Математический анализ (базовый уровень)

Бойцев А.А.

научно-образовательный центр математики

Санкт-Петербург
2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1
Введение в математический анализ

> Каждая теория проходит четыре стадии, прежде чем быть принятой:
>
> 1. Это бесполезная чепуха.
> 2. Это интересно, но неправильно.
> 3. Это верно, но совершенно не важно.
> 4. Да я всегда так говорил.
>
> *Холдейн Дж.*
> *английский биолог*

Многие математические теории находят свой выход в том, что описывают правила преобразования одних элементов (входных данных) – в другие (выходные данные). Так как числовые данные – чуть ли не самые часто встречающиеся, понятно, что особую роль в математике и, конечно, в ее приложениях, занимают числовые функции. Числовые функции, их дифференциальное и интегральное исчисление, и есть главный объект исследования классического математического анализа. Однако, сколь угодно полное описание свойств как функций, так и операций над ними, невозможно без точного определения множества вещественных чисел.

«Число в математике, как и время в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам». Число – это одна из основных математических абстракций, рассказу о которой может быть посвящен отдельный курс. Мы же в этой главе хотим свести воедино то, что читателю известно о числах из средней школы, выделив в отдельные группы – аксиомы – фундаментальные и независимые свойства чисел. При этом мы также ставим целью дать точное, пригодное для дальнейшего математического использования определение множества вещественных чисел и обратить особое внимание на так называемое «свойство полноты» – свойство, ощущаемое большинством из нас на каком-то внутреннем уровне, но весьма редко на формальном. Свойство полноты является первым шагом, первым приближением к операции предельного перехода – основной неарифметической операции анализа.

§ 1. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел

Понятие вещественных (действительных) чисел, их свойства, слушателю хорошо известны еще со школы. В то же время четкого определения такого объекта как число, скорее всего, не было. Оказывается, что многие результаты классического анализа опираются на так называемое свойство **полноты** множества вещественных чисел. Что это такое, откуда это свойство произрастает и чем оно мотивировано и будет обсуждаться в данном разделе.

Определение 1 (Понятие множества вещественных чисел).
Множество $\mathbb{R}$ называется множеством вещественных (или действительных) чисел, а его элементы – вещественными (или действительными) числами, если выполнен набор аксиом, приведенный ниже.

1. Аксиомы сложения

Определено отображение $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией сложения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y, обладающее свойствами:

1. Операция $+$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$
$$x + y = y + x.$$
2. Операция $+$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
3. Существует нейтральный элемент $0 \in \mathbb{R}$ (называемый нулем), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$
$$x + 0 = x.$$
4. Для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$ существует противоположный элемент $-x$ такой, что
$$x + (-x) = 0.$$

Замечание 1.
Итак, первая группа аксиом устанавливает существование операции сложения, а также привычные для нас свойства этой операции. Подытоживая, приходим к тому, что $\mathbb{R}$ – коммутативная группа по сложению.

2. Аксиомы умножения

Определено отображение $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением элементов x и y, обладающее свойствами:

1. Операция $\cdot$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

2. Операция $\cdot$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$
3. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (называемый единицей), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$
$$x \cdot 1 = x.$$
4. Для каждого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что
$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Замечание 2.
Вторая группа аксиом вводит операцию умножения. Полезно отметить, что свойства операции умножения практически в точности вторят свойствам операции сложения, за исключением отсутствия элемента 0^{-1}. Последнее же вторит известному со школы тезису «на ноль делить нельзя». Итак, с точки зрения алгебраических структур, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ – коммутативная группа по умножению.

Замечание 3.
Условие, что $1 \neq 0$, чрезвычайно важно. Без него мы бы могли построить $\mathbb{R}$, состоящее лишь из одного элемента – из нуля.

Замечание 4.
На данный момент введенные операции (сложения и умножения) никак не связаны. Интересующая нас связь – это правило раскрытия скобок, его-то мы и введем.

3. Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, то есть $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Замечание 5.
Первые три группы аксиом устанавливают, что $\mathbb{R}$ – поле. В то же время, введенные операции не исчерпывают ни наших, ни сугубо математических потребностей в свойствах множества $\mathbb{R}$. Например, мы так и не научились сравнивать элементы из $\mathbb{R}$.

4. Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ введено отношение порядка $\leq$, то есть для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено: справедливо $x \leq y$, или нет. При этом выполняются следующие условия:

1. Отношение $\leq$ рефлексивно, то есть
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x.$$

2. Отношение $\leq$ антисимметрично, то есть
$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \;\Rightarrow\; (x = y).$$
3. Отношение $\leq$ транзитивно, то есть
$$(x \leq y) \wedge (y \leq z) \;\Rightarrow\; (x \leq z).$$
4. Для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено либо $x \leq y$, либо $y \leq x$.

Замечание 6.
Само отношение, обозначенное нами как $\leq$, и первые три рассмотренных пункта устанавливают общее понятие «порядка» на множестве (конечно, лишь математического :)). Последний же пункт наделяет порядок на множестве $\mathbb{R}$ свойством полной (линейной) упорядоченности: любые два элемента из $\mathbb{R}$ сравнимы между собой.

Замечание 7.
Отметим (на наш взгляд) не лишнее замечание. Рассмотрим множество натуральных чисел и отношение делимости на нем. Точнее, для натуральных чисел a, b будем писать
$$a \,\vdots\, b$$
в случае, когда a делится на b нацело. Легко видеть, что введенное отношение – отношение порядка. Однако, таким образом введенный порядок не устанавливает полную (линейную) упорядоченность так как, например, числа 2 и 3 оказываются несравнимыми.

Все это должно наводить на мысль, что «порядок» — весьма общее понятие, впрочем, все равно пытающееся установить что-то вроде свойств больше-меньше и, вообще говоря, на множествах разной природы и структуры.

Замечание 8.
Введя новое отношение, его стоит «подружить» с объектами, введенными ранее.

5. Связь сложения и порядка

Если $x, y, z \in \mathbb{R}$, то
$$(x \leq y) \;\Rightarrow\; (x + z \leq y + z).$$

Замечание 9.
Итак, перед нами постулируется хорошо известное со школы свойство: к обеим частям неравенства можно, с сохранением справедливости последнего, прибавлять одно и то же число.

6. Связь умножения и порядка

Если $x, y \in \mathbb{R}$, то
$$(0 \leq x) \;\wedge\; (0 \leq y) \;\Rightarrow\; (0 \leq x \cdot y).$$

Замечание 10.
Введенный только что факт опять-таки известен: произведение неотрицательных чисел неотрицательно.

Замечание 11.
Интересно задаться вопросом: все ли это? Хватает ли приведенного списка?

И правда, мы умеем теперь складывать, умножать, сравнивать вещественные числа, а также как-то комбинировать эти операции и согласовывать их действия. Может быть, это все?

На самом деле нет. Если мы остановимся на введенной группе аксиом, то в качестве $\mathbb{R}$ прекрасно бы подошло множество рациональных чисел (дробей). Но мы-то со школы знаем, что среди вещественных чисел есть и еще какие-то загадочные иррациональные числа, которых, кстати, куда больше, чем рациональных.

Для тех, кто не помнит о чем мы говорим, тут же приведем соответствующее утверждение.

Лемма 1.
Если существует $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$, то c – не рациональное число

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$c = \frac{m}{n},$$

n – натуральное, m – целое, и последняя дробь несократима. Тогда, если $c^2 = 2$, то

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \;\Rightarrow\; m^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; m \,\vdots\, 2 \;\Rightarrow\; m = 2k,$$

где k – натуральное. Но тогда

$$(2k)^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; 2k^2 = n^2 \;\Rightarrow\; n \,\vdots\, 2 \;\Rightarrow\; n = 2p,$$

где p – целое. Но тогда дробь, соответствующая числу c, сократима на 2, что противоречит предположению. $\square$

Замечание 12.
Последняя лемма показывает, что на данный момент в множестве $\mathbb{R}$ как будто бы есть дыры. Например, в нем явно не хватает элемента c из предыдущей леммы. Исправим это, введя в рассмотрение так называемую аксиому непрерывности.

7. Аксиома непрерывности (полноты)

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, причем $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Тогда

$$(\forall x \in X \;\forall y \in Y \;\; x \le y) \;\Rightarrow\; (\exists c \in \mathbb{R} : \;\; x \le c \le y \;\forall x \in X \;\forall y \in Y).$$

Замечание 13.
Введенная аксиома, если думать геометрически, как будто бы нам подходит. Она утверждает, что если некоторое (непустое) подмножество $\mathbb{R}$ находится «левее» некоторого (непустого) подмножества $\mathbb{R}$, то между элементами этих подмножеств всегда существует элемент из $\mathbb{R}$.

Покажем, что при помощи введенной аксиомы и правда можно доказать существование числа, квадрат которого равен 2.

