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$.

2. Докажем достаточность. Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$. Тогда для всех номеров m определен и конечен R_m , а значит, например, сходится R_1 . Но тогда, по замечанию выше, сходится и ряд.

Лемма о линейности суммирования

Пусть сходятся ряды с общими членами a_k и b_k . Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд с общим членом $\alpha a_k + \beta b_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S_n^B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение.

Лемма о монотонности суммирования

Пусть $a_k \leq b_k$ и ряды с общими членами a_k и b_k имеют суммы в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \leq S_n^B \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^B \Rightarrow S^A \leq S^B.$$

Критерий сходимости ряда с положительными членами

Пусть $a_k \geq 0$. Тогда последовательность частичных сумм ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

возрастает и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм.

Доказательство. Так как $a_k \geq 0$, точнее

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Тем самым, вопрос о наличии (и конечности) предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n .

Признаки сравнения

Пусть $0 \leq a_k \leq b_k$. Тогда:

1. Сходимость ряда с общим членом b_k влечет сходимость ряда с общим членом a_k , то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$

2. Расходимость ряда с общим членом a_k влечет расходимость ряда с общим членом b_k , то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty.$$

3. Если $a_k \sim b_k$ при $k \rightarrow +\infty$, то ряды с общими членами a_k и b_k сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Обозначим

$$S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A , согласно предыдущей теореме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.

2. Докажем второй пункт. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k , то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k . Это противоречит условию.

3. Докажем третий пункт. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow \frac{1}{2}b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}b_k.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичным рассуждениям в соответствующей теореме про интегралы, и остаются в качестве упражнения.

Радикальный признак Коши.

Пусть $a_k > 0$ и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. В силу того, что верхний предел - это частичный предел, найдется подпоследовательность a_{k_n} такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{a_{k_n}} = l.$$

Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого номера n_0 , выполняется

$$\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > 1 \Rightarrow a_{k_n} > 1.$$

Отсюда следует, что a_{k_n} не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости ряда, и ряд с общим членом a_k расходится.

2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. По свойству верхнего предела,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \sqrt[k]{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1.$$

Действительно, иначе мы могли бы из последовательности $\sqrt[k]{a_k}$ выделить подпоследовательность, все члены которой больше, чем $\frac{l+1}{2}$, а значит ее верхний предел был бы не меньше, чем $\frac{l+1}{2} > l$, что противоречит условию. Из полученного неравенства приходим к тому, что при $k > k_0$ выполняется

$$a_k < \left(\frac{l+1}{2} \right)^k.$$

Так как ряд

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2} \right)^k$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит сходится и исходный ряд.

Признак Даламбера

Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Так как $l > 1$, то при $k > k_0$ оказывается справедливым неравенство

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow a_k \geq a_{k_0+1} > 0,$$

откуда следует, что a_k не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию сходимости ряда.

2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Согласно определению предела, найдется k_0 , что при $k > k_0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1,$$

а значит

$$a_{k+1} < \left(\frac{l+1}{2} \right) a_k.$$

По индукции, при $k > k_0$ имеем

$$a_k \leq \left(\frac{l+1}{2} \right)^{k-k_0-1} a_{k_0+1}.$$

Так как ряд

$$a_{k_0+1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2} \right)^{k-k_0-1}$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит сходится и исходный ряд.

Признак Раабе.

Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.
 2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
-

Схема Куммера

Пусть $a_k, b_k > 0$, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$$

расходится. Пусть, кроме того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда:

1. Если $l > 0$, то ряд с общим членом a_k сходится.
2. Если $l < 0$, то ряд с общим членом a_k расходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Так как $l > 0$, то существует k_0 , что при $k > k_0$ выполнено

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} > \frac{l}{2} a_{k+1} > 0.$$

В частности, $a_k b_k > a_{k+1} b_{k+1}$, а значит последовательность $a_k b_k$ убывает при $k > k_0$. Кроме того, она ограничена снизу, например, нулем, а значит имеет предел, например, равный A . Но тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^k (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k_0+1} b_{k_0+1} - a_{k+1} b_{k+1}) = a_{k_0+1} b_{k_0+1} - A < +\infty. \end{aligned}$$

Значит, сходится и $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n+1}$, но тогда сходится и ряд с общим членом a_n .