Лемма 2.

$$\exists c \in \mathbb{R} : c^2 = 2.$$

Доказательство. Рассмотрим множества

$$X = \{x > 0 : x^2 < 2\}, \quad Y = \{y > 0 : y^2 > 2\}.$$

Рассматриваемые множества не пусты. И правда, $1 \in X$, ведь $1^2 < 2$ и $1 > 0$, а $2 \in Y$, так как $2^2 > 2$ и $2 > 0$. Кроме того, так как при $x, y > 0$

$$(x < y) \;\Leftrightarrow\; (x^2 < y^2),$$

то

$$\forall x \in X \; \forall y \in Y \;\; x < y.$$

На самом деле справедливость всех написанных высказываний (хорошо известных из школы) нужно доказывать. Все это можно сделать, используя следствия из аксиоматики множества $\mathbb{R}$, разговор о которых пойдет в следующем разделе.

Итак, мы попадаем в рамки аксиомы непрерывности. Согласно ее утверждению,

$$\exists c \in \mathbb{R} : \;\; x \le c \le y \;\forall x \in X \;\forall y \in Y.$$

Покажем, что $c \notin X$. От противного, если $c^2 < 2$, то число

$$c + \frac{2 - c^2}{3c},$$

большее c, тоже лежит в X. Действительно, так как $c > 1$, то и $c^2 > 1$, а значит $2 - c^2 \le 1$ и

$$\left(c + \frac{2 - c^2}{3c}\right)^2 = c^2 + 2 \cdot \frac{2 - c^2}{3} + \left(\frac{2 - c^2}{3c}\right)^2 < c^2 + 2 \cdot \frac{2 - c^2}{3} + \frac{2 - c^2}{3} = 2.$$

Но это приводит к противоречию, так как полученное неравенство несовместимо с тем, что

$$\forall x \in X \;\; x \le c.$$

Аналогичным образом показывается, что $c \notin Y$, откуда $c^2 = 2$. □

Замечание 14.
Важно понять, что только что доказанная лемма 2 устанавливает существование

> числа $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$. То, что c оказывается не рациональным, или как мы дальше скажем, иррациональным, доказывалось отдельно в лемме 1

Теперь перейдем к рассмотрению свойств элементов множества $\mathbb{R}$.

§ 2. Следствия из аксиоматики $\mathbb{R}$

Полезно отметить, что все стандартные свойства, которые присущи операциям над числами, можно вывести из той аксиоматики, что была приведена нами в предыдущем пункте. Давайте это объясним, пройдя прямо по пунктам. Целью же будет установление такого, в общем-то известного факта, что $1 > 0$.

Замечание 15.
Предвосхищая некоторое недоумение, отметим, что ввести привычную нам геометрическую модель множества $\mathbb{R}$ как числовой прямой без установления факта $1 > 0$ невозожно.

1. Следствия из аксиом сложения

Начнем с единственности нулевого элемента.

Лемма 3 (О единственности нуля).
В множестве $\mathbb{R}$ ноль единственен.

Доказательство. Пусть 0_1 и 0_2 – нули в $\mathbb{R}$. Тогда, используя свойство (a) в блоке аксиом 1 и определение нуля, имеем

$$0_1 \overset{1(c)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{1(a)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{1(c)}{=} 0_2.$$

□

Теперь обсудим единственность противоположного элемента.

Лемма 4 (О единственности противоположного элемента).
В множестве $\mathbb{R}$ каждый элемент имеет единственный противоположный.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – противоположные к $x \in \mathbb{R}$ элементы. Тогда,

$$x_1 \overset{1(c)}{=} x_1 + 0 \overset{1(d)}{=} x_1 + (x + x_2) \overset{1(b)}{=} (x_1 + x) + x_2 \overset{1(d)}{=} 0 + x_2 \overset{1(a)}{=} x_2 + 0 \overset{1(c)}{=} x_2.$$

□

В заключение, обсудим решение уравнения $x + a = b$ относительно x.

Лемма 5 (О решении линейного уравнения).
В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x + a = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$.

Доказательство. Предполагая верным равенство

$$x + a = b$$

и добавляя к обеим его частям $-a$, получаем (проследите использование аксиом самостоятельно)

$$(x + a + (-a) = b + (-a)) \;\Leftrightarrow\; (x + 0 = b + (-a)) \;\Leftrightarrow\; (x = b + (-a)).$$

Единственность полученного представления следует из (уже доказанной в предыдущей лемме) единственности противоположного элемента. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для полученного x равенство $x + a = b$ и правда верно. □

2. Следствия аксиом умножения

Следствия аксиом умножения, как и их доказательства, вторят (с естественными ограничениями) уже рассмотренным следствиям аксиом сложения. Ниже мы приводим их списком, доказательства остаются на откуп читателю.

Лемма 6 (О единственности единицы).
В множестве $\mathbb{R}$ единица единственна.

Лемма 7 (О единственности обратного элемента).
В множестве $\mathbb{R} \setminus 0$ каждый элемент имеет единственный обратный.

Лемма 8 (О решении линейного уравнения).
В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.

3. Следствия аксиом связи сложения и умножения

Теперь выведем те факты, которые следуют из аксиомы связи сложения и умножения. Например, что $(-x) = (-1) \cdot x$. Впрочем, начнем с еще с нескольких известных, но любопытных моментов.

Лемма 9.
Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$x \cdot 0 = 0.$$

Доказательство.

$$(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)) \;\Leftrightarrow\; (x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \;\Leftrightarrow\; 0 = x \cdot 0$$

□

Теперь покажем, что множество вещественных чисел является, как говорят, областью целостности.

Следствие 1.

$$(x \cdot y = 0) \;\Leftrightarrow\; (x = 0) \;\vee\; (y = 0).$$

Доказательство. Если и x, и y равны нулю, то утверждение следует из предыдущей леммы.

Если хотя бы одно из чисел x, y не равно нулю, то утверждение следует из предыдущей леммы и третьей леммы из следствий аксиом умножения. □

Теперь докажем, что противоположный элемент $(-x)$ к элементу x получается в результате умножения (-1) на x.

Лемма 10.
Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$-x = (-1) \cdot x.$$

Доказательство. Так как

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

то, в силу единственности противоположного элемента,

$$-x = (-1) \cdot x.$$

□

Из предыдущего следствия выводится и правило «двойного отрицания».

Следствие 2.
Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$(-1) \cdot (-x) = x.$$

Теперь легко получить и следующее следствие.

Следствие 3.
Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

Доказательство. Доказательство следует из следующей цепочки равенств:

$$(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-x) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

□

4. Следствия аксиом порядка

Для начала договоримся об общепринятых обозначениях. Отношение $x \leq y$ на практике часто записывают как $y \geq x$. При этом условие, что $x \leq y$ и $x \neq y$ записывают как $x < y$ или как $y > x$. Неравенства $\geq$ и $\leq$ называют нестрогими, а неравенства $<$ и $>$ – строгими. Отсюда сразу вытекает нижеуказанное следствие.

Следствие 4.
Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место ровно одно из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Теперь отметим следствие о строгих неравенствах.

Лемма 11.
Для любых чисел $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется

$$(x < y) \ \wedge \ (y \le z) \ \Rightarrow \ (x < z),$$

$$(x \le y) \ \wedge \ (y < z) \ \Rightarrow \ (x < z).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из свойства транзитивности для отношения порядка получаем, что

$$(x < y) \ \wedge \ (y \le z) \ \Rightarrow \ (x \le z).$$

Покажем, что $x \neq z$. От противного, если $x = z$, то

$$(x < y) \ \wedge \ (y \le z) \ \Leftrightarrow \ (z < y) \ \wedge \ (y \le z) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (z \le y) \ \wedge \ (y \le z) \ \wedge \ (z \neq y) \ \Leftrightarrow \ (z = y) \ \wedge \ (z \neq y).$$

Второе утверждение доказывается аналогичным образом. □

5. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

Теперь отметим стандартные свойства, связанные с арифметическими операциями и неравенствами.

Лемма 12.
Для любых чисел $x, y, z, k \in \mathbb{R}$ справедливо

$$(x < y) \ \Rightarrow \ (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \ \Rightarrow \ (-x < 0),$$

$$(x \le y) \ \wedge \ (z \le k) \ \Rightarrow \ (x + z) \le (y + k),$$

$$(x < y) \ \wedge \ (z \le k) \ \Rightarrow \ (x + z) < (y + k),$$

$$(0 < x) \ \wedge \ (0 < y) \ \Rightarrow \ (0 < xy),$$

$$(0 > x) \ \wedge \ (0 > y) \ \Rightarrow \ (0 < xy),$$

$$(0 > x) \ \wedge \ (0 < y) \ \Rightarrow \ (0 > xy),$$

$$(x < y) \ \wedge (z > 0) \ \Rightarrow \ (xz < yz),$$

$$(x < y) \ \wedge \ (z < 0) \ \Rightarrow \ (xz > yz).$$

Доказательство. Эти свойства предлагается доказать самостоятельно. □

Теперь докажем утверждение, к которому мы все это время шли.