2. Докажем второй пункт. Пусть $l < 0$. Тогда существует k_0 , что при $k > k_0$

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} < 0 \Rightarrow b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1} < 0.$$

Отсюда получаем, что $b_{k+1} a_{k+1} > b_k a_k$ и последовательность $b_k a_k$ монотонно возрастает при $k > k_0$. Значит,

$$a_k b_k \geq a_{k_0+1} b_{k_0+1} \Rightarrow a_k \geq \frac{a_{k_0+1} b_{k_0+1}}{b_k}$$

и ряд $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$ расходится согласно признакам сравнения.

Теорема

Пусть $a_k > 0, a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

1. Если ряд с общим членом a_k расходится, то существует последовательность b_k , что $b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ и что ряд с общим членом $a_k b_k$ расходится.
2. Если ряд с общим членом a_k сходится, то существует последовательность b_k , что $b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$ и что ряд с общим членом $a_k b_k$ сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Положим

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}}, \quad S_k = \sum_{i=1}^k a_i, \quad S_0 = 0.$$

Тогда

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \frac{S_k - S_{k-1}}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}.$$

Ясно, что ряд с таким общим членом расходится, так как

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}) = \sqrt{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

2. Докажем второй пункт. Положим

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{R_{k-1}}}, \quad R_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_k b_k &= \frac{a_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{R_{k-1} - R_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})(\sqrt{R_{k-1}} + \sqrt{R_k})}{\sqrt{R_{k-1}}} \leq \\ &\leq 2(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}). \end{aligned}$$

Понятно, что ряд с общим членом $(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})$ сходится, ведь

$$\sum_{k=1}^n (\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}) = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{R_0},$$

а значит, по признаку сравнения, сходится и требуемый ряд.

Интегральный признак Коши

Пусть $f \in R_{loc}[1, \infty)$ и монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд с общим членом $f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^\infty f \, dx.$$

Доказательство. Пусть, скажем, f убывает. Тогда, если $f(x_0) < 0$, в силу монотонности, неравенство $f(x) \leq f(x_0) < 0$ выполняется при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится. Кроме того,

$$\int_{x_0}^A f \, dx \leq f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -\infty,$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \geq 0$.

В этом случае, вспоминая, что f убывает, очевидно следующее неравенство:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \, dx \leq f(k),$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Учитывая, что функция

$$F(\omega) = \int_1^\omega f \, dx$$

возрастает, для существования предела $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n+1)$. Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ и рассуждениями, аналогичными приводимым в доказательстве третьего пункта признаков сравнения.

Лемма

Пусть f неотрицательна, убывает на $[1, +\infty)$ и $f \in R_{loc}[1, +\infty)$. Тогда последовательность

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f \, dx$$

имеет предел.

Доказательство. Докажем, что A_n возрастает. Действительно,

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f \, dx \geq 0.$$

Покажем, что A_n ограничена сверху. Для этого проведем следующее преобразование:

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f \, dx.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^n f(k+1),$$

то, согласно полученному в доказательстве интегрального признака Коши неравенству,

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f \, dx \leq 0,$$

откуда

$$A_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1).$$

Далее остается сослаться на теорему Вейерштрасса.

Понятие абсолютной сходимости

Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.

Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда, согласно тому же критерию Коши получаем, что ряд с общим членом a_k сходится.

Понятие условной сходимости

Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).

Признак Лейбница

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю, сходится.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность S_{2n} последовательности частичных сумм данного ряда. Группируя, получим, что

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2},$$

где неравенство верно ввиду неотрицательности скобок (в силу убывания a_n). Тем самым, последовательность S_{2n} возрастает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, по теореме Вейерштрасса, последовательность S_{2n} имеет предел, например S . Но тогда

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S,$$

так как общий член стремится к нулю. Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Тогда, по доказанному,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |S_{2n} - S| < \varepsilon,$$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |S_{2n-1} - S| < \varepsilon.$$

Но тогда, если $k > \max(2n_0, 2n_1 - 1)$, то либо $k = 2n$ и $n > n_0$, либо $k = 2n - 1$ и $n > n_1$, а значит

$$|S_k - S| < \varepsilon,$$

что доказывает сходимость рассматриваемого ряда.

Лемма об остатке ряда лейбницевского типа

Пусть рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю. Тогда

$$|R_n| \leq a_{n+1}, \quad R_n (-1)^n \geq 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что остаток ряда лейбницевского типа - с точностью до знака ряд лейбницевского типа и применять к нему сформулированное выше замечание.

Понятие функциональной последовательности

Последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, называется функциональной последовательностью.

Понятие функционального ряда

Пусть дана функциональная последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots$$

называется функциональным рядом с общим членом f_k .

Понятие поточечной сходимости функциональной последовательности

Говорят, что функциональная последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функциональной последовательности f_k .

Понятие частичной суммы функционального ряда

n -ой частичной суммой функционального ряда с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

Понятие сходимости функционального ряда

Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходится.}$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функционального ряда с общим членом f_k .

Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности

Говорят, что последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится к функции f на множестве $D \subset X$ равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall x \in D |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} f.$$

Понятие равномерно сходящегося ряда

Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на множестве $D \subset X$, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на D .

Критерий Коши равномерной сходимости ф. п.

Для того чтобы функциональная последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходилась равномерно на $D \subset X$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости f_k к некоторой функции f ,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \quad |f_k - f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $k + p > k_0$ и, по неравенству треугольника,

$$|f_{k+p} - f_k| \leq |f_{k+p} - f| + |f - f_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

гарантирует, что при каждом $x \in D$ числовая последовательность фундаментальна, значит сходится. Положим

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x), \quad x \in D.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдем k_0 , что при $k > k_0$ и $p \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in D \quad |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\forall x \in D \quad |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое.

Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, так как равномерная сходимость ряда - суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Необходимое условие равномерной сходимости ряда

Если ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$, то

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} 0.$$

Доказательство. Доказательство получается сразу, если положить в критерии Коши $p = 1$.

Признак Вейерштрасса

Пусть $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset X$. Если существует последовательность a_k , что

$$|f_k(x)| \leq a_k, \quad x \in D,$$

и ряд с общим членом a_k сходится, то функциональный ряд с общим членом f_k сходится равномерно (и абсолютно) на D .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Используя критерий Коши и учитывая неотрицательность a_k , имеем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

что верно сразу для всех $x \in D$. Значит, используя критерий Коши равномерной сходимости ряда, а также определение абсолютной сходимости, получаем требуемое.

Теорема о перестановке предельных переходов

Пусть $f, f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f .
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 - предельная для D .

Тогда пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

существуют (в $\mathbb{R}$) и совпадают, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Перейдя к пределу при $x \rightarrow x_0$, получим

$$|a_{k+p} - a_k| \leq \varepsilon,$$

что влечет фундаментальность и, как следствие, сходимость последовательности a_k .

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу равномерной сходимости на D ,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \forall x \in D |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу сходимости последовательности a_k к числу A ,

$$\exists k_1 : \forall k > k_1 |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $m = 1 + \max(k_0, k_1)$, тогда одновременно, причем $\forall x \in D$,

$$|a_m - A| < \varepsilon \text{ и } |f_{m(x)} - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Согласно определению предела функции,

$$\exists \dot{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap D \quad |f_m(x) - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Значит, при $x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap D$, имеем

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Теорема о почленном переходе к пределу

Пусть $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S .
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 - предельная для D .

Тогда ряд с общим членом a_k сходится к сумме A , причем $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = A$, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применять предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

Теорема о непрерывности предельной функции

Пусть $f, f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f .
2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0 .