Лемма 13 (О сравнении нуля и единицы).

$$0 < 1.$$

Доказательство. Согласно аксиоме умножения, $0 \neq 1$. Предположим, что $1 < 0$, тогда, по свойствам неравенств,

$$(1 < 0) \ \wedge \ (1 < 0) \ \Rightarrow \ (1 \cdot 1 > 0) \ \Rightarrow \ (1 > 0).$$

Так как одновременно не может выполняться $1 < 0$ и $1 > 0$, приходим к противоречию. □

Определение 2 (Понятия положительных и отрицательных чисел).
По традиции числа, которые больше нуля, называются положительными, а которые меньше нуля – отрицательными.

Замечание 16.
Множество вещественных чисел удобно изображать в виде числовой прямой, а сами числа – точками на этой прямой. Поэтому числа часто еще называют точками.

Замечание 17.
Следствия аксиомы непрерывности мы получим немного позже (принцип Архимеда и другие).

§ 3. Важнейшие типы подмножеств $\mathbb{R}$. Индукция

В этом разделе мы изучим важнейшие типы подмножеств $\mathbb{R}$, которые уже упоминали в дальнейшем, и дадим намек на то, как показать, что все операции с элементами этих подмножеств справедливы при введенной нами аксиоматике.

1 Натуральные числа

Всем известно, что числа вида 1, $(1+1)$, $((1+1)+1)$, и так далее обозначают $1, 2, 3$, и так далее, соответственно. Продолжение какого-то процесса далеко не всегда однозначно, поэтому слова «и так далее» нуждаются в пояснении. Для этого введем следующее определение.

Определение 3 (Понятие индуктивного множества).
Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если

$$\forall x \in X \quad (x+1) \in X.$$

Итак, индуктивное множество – это то, которое вместе с каждым элементом содержит «следующий» (с точки зрения натуральных чисел). Из опыта мы знаем, что множество натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел являются индуктивными. В то же время кажется, что множество натуральных чисел – это наименьшее из индуктивных множеств, содержащих 1.

Для того чтобы строго определить понятие множества натуральных чисел, докажем следующую лемму.

Лемма 14.
Пересечение

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$$

любого семейства X_α, $\alpha \in A$, индуктивных множеств, если оно не пусто, является индуктивным множеством.

Доказательство. Действительно,

$$\left(x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \Rightarrow (x \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((x+1) \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow \left((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right),$$

где переход с первой на вторую строчку справедлив в силу индуктивности всех множеств семейства X_α. $\square$

Теперь можно дать определение множеству натуральных чисел как наименьшему индуктивному множеству, содержащему 1.

Определение 4 (Понятие множества натуральных чисел).
Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных мно-

жеств, содержащих число 1. Обозначается множество натуральных чисел как $\mathbb{N}$.

Еще раз отметим, что из этого определения, в частности, следует, что множество натуральных чисел – наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу. Наши обозначения для натуральных чисел

$$1, 2, \ \ldots, \ 100, \ 101, \ \ldots,$$

– это лишь договоренности.

2 Принцип математической индукции

Из определения множества натуральных чисел сразу следует важный принцип, называемый принципом математической индукции. Именно он часто обосновывает слова «и так далее».

Теорема 1 (Принцип математической индукции).
Если множество $X \subset \mathbb{N}$ таково, что $1 \in X$ и $\forall x \in X \quad (x+1) \in X$, то $X = \mathbb{N}$.

Доказательство. Действительно, X – индуктивное множество. Так как $X \subset \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество, то $X = \mathbb{N}$. □

С помощью принципа математической индукции можно доказать, например, что сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, а также другие известные из школы свойства. Приведем пример.

Теорема 2.
Сумма натуральных чисел – натуральное число.

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $m + n \in \mathbb{N}$. Пусть X – множество таких натуральных чисел k, что $m+k \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $1 \in X$, так как если $m \in \mathbb{N}$, то $(m+1) \in \mathbb{N}$ в силу индуктивности множества натуральных чисел. Если теперь $k \in X$, то есть $m+k \in \mathbb{N}$, то и $(k+1) \in X$, так как $m+(k+1) = (m+k)+1 \in \mathbb{N}$. Согласно принципу индукции заключаем, что $X = \mathbb{N}$. □

Следующий пример показывает, как на практике часто применяется (и оформляется) метод математической индукции.

Лемма 15 (Неравенство Бернулли).

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. База индукции. Пусть $n = 1$, тогда

$$1 + x \geq 1 + x,$$

что верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Допустим, что при $n = k$ выполнено

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Покажем, что при $n = k + 1$ выполняется

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x.$$

Действительно,

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx) =$$

$$= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2.$$

Так как $k \in \mathbb{N}$, то $kx^2 \geq 0$, а значит

$$1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x,$$

откуда и следует требуемое. □

Отметим и следующее замечание.

Замечание 18.
Проверка всех условий теоремы 1 очень важна. Например, покажем, что без проверки «базы» результат «доказательства» может быть смешным.

Итак, мы «докажем», что все натуральные числа равны между собой. Действительно, если при некотором k выполняется $k = k + 1$, то

$$k + 1 = (k + 1) + 1 = k + (1 + 1) = k + 2.$$

Проблема в рассуждении заключается в том, что мы не проверили, что существует k, для которого $k = k + 1$, а последнее, конечно, неверно ни при каких k.

③ Целые, рациональные и иррациональные числа

Теперь строго введем (или напомним) понятия целых, рациональных и иррациональных чисел.

Определение 5 (Понятие множества целых чисел).
Множеством целых чисел называется объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и нуля. Обозначается множество целых чисел, как $\mathbb{Z}$.

Как было отмечено при построении множества натуральных чисел, сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное. В частности поэтому сумма и произведение целых чисел есть число целое.

Определение 6 (Понятие множества рациональных чисел).
Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, называются рациональными. Обозначается множество рациональны чисел, как $\mathbb{Q}$.

Отметим и формальное, хорошо нам известное замечание.

Замечание 19.

Число $m \cdot n^{-1}$ как правило записывают в виде отношения $\dfrac{m}{n}$, которое называют рациональной дробью.

Правила действий с рациональными дробями, подробно изученные в школе, сразу вытекают из соответствующих свойств и аксиом множества вещественных чисел.

Пример 1.
В качестве примера докажем, что

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Действительно,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \left(m_1 \cdot n_1^{-1}\right) \cdot \left(m_2 \cdot n_2^{-1}\right) = (m_1 \cdot m_2) \cdot (n_1 \cdot n_2)^{-1} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Предлагаем проследить использование аксиом читателю самостоятельно, а также вывести правило сложения рациональных дробей:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2},$$

или его аналог с наименьшим общим кратным знаменателей.

Замечание 20.
Снова отметим, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ удовлетворяет первым шести аксиомам множества вещественных чисел. Однако, именно седьмая аксиома, аксиома непрерывности, устанавливает, что кроме рациональных чисел существуют так называемые иррациональные.

Определение 7 (Понятие множества иррациональных чисел).
Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Обозначается множество иррациональных чисел как $\mathbb{I}$.

Замечание 21.
При обсуждении аксиомы непрерывности мы доказали существование иррациональных чисел. Оказывается, несмотря на то, что рациональными числами в жизни мы пользуемся значительно чаще, иррациональных чисел оказывается значительно больше, нежели рациональных. Заинтересованный читатель может обратиться к сторонней литературе и понятию мощности множества.

§ 4. Расширение множества вещественных чисел

Часто бывает удобным добавить к множеству $\mathbb{R}$ два формальных элемента: символы $+\infty$ и $-\infty$. Чтобы дальнейшая работа с этим множеством была разумной (конечно, с точки зрения дальнейшего использования внутри математики), требуется установить правила работы с добавленными элементами.

Определение 8.
Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы $-\infty, +\infty$ – минус и плюс бесконечностями, соответственно, причем для вновь введенных символов постулируются следующие возможные операции:

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & x > 0 \\ \mp\infty, & x < 0 \end{cases},$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Мотивировка написанных равенств, наверное, интуитивно понятна. В то же время, истинная природа именно таких равенств откроется нам в разделе теории пределов.

Замечание 22.
Важно отметить, что все свойства, указанные выше, постулируются, и никаких других «естественных» свойств множества $\mathbb{R}$ на множество $\overline{\mathbb{R}}$ не переносится. Более того, их перенесение оказалось бы вредным. Например, если, исходя из третьей введенной операции допустить, что

$$x = (+\infty) \cdot 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

то мы получаем «абсурдное» равенство, ведь слева стоит множество, а справа – как будто бы один элемент.

Сказанное выше объединим в еще одно, в некотором смысле обобщающее, замечание.

Замечание 23.
Выражениям

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \cdot 0,$$

не приписывается никакого значения. Такие выражения называются неопределенностями.

Кроме данных неопределенностей, в дальнейшем нам встретятся неопределенности вида

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\pm\infty)^0, \quad 0^0.$$

В теории пределов, как уже отмечалось, мы поймем, почему операции и правда называются неопределенностями. В то же время отметим (на уровне махания руками), что многие неопределенности сводятся друг к другу , например:

$$\frac{0}{0} = \frac{1/(+\infty)}{1/(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

или

$$1^{+\infty} = e^{(+\infty)\ln 1} = e^{(+\infty)\cdot 0},$$

и так далее. Конечно, к написанным «равенствам» нужно подходить со здравым багажом скептицизма :)

Отметим и еще одно техническое замечание.

Замечание 24.
Если не важен знак бесконечности, то часто пишут ∞ – бесконечность без знака.

§ 5. Модуль вещественного числа

В теории предела функции одной переменной модуль занимает особое положение. Причина в том, что именно модуль позволяет вычислить (привычное нам) расстояние между двумя точками. В этом разделе мы вспомним некоторые свойства модуля, а также докажем важнейшие для дальнейшего неравенства – неравенства треугольника.

Определение 9 (Понятие модуля).
Модулем вещественного числа x называется число, равное x, если оно положительно или равно нулю, и равное $-x$, если оно отрицательно. Иными словами,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Теорема 3.
Справедливы следующие свойства:

1. $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$.
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$.
5. $|xy| = |x||y|$.
6. $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.
7. $|x+y| \leq |x| + |y|$.
8. $|x-y| \geq ||x| - |y||$.

Доказательство. Свойства 1 - 6 сразу следуют из определения и остаются в качестве упражнения.
7. Для доказательства этого свойства достаточно сложить неравенства

$$\pm x \leq |x| \quad \text{и} \quad \pm y \leq |y|,$$

верные для любых x, y. Тем самым, придем к неравенствам

$$\pm(x+y) \leq |x| + |y|,$$

которые совместно эквивалентны доказываемому.
8. Для доказательства данного пункта удобно воспользоваться свойством 7.

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y| \;\Rightarrow\; |x-y| \geq |x| - |y|.$$

Поменяв числа x и y местами, получим

$$|x-y| \geq |y| - |x|.$$

Совместно полученные неравенства эквивалентны доказываемому. □

Замечание 25.
Отметим, что два последних неравенства (7-ое – чаще) часто называют неравенствами треугольника. Они имеют простой геометрический смысл. Представим, что рассматривается два вектора x, y, а $|x|, |y|$ обозначают длины соответствующих векторов. Если сложить векторы x, y по правилу треугольника, то вектор $x+y$ будет отвечать третьей стороне этого треугольника. Обозначив через $|x+y|$ длину этой (третьей) стороны, неравенство

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

есть не что иное как алгебраический аналог теоремы планиметрии: «длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других сторон».

Советуем провести толкование 8-ого свойства аналогичным образом.

§ 6. Промежутки числовой прямой. Окрестности

В этом разделе мы обсудим важное понятие окрестности, именно на нем в дальнейшем будет строиться теория предела.

Определение 10 (Понятия промежутков).
Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.

Множество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

при $a \leq b$ называется отрезком.

Множество

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

при $a < b$ называется интервалом.

Множества

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

при $a < b$ называются полуинтервалами.

Множества

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \geq a\}, \quad (a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > a\}$$

и

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$

$$[-\infty, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \leq b\}, \quad [-\infty, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < b\},$$

называются лучами.

Еще одно популярное обозначение отметим в качестве замечания.

Замечание 26.
Часто множество $\mathbb{R}$ еще обозначают как $(-\infty, +\infty)$, а множество $\overline{\mathbb{R}}$ как $[-\infty, +\infty]$.

Теперь дадим понятие окрестности точки x_0 – порции множества рядом (и даже с двух сторон) с точкой x_0.

Определение 11.
Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x_0.

Еще одно важное понятие анализа – понятие ε-окрестности или просто-напросто симметричной окрестности точки x_0.

Определение 12.
Эпсилон-окрестностью (или ε-окрестностью) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется интервал

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon), \qquad \varepsilon > 0.$$

Замечание 27.
Еще раз отметим, что ε-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$ – это симметричный интервал, ее содержащий. При помощи понятия модуля, он может быть записан следующим образом:
$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \varepsilon\}.$$
Мы неоднократно будем пользоваться этим в дальнейшем.

Для элементов $\pm\infty, \infty$ понятия окрестности и ε-окрестности вводятся отдельно.

Определение 13.
Окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида
$$(a,\ +\infty], \quad a \in \mathbb{R}.$$
ε-окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество
$$\left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right], \quad \varepsilon > 0.$$
Окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида
$$[-\infty,\ a), \quad a \in \mathbb{R}.$$
ε-окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида
$$\left[-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание 28.
Полезно пояснить, почему при определении ε-окрестностей элементов $\pm\infty$ рассматривается величина $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Если $x_0 \in \mathbb{R}$, то при уменьшении ε, окрестность $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ тоже уменьшается. Аналогично, при уменьшении ε величина $\dfrac{1}{\varepsilon}$ увеличивается, а значит окрестности элементов $\pm\infty$ уменьшаются.

В итоге приходим к полной аналогии: чем меньше ε, меньше и окрестность.

Замечание 29.
Обычно окрестности точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обозначаются заглавными латинскими буквами $U(x_0), V(x_0)$. Например,
$$U(3) = (-7,\ 5), \quad V(+\infty) = (\pi,\ +\infty].$$
ε-окрестности точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с индексом ε, то есть $U_\varepsilon(x_0), V_\varepsilon(x_0)$. Например,
$$U_2(3) = (1,\ 5), \quad V_\pi(+\infty) = \left(\frac{1}{\pi},\ +\infty\right].$$

Кроме понятия окрестности точки x_0, вводят еще и понятие проколотой окрестности

– окрестности без самой точки x_0. Это понятие будет мотивировано уже в понятии предела.

Определение 14.
Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U(x_0) \setminus \{x_0\}$, то есть произвольная окрестность точки x_0 без самой этой точки.

Аналогично, проколотой ε-окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Замечание 30.
Проколотая окрестность и ε-окрестность точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с кружочком наверху и индексом ε, соответственно, то есть $\overset{o}{U}(x_0), \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)$. Например,

$$\overset{o}{U}(3) = (-7,\ 3); (3, 5), \quad \overset{o}{V}_\pi(+\infty) = \left(\frac{1}{\pi},\ +\infty\right).$$

Отметим в заключение одно важное свойство окрестностей: у двух разных точек из $\overline{\mathbb{R}}$ всегда найдутся непересекающиеся окрестности.

Лемма 16.
Пусть $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда существуют окрестности $U(A_1)$, $U(A_2)$, что

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Положим $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$, тогда, как легко проверить,

$$U_\varepsilon(A_1) \cap U_\varepsilon(A_2) = \varnothing.$$

Другие случаи остаются в качестве упражнения. □

§ 7. Ограниченность числовых множеств. Супремум и инфимум

Одно из ключевых свойств, связанных с упорядоченными множествами – их ограниченность. Определим эти понятия лишь для $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$, то есть, на самом деле, для линейно упорядоченных множеств.

Определение 15 (Понятие границы множества).
Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным сверху, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \leq M.$$

Найденное число M называется верхней границей для X.
Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \geq m.$$

Найденное число m называется нижней границей для X.

Итак, верхняя граница множества X – это, во-первых, число, то есть элемент $\mathbb{R}$. Во-вторых, – это не абы какое число, а число, большее любого элемента из X. То же самое, с необходимыми изменениями, можно сказать про нижнюю границу.

Объединим два введенных понятия в одно.

Определение 16 (Понятие ограниченности множества).
Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad m \leq x \leq M.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 2.
Рассмотрим множество

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x < 1\}.$$

Ясно, что это множество ограничено как сверху, например, числом 1, так и снизу, например, числом 0.

Множество

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 3\}$$

оказывается ограниченным сверху, например, числом 3. Ограниченным снизу это множество не является, что очевидно, ведь предположение, что m – нижняя граница для A, сразу рушится, так как $(m-1) \in A$.

Отметим следующую простую, но часто используемую в дальнейшем лемму.

Лемма 17.
Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$\exists C \in \mathbb{R}, C \geq 0 : \forall x \in X \quad -C \leq x \leq C.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество X ограничено, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad m \leq x \leq M.$$

Положив $C = \max\{|m|, |M|\}$, согласно свойствам модуля приходим к тому, что

$$\forall x \in X \quad -C \leq x \leq C.$$

Достаточность очевидна, так как можно положить $m = -C$, $M = C$. □

Если множество ограничено, то разумно его границы как-то назвать. Оказывается, имеет смысл различать две качественно разные ситуации.