Тогда f непрерывна в x_0 . В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D , то и f непрерывна на D .

Доказательство. Если x_0 - изолированная точка, то, так как любая функция непрерывна в изолированной точке своей области определения, утверждение доказано. Если x_0 - предельная, то выполнены условия теоремы о перестановке предельных переходов, где $a_k = f_k(x_0)$. Поэтому,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0) = f(x_0),$$

что и завершает доказательство.

Теорема о непрерывности суммы ряда

Пусть $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S .
2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0 .

Тогда сумма ряда S непрерывна в x_0 . В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D , то и сумма ряда непрерывна на D .

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

Интегрирование и предельный переход

Пусть $f_k, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k \in C[a, b]$, и

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{[a, b]} f.$$

Тогда $f \in C[a, b]$ и

$$\int_a^x f_k dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{[a, b]} \int_a^x f dx.$$

Доказательство. То, что $f \in C[a, b]$ следует из теоремы о непрерывности предельной функции. Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - f_{k(x)}| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Пусть $k > k_0$, тогда

$$\left| \int_a^x f_k dx - \int_a^x f dx \right| \leq \int_a^x |f_k - f| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (x-a) \leq \varepsilon,$$

причем последняя оценка справедлива при всех $x \in [a, b]$. Это и доказывает равномерную сходимость.

Теорема о почленном интегрировании ряда.

Пусть $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k \in C[a, b]$. Если ряд с общим членом f_k сходится равномерно к функции S на $[a, b]$, то $S \in C[a, b]$, причем

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_k dx \right) \quad x \in [a, b].$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к частичным суммам рассматриваемого ряда.

Дифференцирование и предельный переход

Пусть $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что последовательность $f_k(x_0)$ сходится.
2. Последовательность производных f'_k сходится на $[a, b]$ равномерно к функции g .

то

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{[a, b]} f,$$

причем $f' = g$ на $[a, b]$. В частности, $f \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Сперва заметим, что $g \in C[a, b]$. По теореме об интегрировании и предельном переходе,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_k dx = \int_{x_0}^x g dx,$$

где последняя сходимость равномерна по $x \in [a, b]$. В то же время,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \int_{x_0}^x g dx.$$

Так как, согласно условию, существует предел

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0),$$

то

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = C + \int_{x_0}^x g dx,$$

где последняя сходимость, опять-таки, равномерна на $[a, b]$. Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, получим

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

что и завершает доказательство.

Теорема о почленном дифференцировании ряда

Пусть $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что ряд с общим членом $f_k(x_0)$ сходится.
2. Ряд с общим членом f'_k сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме $\tilde{S}$,

то ряд с общим членом f_k сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме S , причем $S' = \tilde{S}$ на $[a, b]$. В частности, $S \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

Понятие степенного ряда

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $a_k \in \mathbb{R}$.

Первая теорема Абеля

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$.

1. Если существует x_1 , что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \text{ сходитс}я,$$

то ряд с общим членом $a_k x^k$ сходится абсолютно при всех x таких, что $|x| < |x_1|$.

2. Если существует x_1 , что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \text{ расходится,}$$

то ряд с общим членом $a_k x^k$ расходится при всех x таких, что $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Докажем первый пункт. Ясно, что имеет смысл рассматривать случай $x_1 \neq 0$, ведь иначе множество x таких, что $|x| < |x_1|$, пусто. Пусть $x_1 \leq 0$ и $|x| < |x_1|$, тогда

$$|a_k x^k| = |a_k x_1^k| \left| \frac{x}{x_1} \right|^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k x_1^k$ сходится, то его общий член стремится к нулю, а значит ограничен. Тем самым, $|a_k x_1^k| \leq C$, а тогда

$$|a_k x_1^k| \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \leq C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k.$$

Заметим, что

$$0 \leq \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1,$$

а значит ряд с общим членом

$$C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k$$

сходится как геометрическая прогрессия. Отсюда, согласно признакам сравнения, сходится, причем абсолютно, исходный ряд.