Определение 17 (Понятие максимального элемента).
Элемент $M \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется максимальным (наибольшим) элементом множества X, если

$$\forall x \in X \quad x \leq M.$$

Обозначают это так: $M = \max X$.
Элемент $m \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется минимальным (наименьшим) элементом множества X, если

$$\forall x \in X \quad x \geq m.$$

Обозначают это так: $m = \min X$.

Замечание 31.
Отметим, и это очень важно, что как максимальный, так и минимальный элементы X, если только они существуют, принадлежат X.

Сразу приведем пример.

Пример 3.
Пусть

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}.$$

Легко понять, что $\min A = 0$. Однако, множество A не имеет максимального элемента, что легко доказывается, например, от противного. Если $M = \max A$, то $M < 1$, а значит

$$M = \frac{M+M}{2} < \frac{M+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$

что противоречит предположению.

Замечание 32.
Кажется, что положение дел в предыдущем примере просто какое-то «идиотическое». Ведь очень хочется связать максимум A с единицей, но беда в том, что $1 \notin A$.

Сложившееся положение дел исправят понятия супремума и инфимума.

Определение 18 (Понятие точной грани).

Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (или точной верхней гранью) множества X и обозначается $\sup X$.

В свою очередь, наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества X и обозначается $\inf X$.

Сразу же приведем пример.

Пример 4.
Пусть

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}.$$

Множество верхних границ A – это множество $[1, +\infty)$. Значит, $\sup A = 1$. Множество нижних границ $(-\infty, 0]$, значит, $\inf A = 0$.

Что мы видим? Конечно, мы видим, что если у множества существует максимум (минимум), то он и будет супремумом (инфимумом), но, как показывает приведенный пример, не наоборот. Зафиксируем сказанное в виде леммы.

Лемма 18 (О связи максимума/минимума и супремума/инфимума).
Пусть существует $\max X$ $(\min X)$. Тогда $\sup X = \max X$ $(\inf X = \min X)$.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Пусть $M = \max X$, тогда M – верхняя граница множества X. Кроме того, M, очевидно, наименьшая верхняя граница. Значит, $M = \sup X$. Второе утверждение доказывается аналогичным образом. □

А чего мы добивались? Добивались мы того, чтобы при рассмотрении (непустого) ограниченного множества, супремум и инфимум существовали всегда. Что же, добились, и об этом говорит следующая теорема.

Теорема 4 (Принцип точной грани).
Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный $\sup X$ $(\inf X)$.

Доказательство. Пусть множество X ограничено сверху. Тогда множество его верхних границ B не пусто. В силу определения верхней границы,

$$\forall b \in B \ \forall x \in X \quad x \leq b.$$

Согласно аксиоме непрерывности,

$$\exists c : x \leq c \leq b, \quad \forall x \in X \ \forall b \in B.$$

Ясно, что $c \in B$. С другой стороны, в силу неравенства $c \leq b$ для всех $b \in B$, получается, что $c = \min B$. Тем самым, $c = \sup X$. Доказательство единственности остается в качестве упражнения.

Случай, когда множество X ограничено снизу, рассматривается аналогично. □

Замечание 33.

Полезно заметить, что для доказательства существования супремума у непустого ограниченного множества нам пришлось воспользоваться аксиомой непрерывности. Давайте вспомним и нашу возню с доказательством того, что существует $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$ (лемма 2). Проводя доказательство, мы рассмотрели множества

$$X = \{x > 0 : x^2 < 2\}, \quad Y = \{y > 0 : y^2 > 2\}.$$

Обратите внимание, рассматриваемые множества не имеют ни максимального, ни минимального элемента. При этом легко понять, что c, даваемое нам аксиомой непрерывности, и есть $\sup X$ и $\inf Y$.

Можно доказать, что аксиома непрерывности эквивалентна сформулированному принципу точной грани. Мы ограничимся доказательством, проведенным в одну сторону.

Доопределим понятия супремума и инфимума и в случае, когда рассматриваемые множества не ограничены.

Замечание 34.
Если множество X не ограничено сверху (снизу), то полагают $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

Тем самым, мы приходим к следующему следствию.

Следствие 5.
У любого непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ существуют супремум и инфимум (может быть, равные $\pm\infty$).

В теории часто бывает удобно использовать следующие равносильные определения супремума и инфимума.

Лемма 19 (Эквивалентные определения супремума и инфимума).
Для супремума и инфимума можно дать следующие эквивалентные определения:

$$s = \sup X \iff (\forall x \in X \quad s \geq x) \;\wedge\; (\forall s' < s \; \exists x \in X : x > s'),$$

$$i = \inf X \iff (\forall x \in X \quad i \leq x) \;\wedge\; (\forall i' > i \; \exists x \in X : x < i').$$

Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. □

Замечание 35.
Полезно отметить, что написанные строчки ни в коем случае не нужно запоминать, а всего-навсего нужно понимать. Что такое супремум X?

Во-первых, это элемент s, больший любого элемента из X. Во-вторых, это минимальный такой элемент, то есть если от s отойти немного «влево», то сразу найдется элемент множества X, находящийся правее.

§ 8. Принцип Архимеда

Данный раздел вводит, с одной стороны, достаточно очевидные, но с другой стороны чрезвычайно важные свойства множества натуральных и целых чисел, связанные с ограниченностью.

Теорема 5.
Пусть $X \subset \mathbb{N}$ – непустое ограниченное множество. Тогда $\exists \max X$.

Доказательство. Согласно принципу точной грани, существует $s = \sup X < +\infty$. Согласно эквивалентному определению супремума,

$$\exists k \in X : s - 1 < k \leq s,$$

что означает, что $k = \max X$. Действительно, во-первых $k \in X$. Во-вторых, так как любые натуральные числа, большие k, не меньше $(k+1)$, а по установленному неравенству (левая часть)

$$s < k + 1,$$

получаем, что k – верхняя грань для X. Эти два наблюдения устанавливают требуемое. □

Замечание 36.
Заметим, что установленное свойство – совсем не естественное. Например, как мы видели, у ограниченного подмножества множества рациональных или вещественных чисел, вообще говоря, может не существовать максимального элемента. Все дело в том, что точки множества натуральных чисел являются, как говорят, изолированными: существуют их окрестности, не содержащие других точек из $\mathbb{N}$. Такого нет ни у множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, ни у множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Из доказанной теоремы легко выводится следующее следствие.

Следствие 6.
Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения. □

Из полученных результатов для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ можно сразу получить результаты как для подмножеств множества целых чисел $\mathbb{Z}$, так и для самого $\mathbb{Z}$.

Следствие 7.

1. Пусть $X \subset \mathbb{Z}$ — непустое ограниченное сверху множество. Тогда существует $\max X$.
2. Пусть $X \subset \mathbb{Z}$ — непустое ограниченное снизу множество. Тогда существует $\min X$.
3. $\mathbb{Z}$ – неограниченное ни сверху, ни снизу множество.

Теперь установим важный для дальнейшего принцип Архимеда.

Теорема 6 (Принцип Архимеда).
Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Для любого $y \in \mathbb{R}$ существует единственное целое $k \in \mathbb{Z}$ такое, что
$$(k-1)x \leq y < kx.$$

Доказательство. Пусть
$$T = \left\{ l \in \mathbb{Z} : \ \frac{y}{x} < l \right\}.$$
Это множество не пусто, так как множество $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху. Кроме того, T ограничено снизу. Тогда, по доказанному, существует $k = \min T$. Значит,
$$k - 1 \leq \frac{y}{x} < k$$
и, в силу положительности x, мы получаем требуемое. □

Приведем и геометрическую трактовку принципа Архимеда.

Замечание 37.
Пусть, например, $y > 0$. Представим себе две «палки»: одну — длиной x, другую — длиной y. Принцип Архимеда говорит о том, что палку длиной игрек можно «замостить» палками длиной x, причем для этого потребуется не меньше $(k-1)$-ой палки, но меньше k палок.

Получим и важные следствия из принципа Архимеда.

Следствие 8.
Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n такое, что $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Доказательство. Достаточно положить в принципе Архимеда $y = 1, \ x = \varepsilon$. □

Еще одно следствие – признак нуля.

Следствие 9.
Пусть $x \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $0 \leq x < \varepsilon$, то $x = 0$.

Доказательство. От противного, пусть $x > 0$. Тогда, по предыдущему следствию найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{n} < x$. Но тогда, положив $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, получим, что $x > \varepsilon$, что противоречит условию. □

Принцип Архимеда позволяет ввести понятие целой и дробной частей числа.

Следствие 10.
Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \leq x < k+1$.

Доказательство. Это сразу следует из принципа Архимеда, если положить в нем $x = 1$. □

Определение 19.
Указанное в следствии число k называется целой частью числа x и обозначается $[x]$. Величина $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа x.

Итак, целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x. Приведем какой-нибудь пример.