2. Докажем второй пункт. От противного. Если бы при x таком, что $|x| > |x_1|$, ряд сходилс}я, то по только что доказанному, он бы сходилс}я и при $x = x_1$, что противоречит условию.

О виде множества сходимости степенного ряда

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$. Тогда существует $R \in [0, +\infty]$, что при $x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -R); (R, +\infty)$ ряд расходится.

Понятие радиуса сходимости степенного ряда

Число R , существование которого доказано в предыдущем следствии, называется радиусом сходимости степенного ряда с общим членом $a_k x^k$, а множество $(-R, R)$ - интервалом сходимости соответствующего степенного ряда.

Формула Коши-Адамара

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$. Тогда

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Найдем

$$l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, причем абсолютно. Если $l > 1$, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Если договориться, что $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{(+\infty)} = 0$, то последнее равносильно неравенствам

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{и} \quad |x| > \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

соответственно, что и доказывает теорему.

Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ рассматриваемый ряд сходится равномерно на $[-r, r]$.

Доказательство. Для общего члена ряда при $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$|a_k x^k| \leq a_k r^k.$$

Но, так как $r \in (0, R)$, то ряд с общим членом $a_k r^k$ сходится. Значит, утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса.

Вторая теорема Абеля

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Если сходится ряд с общим членом $a_k R^k$, то исходный ряд сходится равномерно на $[0, R]$.

Доказательство. Так как ряд с общим членом $a_k R^k$ сходится, то, согласно критерию Коши, по $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \right| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_0$, $m > n$. Обозначим

$$A_m = \sum_{k=n+1}^m a_k R^k, \quad A_n = 0$$

и заметим, что

$$|A_m| < \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) \left(\frac{x}{R}\right)^k = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right) + A_{n+p} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}. \end{aligned}$$

Так как $x \in [0, R]$, то

$$\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \geq 0, \quad \left(\frac{x}{R}\right)^k \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right) + |A_{n+p}| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} < \\ &< \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right) + \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \right) = \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, согласно критерию Коши равномерной сходимости и следует утверждение.

Теорема о непрерывности суммы степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Тогда сумма ряда непрерывна на множестве сходимости $\langle -R, R \rangle$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ и

$$\delta = \min \left(\frac{R - x_0}{2}, \frac{x_0 + R}{2} \right).$$

Тогда $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R)$ и, по теореме о равномерной сходимости степенного ряда, на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ряд сходится равномерно. Так как члены рассматриваемого ряда непрерывны на этом отрезке, то по теореме о непрерывности суммы ряда, суммы рассматриваемого ряда тоже непрерывна на этом отрезке. В частности, она непрерывна при $x = x_0$.

Допустим теперь, что $x_0 = R$, $R \in \langle -R, R \rangle$. Тогда, согласно второй теореме Абеля, рассматриваемый ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$. Аналогичные приведенным ранее рассуждения показывают, что сумма рассматриваемого ряда непрерывна при $x = R$. Аналогичным образом рассматривается случай $x_0 = -R$, $-R \in \langle -R, R \rangle$.

Теорема об интегрировании степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Тогда сумма ряда интегрируема по любому отрезку $[a, b]$ внутри множества сходимости $\langle -R, R \rangle$, причем

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Доказательство. Опираясь на теоремы и данная теорема - прямое следствие теоремы об интегрировании равномерно сходящегося ряда.

Лемма

Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

совпадают.

Доказательство. Докажем, например, что радиусы сходимости первого и второго рядов совпадают. Так как $1 \leq \sqrt[k]{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$, то по $\varepsilon > 0$ найдется k_0 , что $\forall k > k_0$ выполняется

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \sqrt[k]{k|a_k|} < (1 + \varepsilon) \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} \leq (1 + \varepsilon) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

В силу произвольности ε ,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

а значит, по теореме Коши-Адамара, радиусы сходимости одинаковы. Аналогично доказывается, что радиус сходимости третьего ряда такой же.

Теорема о дифференцировании степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$, R - его радиус сходимости, S - его сумма. Тогда $S \in C^\infty(-R, R)$, причем

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)a_k x^{k-m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как было доказано в предыдущей лемме, ряд, полученный формальным дифференцированием, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

имеет тот же радиус сходимости R , что и исходный. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Тогда, выбрав

$$\delta = \frac{1}{2} \min(R - x_0, x_0 + R),$$

получим, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R),$$

а значит ряд, полученный формальным дифференцированием, сходится на этом отрезке равномерно. Так как исходный ряд сходится (хотя бы в точке $x_0 \in (-R, R)$), то по теореме о дифференцировании функционального ряда заключаем, что

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k.$$

Так как x_0 - произвольная точка из интервала сходимости, то доказано, что S дифференцируема на $(-R, R)$ и

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

Из теоремы о непрерывности суммы степенного ряда заключаем, что $S \in C^1(-R, R)$. Дальнейшее доказательство проводится по индукции.

Интегральная форма остаточного члена

Пусть функция f непрерывно дифференцируема $(n + 1)$ раз на отрезке с концами x_0 и x . Тогда

$$r_{n(x, x_0)} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница и проинтегрируем по частям. Тогда,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = - \int_{x_0}^x f'(t)(x-t)' dt = \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt = f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f''(t)((x-t)^2)' dt. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Теперь, используя первую теорему о среднем, мы без труда получим остаток в форме Лагранжа:

$$r_{n(x, x_0)} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0 .

Понятие ряда Тейлора

Пусть функция f бесконечно число раз дифференцируема в точке x_0 . Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

называется рядом Тейлора, порожденным в точке x_0 функцией f . В случае $x_0 = 0$ ряд Тейлора часто называется рядом Маклорена.

Критерий представимости функции своим рядом Тейлора

Для того чтобы ряд Тейлора, построенный по функции f , сходил к этой функции в точке x необходимо и достаточно, чтобы

$$r_{n(x, x_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из представления

$$f(x) = P_{n(x, x_0)} + r_{n(x, x_0)}.$$

Достаточное условие представимости функции своим рядом Тейлора

Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке I с концами x_0 и x . Если на этом отрезке производные функции f равномерно ограничены, то есть

$$|f^{(n)}(t)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad t \in I,$$

то

$$r_{n(x, x_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то есть ряд Тейлора, построенный по функции f , сходится к этой функции в точке x .

Доказательство. Рассмотрим остаток в форме Лагранжа. Согласно условию,

$$|r_{n(x, x_0)}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где последнее утверждение верно в силу леммы. Последнее утверждение теоремы следует из (предыдущей) теоремы.

Теорема единственности

Пусть при $|x - x_0| < R$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k(x-x_0)}^k.$$

Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Согласно теореме о дифференцировании суммы степенного ряда,

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) a_{k(x-x_0)}^{k-m}.$$

Подставив $x = x_0$, получаем, что

$$f^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_m,$$

откуда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

Ряд Маклорена для показательной функции

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = e^x$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \leq e^{|x|},$$

а значит утверждение следует из теоремы.

Для доказательства второго соотношения заметим, что

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Так как $x \ln a \in \mathbb{R}$, то утверждение следует из доказанного для экспоненты.

Ряд Маклорена для синуса и косинуса

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = \sin(x)$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \leq 1,$$

а значит утверждение следует из теоремы. Второе соотношение доказывается аналогичным образом.

Ряд Маклорена для логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Так как

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n},$$

то ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^{(n)}(x)$ на множестве $(-1, 1]$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши, получим

$$|r_{n(x,0)}| = \left| \frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \right| |x| = \frac{|x|}{1+\xi} \left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right|^n.$$

Так как при $x \in (-1, 1)$

$$\left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right| = \frac{|x| - |\xi|}{1+\xi} \leq \frac{|x| - |\xi|}{1-|\xi|} = 1 + \frac{|x| - 1}{1-|\xi|} \leq 1 + |x| - 1 = |x|,$$

то мы приходим к тому, что

$$|r_{n(x,0)}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(-1,1)} 0.$$

Наконец, так как при $x = 1$ по признаку Лейбница заявленный ряд сходится, то его сумма непрерывна не только на $(-1, 1)$, но и на $(-1, 1]$, а значит заявленное разложение справедливо и при $x = 1$.