Пример 5.
Например,

$$[5.7] = 5, \quad \{5.7\} = 0.7, \quad [-3.2] = -4, \quad \{-3.2\} = 0.8.$$

Глава 2
Предел последовательности

> Математика — это единственный совершенный метод водить самого себя за нос.
>
> *Альберт Эйнштейн*

Наверное, из бытового опыта и школьных предметов понятно, что при измерении реальных физических величин мы получаем последовательности их приближенных значений, с которыми и приходится работать. В связи с этим моментально возникают, например, следующие вопросы:

1. Какое отношение имеет полученная последовательность приближений к измеряемой величине? Что вообще такое «последовательность приближенных значений»? Однозначно ли такое описание?
2. Как связаны операции над приближенными значениями величин с теми же операциями над их точными значениями? Чем характеризуются те операции, где можно «подменить» точные значения их приближенными аналогами?
3. Как по последовательности чисел понять, может ли она, в теории, быть приближением какой-то величины?

Ответом на все эти и близкие к ним вопросы служит понятие предела последовательности – функции натурального аргумента.

§ 1. Понятие предела последовательности

Для начала дадим определение тому, что такое последовательность.

Определение 20 (Понятие последовательности).
Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется последовательностью.

Развернуто, но не менее точно можно сказать, что последовательность – это функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.

Замечание 38.
Обычно последовательности обозначают маленькими латинскими буквами, например $x(n)$, $y(n)$, причем чаще всего аргумент n пишется снизу, например x_n, y_n.

Приведем какие-нибудь примеры использования новых обозначений.

Пример 6.
Пусть, например,

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1,\ x_5 = \frac{1}{5},\ x_{100} = \frac{1}{100}.$$

Если $x_n = (-1)^n$, то

$$x_1 = -1,\ x_{10} = 1,$$

и вообще

$$x_{2k} = 1,\ x_{2k-1} = -1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Как мы убедились, вычислить значение какого-либо члена последовательности – не очень сложная и захватывающая задача. Но как понять, есть ли у последовательности какая-то тенденция, какой-то тренд, возникающий при неограниченном увеличении n? Частично отвечая на этот вопрос, мы приходим к понятию предела последовательности.

Определение 21 (Предел последовательности через $\varepsilon - n$).
Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A, \quad x_n \longrightarrow A.$$

Приведем и словесную формулировку того, что написано.

Замечание 39.
Число A называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного числа ε существует натуральное число n_0, зависящее от ε такое, что

какое бы ни взять натуральное число n, большее n_0, будет выполняться неравенство

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

Определение предела – сложное понятие. Кажется важным уяснить ту геометрию, что за ним прячется.

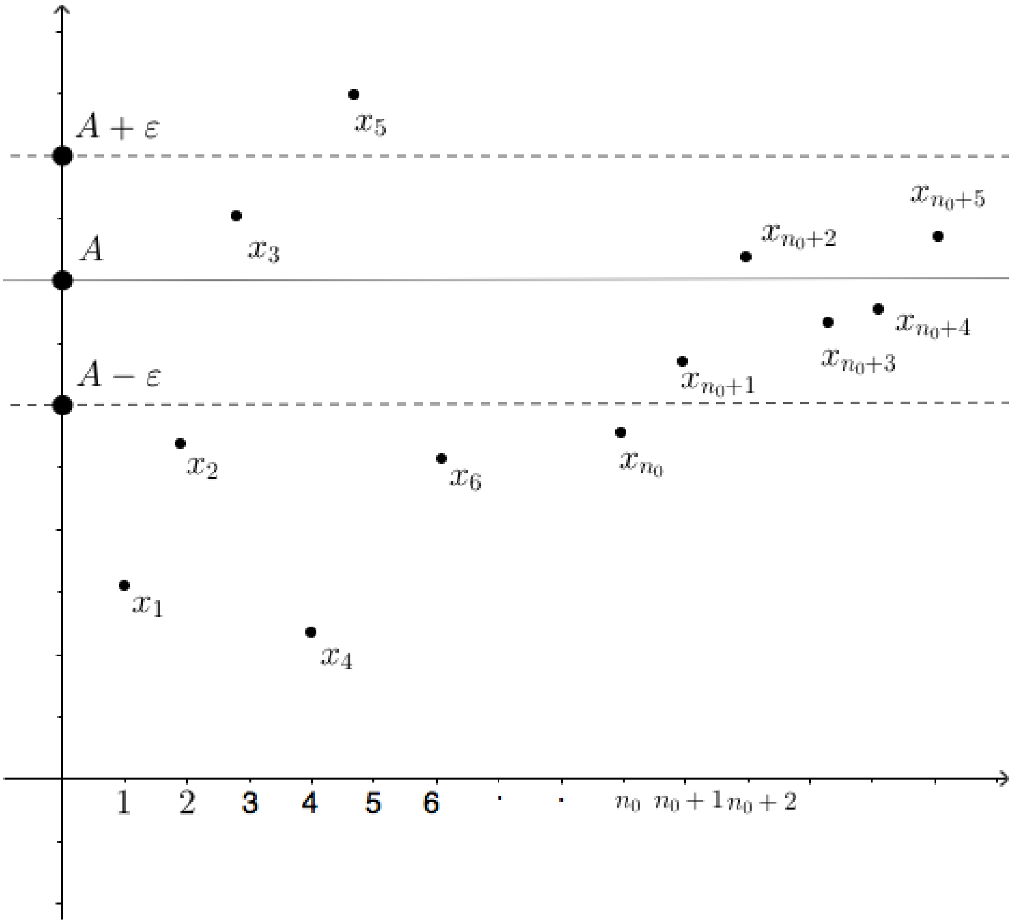

Рис. 1. Предел последовательности

Замечание 40.
Геометрически (рисунок 1) определение предела последовательности означает, что какую бы полосу шириной 2ε вокруг точки A ни взять, найдется номер n_0, что все члены последовательности с номерами, большими n_0, лежат в этой полосе. Ясно, что при уменьшении ε, уменьшается ширина полосы и номер n_0, вообще говоря, увеличивается.

Тем самым, предел – это то, к чему «неограниченно приближаются» члены нашей последовательности с ростом их номеров.

Отметим и следующее, чисто техническое замечание.

Замечание 41.
Используя понятие ε-окрестности, определение предела 21 можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \;\; x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Теперь можно дать и такую трактовку понятию предела. Число A – предел последовательности x_n, если какую бы ни выбрать (сколь угодно малую) окрестность точки A, начиная с какого-то момента, все члены последовательности лежат в этой окрестности.

Приведем пример.

Пример 7.
Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно определению, нужно найти такое натуральное число n_0, что при всех натуральных $n > n_0$ будет выполняться

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство относительно n, получаем

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит, если положить

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

то при $n > n_0$ заведомо выполняется

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε утверждение доказано.

Замечание 42.
Еще раз отметим несколько важных моментов. Во-первых, номер n_0 из определения должен найтись для каждого ε, а не для какого-то конкретного. Во-вторых, если нашелся какой-то номер n_0, то любой больший номер тоже годится, тем самым $n_0 = n_0(\varepsilon)$ можно считать функцией от ε. В-третьих, никто не просит нас найти наименьший из возможных номеров n_0, начиная с которого $x_n \in U_\varepsilon(A)$. Последнее дает нам право не решать неравенство на номер точно.

Приведем пример.

Пример 8.
Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} = \frac{3}{2}.$$

Выполним предварительные преобразования:

$$\left|\frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{4n - 12}{2(2n^2 + 4)}\right|.$$

Легко видеть, что решать «в лоб» неравенство из определения предела несколько громоздко. Поступим иначе. Можно считать, что $n > 3$, тогда

$$\left|\frac{4n-12}{2(2n^2+4)}\right| < \left|\frac{4n}{4n^2}\right| = \frac{1}{n}.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Положив

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

получим, что при

$$n > n_0 = \max\left(3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$$

будет выполнено

$$\left|\frac{3n^2+2n}{2n^2+4} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Последовательность не обязана иметь предел. Приведем соответствующий пример.

Пример 9.
Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Запишем отрицание того факта, что число A является пределом последовательности x_n:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |x_n - A| \geq \varepsilon_0.$$

Положим $\varepsilon_0 = 1$ и $n_0 \in \mathbb{N}$. Если $A < 0$, то возьмем $n = 2n_0$. Если же $A \geq 0$, то возьмем $n = 2n_0 + 1$. Тогда в любом случае

$$|x_n - A| = |(-1)^n - A| \geq 1,$$

то есть никакое число A пределом последовательности x_n не является.

Понятно, что рассмотрение ε-окрестности в определении предела – весьма несущественная деталь. Дадим, тем самым, следующее определение.

Определение 22 (Предел последовательности через окрестности).
Число A называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall U(A)\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad x_n \in U(A).$$

Естественно, было бы странно называть разные вещи одним и тем же именем, так что следующая лемма вряд ли вызовет удивление.

Лемма 20.
Определения 21 и 22 эквиваленты.

Доказательство. Сначала докажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 21, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и в смысле определения 22.

Пусть $U(A) = (\alpha, \beta)$ – произвольная окрестность точки A. Положим $\varepsilon = \min(A - \alpha, \beta - A)$, тогда $U_\varepsilon(A) \subset U(A)$. Согласно определению 21, по выбранному ε

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad x_n \in U_\varepsilon(A) \subset U(A),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 22.
Тот факт, что из определения 22 следует определение 21, моментально следует из того, что ε-окрестность является частным случаем окрестности. □

Введем часто используемое понятие сходящейся последовательности.

Определение 23 (Понятие сходящейся последовательности).
Если последовательность x_n имеет предел $A \in \mathbb{R}$ (число!), то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.

Определение предела последовательности оказывается полезным расширить на случай «бесконечных пределов». Понятно, что алгебраически достаточно поменять выражения для окрестностей, что мы и сделаем.

Определение 24 (Понятия бесконечных пределов).
Элемент $+\infty$ называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент $-\infty$ называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty, \quad x_n \longrightarrow \pm\infty.$$

Замечание 43.
Введенные определения можно переписать через ε-окрестности, то есть через $U_\varepsilon(\pm\infty)$, и через окрестности $U(\pm\infty)$ ровно также, как это сделано в определениях 21 и 22. Утверждение леммы 20 сохраняется и в этом случае. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.

Отметим следующее важное замечание.

Замечание 44.
Последовательности, имеющие пределом $+\infty$, $-\infty$, все равно называются расходящимися.

Приведем пример.

Пример 10.
Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5}{2n + 4} = +\infty.$$

При $n \in \mathbb{N}$ справедлива цепочка преобразований

$$\frac{3n^2-5}{2n+4} \geq \frac{3n^2-5n}{2n+4n} = \frac{3n-5}{6}.$$

Далее,

$$\frac{3n-5}{6} > \frac{1}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; n > \frac{\dfrac{6}{\varepsilon}+5}{3}.$$

Положив

$$n_0 = \left[\frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}\right],$$

получим, что при $n > n_0$ выполняется

$$\frac{3n-5}{6} > \frac{1}{\varepsilon},$$

а значит и

$$\frac{3n^2-5}{2n+4} > \frac{1}{\varepsilon},$$

что доказывает требуемое.

В заключение, отметим еще несколько важных замечаний.

Замечание 45.
Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 46.
При записи определения предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $n_0 = n_0(\varepsilon)$, а так же то, что $n_0 \in \mathbb{N}$.

§ 2. Свойства последовательностей, имеющих предел

Введя понятие предела последовательности, хочется узнать свойства, которыми обладают имеющие предел последовательности. Часть из этих (локальных) свойств совершенно не удивительна.

Например, как вы думаете, может ли у последовательности быть два различных предела? Вряд ли, ведь тогда члены последовательности одновременно должны быть сколь угодно близки как к одному числу, так и к другому, но если числа разные, то такого, конечно, быть не может.

А что можно сказать про сходящуюся последовательность? Например то, что она обязательно ограничена, ведь с какого-то момента все члены этой последовательности находятся внутри полосы конечной ширины, окружающей предел, а до этого «момента» всего-навсего конечное число членов.

Все эти соображения мы сформулируем в виде леммы, а словесные наметки доказательств переложим на математический язык. Обратите внимание, и это важно: мы все уже доказали, теперь же просто аккуратно это оформим.

Лемма 21 (Свойства последовательностей, имеющих предел).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда:

1. При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.
2. При $A \in \mathbb{R}$ последовательность x_n ограничена.
3. В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности x_n, за исключением не более чем конечного числа.

Доказательство. 1. Будем доказывать от противного. Пусть A_1 и A_2 – пределы последовательности x_n, причем $A_1 \neq A_2$. Пусть $U(A_1), U(A_2)$ – окрестности точек A_1 и A_2 такие, что

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing,$$

см. лемму 16. По определению предела, для окрестности $U(A_1)$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ x_n \in U(A_1),$$

а для окрестности $U(A_2)$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ x_n \in U(A_2).$$

Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$, тогда

$$\forall n > n_2 \ \ (x_n \in U(A_1)) \wedge (x_n \in U(A_2)) \ \Leftrightarrow \ x_n \in U(A_1) \cap U(A_2),$$

что невозможно, так как последнее пересечение пусто.
2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < 1 \ \Leftrightarrow \ (A-1) < x_n < (A+1)$$

и все элементы последовательности, начиная с номера n_0+1, ограничены по модулю числом

$$\max(|A+1|, |A-1|).$$

До члена последовательности с номером n_0+1 имеется ровно n_0 членов последовательности, а значит, положив

$$C = \max(|x_0|, |x_1|, \ \ldots, |x_{n_0}|, |A+1|, |A-1|),$$

приходим к тому, что

$$|x_n| \le C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то есть к тому, что x_n ограничена.
3. Пусть $U(A)$ – произвольная окрестность точки A. Согласно определению предела,

$$\exists n_0: \ \forall n > n_0 \ \ x_n \in U(A),$$

а значит, вне окрестности $U(A)$ содержится не более n_0 членов.

$\square$

§ 3. Арифметические свойства пределов в $\mathbb{R}$

Теперь обсудим арифметические операции над последовательностями, имеющими предел. Следующая теорема, скорее всего, напрашивается.

Теорема 7 (Арифметические свойства пределов).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть
$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$
2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть
$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB.$$
3. Предел частного равен (при естественных ограничениях) частному пределов, то есть
$$\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то
$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то
$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Тогда, используя неравенство треугольника и свойства модуля (теорема 3), при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ имеем
$$|x_n + y_n - (A + B)| = |(x_n - A) + (y_n - B))| \leq |x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
2. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, то y_n ограничена (лемма 21), а значит
$$\exists C > 0 : |y_n| \leq C.$$
Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то
$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$
Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то
$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)}.$$
Тогда, используя неравенство треугольника (теорема 3), при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$

имеем

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n + Ay_n - Ay_n - AB| \le |x_n y_n - Ay_n| + |Ay_n - AB| =$$

$$= |y_n| \cdot |x_n - A| + |A| \cdot |y_n - B| \le C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{|A|\varepsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B},$$

так как тогда, по доказанному в пункте 2,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, $B \ne 0$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |y_n - B| < \frac{|B|}{2},$$

откуда

$$B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Если положить

$$C = \min\left(\left|B - \frac{|B|}{2}\right|, \left|B + \frac{|B|}{2}\right|\right),$$

то

$$|y_n| \ge C \ \Rightarrow\ 0 < \frac{1}{|y_n|} \le \frac{1}{C}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, пользуясь определением предела,

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |y_n - B| < \varepsilon C B.$$

Значит, при $n > \max(n_0, n_1)$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - y_n}{By_n}\right| \le \frac{|B - y_n|}{C|B|} < \varepsilon.$$

□

Замечание 47.
Обсудим более детально приведенное доказательство, особенно обратив внимание на те «подгоны», которые сделаны при выборе «эпсилонов».

Сначала прокомментируем то, почему справедлива хотя бы первая строчка в доказателстве первого пункта. Вот она.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \quad |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда взялось значение $\dfrac{\varepsilon}{2}$? А ниоткуда, оно просто нам удобно. Согласно определению предела, начиная с некоторого момента значение $|x_n - A|$ может быть сделано меньше любого положительного числа. Значит, и меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если $\varepsilon > 0$. Удобно же такое число нам потому, что все «эпсилоны» в итоге сложились в определение предела. Обязательно ли это? Вовсе нет.

Замечание 48.
Давайте приведем менее искусственное доказательство, например, второго пункта теоремы.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, то y_n ограничена (лемма 21), а значит

$$\exists C > 0 : |y_n| \le C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \ \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \varepsilon.$$

Тогда, так как при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняются все выведенные выше соотношения, используя неравенство треугольника, получаем:

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n + Ay_n - Ay_n - AB| \le |x_n y_n - Ay_n| + |Ay_n - AB| =$$

$$= |y_n||x_n - A| + |A||y_n - B| \le C\varepsilon + |A|\varepsilon = (C + |A|)\varepsilon.$$

Можно ли считать доказательство законченным, или нет? Конечно, можно. Обратите внимание на то, что ни C, ни A от n не зависят. Это значит, что, в силу произвольности положительного числа ε, число $(C + |A|)\varepsilon$ тоже произвольно и положительно. Обозвав его, например, $\widetilde{\varepsilon}$, приходим к определению предела.

Пример ниже иллюстрирует, как с помощью доказанной теоремы можно вычислять некоторые пределы.