Ряд Маклорена для арктангенса

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Доказательство. В верном равенстве

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

заменяем x на $-x^2$, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1).$$

Теперь, интегрируя написанный ряд по отрезку с концами 0 и x при $x \in (-1, 1)$ приходим к тому, что

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

По признаку Лейбница, ряд, написанный справа, сходится при $x = \pm 1$, а значит, его сумма непрерывна не только на $(-1, 1)$, но и на $[-1, 1]$. Тем самым, заявленное разложение справедливо и при $x = \pm 1$.

Ряд Маклорена для бинома

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

то при $\alpha - n < 0$ ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^{(n)}(x)$ на множестве $(-1, 1)$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши, получим

$$|r_n(x, 0)| = \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} (1+\xi)^{\alpha-1} |x| \left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right|^n.$$

Тогда, при $x \in (-1, 1)$, так как $(1+\xi) < 2$, аналогично доказанному при рассмотрении логарифма,

$$|r_n(x, 0)| \leq 2^{\alpha-1} |x|^{n+1} \left| \alpha \left(\frac{\alpha}{1} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{\alpha}{n} - 1 \right) \right|.$$

Так как при достаточно больших n (момент зависит от α и x) при увеличении n на единицу правая часть полученного неравенства умножается на

$$\left| \frac{\alpha}{n+1} - 1 \right| |x| < q < 1,$$

то $r_{n(x,0)}$ с ростом n стремится к нулю, что и доказывает утверждение.

Ряд Маклорена для арксинуса

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Доказательство. Доказательство можно провести с использованием разложения бинома для функции $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и последующим интегрированием полученного равенства. Остальные детали остаются читателю в качестве упражнения.

Понятие тригонометрического ряда

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется тригонометрическим рядом, построенным по функциям

$$\{1, \cos kx, \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Лемма об ортогональности системы тригонометрических функций

Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi.$$

Доказательство. Доказательство проводится прямым вычислением и остается в качестве упражнения.

Понятие тригонометрического ряда Фурье

Если для функции f существуют числа $a_{m(f)}$ и $b_{m(f)}$, введенные выше, то ряд

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(f)} \cos kx + b_{k(f)} \sin kx$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f , а числа $a_{m(f)}$ и $b_{m(f)}$ - коэффициентами Фурье функции f относительно системы функции

$$\{1, \cos kx, \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Ряд Фурье в комплексной форме

Если для функции f существуют числа $c_{k(f)}$, введенные выше, то ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k(f)} e^{ikx}$$

называется рядом Фурье в комплексной форме функции f , а числа $c_{k(f)}$ - коэффициентами Фурье функции f относительно системы функций

$$\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ядро Дирихле

Функция $D_{n(p)}$ называется ядром Дирихле.

Свойства ядра Дирихле

Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:

1. $D_{n(p)}$ - 2π периодическая функция.
2. $D_{n(p)}$ - четная функция.
3. Выполнено условие нормировки:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n dp = 1.$$

Доказательство. Все эти свойства моментально следуют из исходного представления ядра Дирихле:

$$D_{n(p)} = \sum_{k=-n}^n e^{ikp}.$$

Детали остаются в качестве упражнения.

Лемма Римана

Пусть $f \in R_{loc}(a, b)$ и

$$\int_a^b |f| dx < +\infty.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для начала заметим, что если $f(x) = c$ - некоторая константа и (a, b) - ограниченный промежуток, то

$$\begin{aligned} \int_a^b c e^{i\lambda x} dx &= c \left(\int_a^b \cos \lambda x dx + i \int_a^b \sin \lambda x dx \right) = \\ &= c \left(\frac{\sin \lambda b - \sin \lambda a}{\lambda} - i \frac{\cos \lambda b - \cos \lambda a}{\lambda} \right) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

и утверждение теоремы выполнено. Сведем общий случай к данному.

Для начала покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется отрезок $[\delta_1, \delta_2] \subset [a, b]$, что

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Согласно условию (об абсолютной сходимости интеграла), можно найти числа δ_1 и δ_2 , что $\delta_1 < \delta_2$ и

$$\int_a^{\delta_1} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{\delta_2}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

Далее, для найденных δ_1 и δ_2 ,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &= \left| \int_a^{\delta_1} f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_{\delta_2}^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^{\delta_1} |f(x)| e^{i\lambda x} dx + \int_{\delta_2}^b |f(x)| e^{i\lambda x} dx = \int_a^{\delta_1} |f(x)| dx + \int_{\delta_2}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $f \in R[\delta_1, \delta_2]$, то существует разбиение τ отрезка $[\delta_1, \delta_2]$ на отрезки Δ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, что

$$0 \leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} f dx - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

где

$$s_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

- нижняя сумма Дарбу. Пусть $g(x) = m_i$ при $x \in \Delta_i$ (на общих концах отрезков значения g можно брать любыми), тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) e^{i\lambda x} dx \right| &= \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x)) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x) - g(x)| e^{i\lambda x} dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (f - g) dx, \end{aligned}$$

так как $f(x) \geq g(x)$. Последний интеграл, в свою очередь, может быть переписан так:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx - s_{\tau(f)} < \varepsilon.$$

Итого,

$$0 \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon.$$

Осталось заметить, что

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) e^{i\lambda x} dx = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i e^{i\lambda x} dx = 0,$$

где последнее равенство верно в силу того, что слагаемых конечное число, и каждое слагаемое стремится к нулю по доказанному в самом начале. В силу произвольности ε , лемма Римана полностью доказана.

Лемма

Пусть функция f является 2π -периодической на $\mathbb{R}$. Тогда

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_{n(t)} dt.$$

Доказательство. Вспомним, что

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) D_{n(x-t)} dt.$$

Сделаем замену переменной $p = x - t$ и учтем, что, согласно условию и свойствам ядра Дирихле, подынтегральная функция является 2π -периодической. Тогда

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-p) D_{n(p)} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x-p) D_{n(p)} dp.$$

Так как ядро Дирихле является четным, то

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-p) + f(x+p)) D_{n(p)} dp,$$

что и доказывает лемму.

Условия Дини

Говорят, что функция $f : \dot{U}(x) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, если:

1. Существуют односторонние пределы $f(x \pm 0)$ функции f в точке x .
2. Интегралы

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt, \text{ и } \int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt$$

сходятся при некотором $\delta > 0$.

Достаточное условие сходимости ряда Фурье

Пусть f — 2π -периодическая на $\mathbb{R}$ функция, причем $|f| \in R[-\pi, \pi]$. Если функция f удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k(f)} e^{ikx} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Так как

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_{n(t)} dt,$$

и так как

$$\int_0^\pi D_{n(t)} dt = \pi,$$

то

$$\begin{aligned} T_{n(x)} - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_{n(t)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+0) + f(x-0)) D_{n(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x-t) - f(x-0) + f(x+t) - f(x+0)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt. \end{aligned}$$

Так как $\sin(\frac{t}{2}) \sim \frac{t}{2}$ при $t \rightarrow 0+$, то, согласно условиям Дини, интегралы

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| dt \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| dt$$

сходятся, а значит мы попадаем в условия леммы Римана. Тем самым,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n(x)} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Понятие кусочно-непрерывно дифференцируемой функции

Функцию f , имеющую на отрезке $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную, назовем кусочно-непрерывно дифференцируемой.

Кусочно-непрерывно дифференцируемая функция удовлетворяет условиям Дини.