Пример 11.
Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1}.$$

Обратим внимание, что применить теорему «в лоб» не получится: и числитель, и знаменатель имеют пределом $+\infty$, а значит мы получаем уже упомянутую ранее неопределенность. Раскроем ее. Вынося в числителе и знаменателе старшие степени за скобку, получается

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Пределы последовательностей

$$\frac{5}{n}, \ \frac{4}{n^2}, \ \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n^2}$$

равны нулю, что легко показать по определению предела, значит предел числителя равен 3, а предел знаменателя равен 2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+4}{2n^2+n+1} = \frac{3}{2}.$$

На самом деле, справедлива более общая теорема, чем теорема 7. Сформулируем ее.

Теорема 8 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то:

1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$

2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB.$$

3. Предел частного равен частному пределов, то есть

$$\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0.$$

Доказательство. Докажем, например, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$, $B \in \mathbb{R}$, то

$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty, & B > 0 \\ -\infty, & B < 0 \end{cases}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ x_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

и

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Значит, при $n > \max(n_0, n_1)$

$$\begin{cases} x_n y_n > \dfrac{1}{\varepsilon}\left(B - \dfrac{|B|}{2}\right), & B > 0 \\ x_n y_n < \dfrac{1}{\varepsilon}\left(B + \dfrac{|B|}{2}\right), & B < 0 \end{cases},$$

что и доказывает утверждение.

Остальные случаи остаются в качестве упражнения. $\square$

Замечание 49.
Справедливость именно этой, только что сформулированной теоремы, и мотивирует введенные нами ранее операции в расширенном множестве вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$.

§ 4. Предельный переход в неравенствах

Обсудим теперь вопросы, которые связывают предельный переход и порядок. Сначала докажем, что если есть неравенство для пределов, то это же неравенство с какого-то момента справедливо и для членов последовательностей.

Теорема 9.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A < B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n < y_n.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$. Тогда, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |x_n - A| < \frac{B-A}{2} \quad \Rightarrow \quad x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |y_n - B| < \frac{B-A}{2} \quad \Rightarrow \quad y_n > B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Значит, при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняется

$$x_n < \frac{A+B}{2} < y_n,$$

откуда и следует требуемое.

Остальные случаи остаются в качестве упражнения. □

Замечание 50.
Важно отметить геометрический смысл приведенного доказательства: мы строим вокруг пределов, опять-таки, непересекающиеся «полосы» (окрестности), и дальше пользуемся тем, что с какого-то момента все члены каждой из рассматриваемых последовательностей оказываются в «своей полосе». Так как одна из «полос» находится над другой, то мы приходим к утверждению теоремы.

Из доказанной теоремы выведем следствие, часто называемое «предельный переход в неравенствах». Смысл его прост: неравенство для последовательностей переносится на неравенство для пределов в случае существования последних.

Следствие 11 (Предельный переход в неравенствах).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Если $x_n > y_n$, начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geq B$.
2. Если $x_n \geq y_n$, начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geq B$.

Доказательство. 1. От противного, пусть $A < B$. Согласно теореме 9

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n < y_n.$$

Это противоречит условию.
2. Второй пункт доказывается аналогично и остается в качестве упражнения. □

Отметим и следующее замечание.

Замечание 51.
Важно отметить, что в 1 пункте следствия 11 нельзя написать строгое неравенство $A > B$. Например, для последовательностей $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = 0$ выполняется неравенство $x_n > y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

§ 5. Теорема о сжатой переменной

Теорема о сжатой переменной – теорема, устанавливающая существование предела последовательности, зажатой между двумя другими.

Теорема 10 (О сжатой переменной).
Пусть, начиная с какого-то номера n_0, выполняется $x_n \le z_n \le y_n$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |x_n - A| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 : \forall n > n_2 \quad |y_n - A| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Тогда при $n > n_2 = \max(n_0, n_1, n_2)$ выполняется

$$A - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < A + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |z_n - A| < \varepsilon.$$

Случаи $A = \pm\infty$ остаются в качестве упражнения. □

Замечание 52.
Отметим, что доказать эту теорему, опираясь на предельный переход в неравенствах (11), нельзя, так как по условию про наличие предела последовательности z_n ничего неизвестно.

Замечание 53.
В случае, когда $A = \pm\infty$, условия теоремы можно ослабить, «подпирая» z_n лишь с одной стороны.

§ 6. Теорема Вейерштрасса

Некоторое достаточное условие существования предела последовательности было только что получено в теореме 10 о сжатой переменной. В этом разделе мы установим критерий сходимости так называемой монотонной последовательности. Для начала введем понятие монотонности.

Определение 25.
Говорят, что последовательность x_n возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} \geq x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} > x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} \leq x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Определение 26 (Понятие монотонной последовательности).
Про возрастающую (не убывающую, убывающую, не возрастающую) последовательность также говорят, что она монотонна.

Замечание 54.
Отметим, что на практике мы часто используем другие, но равносильные введенным выше определения. Например, строгое возрастание последовательности означает, что

$$x_n < x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

а убывание последовательности, что

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и так далее.

Из геометрических соображений понятно, что у монотонной последовательности всегда есть предел. Теорема Вейерштрасса говорит о том, что для сходимости монотонной последовательности не только необходима (лемма 21), но и достаточна ограниченность этой последовательности.

Теорема 11 (Вейерштрасса).
Возрастающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу, причем
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Доказательство. Пусть последовательность возрастает.
Как уже отмечалось, необходимость следует из того факта, что сходящаяся последовательность ограничена (лемма 21).
Докажем достаточность. Так как x_n ограничена сверху, то существует $A = \sup x_n < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По свойству супремума (лемма 19),

$$\exists n_0 : A - \varepsilon < x_{n_0} \le A.$$

Так как последовательность x_n возрастает, то

$$\forall n > n_0 \quad A - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le A < A + \varepsilon \ \Rightarrow\ A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.
Случай убывающей последовательности рассматривается аналогично. □

Теорема Вейерштрасса может быть дополнена следующим образом.

Лемма 22 (Дополнение к теореме Вейерштрасса).
Если последовательность x_n возрастает и не ограничена сверху, то ее предел равен $+\infty$, то есть
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$
Если последовательность x_n убывает и не ограничена снизу, то ее предел равен $-\infty$, то есть
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Доказательство. Докажем первый пункт. Так как последовательность не ограничена сверху, то по $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такой, что

$$x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как последовательность возрастает, то при $n > n_0$ выполнено

$$x_n \ge x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тем самым установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Второй пункт доказывается аналогично. □

Объединяя полученные факты, приходим к такой «обобщенной теореме Вейерштрасса.

Теорема 12 (Обобщенная теорема Вейерштрасса).
Возрастающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

§ 7. Второй замечательный предел

Пришла пора поговорить о таинственной неопределенности вида 1^∞. Бороться с ней помогает так называемый второй замечательный предел. Значение же этого предела нельзя переоценить – именно сейчас мы и определим число e – хорошо известное из школы, но непонятно откуда берущееся, иррациональное число.

Начнем сразу с основного утверждения.

Теорема 13.
Существует предел (в $\mathbb{R}$)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную последовательность
$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
и докажем, что она строго убывает. Действительно, используя неравенство Бернулли (15) в последнем переходе, при $n\geq 2$ имеем:
$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=$$
$$=\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\geq\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$
откуда, в силу положительности y_n при всех n,
$$y_{n-1}>y_n\quad\forall n\geq 2,$$
что и означает строгое убывание y_n.

Поскольку члены последовательности y_n положительны и последовательность строго убывает то, согласно теореме Вейерштрасса (11), существует предел
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Тогда
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$
где предел в правой части цепочки равенств существует по только что доказанному. Это доказывает и существование предела в левой части, что и требуется. □

Теперь можно определить число e.

Определение 27 (Понятие второго замечательного предела).
Рассмотренный выше предел называют вторым замечательным пределом, а его значение – числом e, то есть

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Замечание 55.
Как уже было вскользь отмечено, число $e \approx 2.71828182845$ оказывается иррациональным. Доказательство этого факта не сложно, но весьма бесполезно для дальнейшего в курсе, поэтому мы его не приводим.

Отметим и следующие обобщения написанного равенства, которые мы докажем позже.

Замечание 56.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

Понятно, что одно соотношение переводится в другое практически моментально, если учесть теорему о расширенных арифметических свойствах пределов.

Приведем пример использования полученных знаний для раскрытия неопределенностей.

Пример 12.
Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}\right)^{2n+3}.$$

Легко заметить, что перед нами неопределенность вида 1^∞. Преобразуем основание следующим образом:

$$\frac{n^2-3n+1}{n^2+2} = 1+\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}-1 = 1-\frac{3n+1}{n^2+2}.$$

Пусть

$$x_n = -\frac{3n+1}{n^2+2},$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, а значит, согласно озвученному выше обобщению,

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

В то же время, используя свойства степеней,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\left\{(1+x_n)^{1/x_n}\right\}^{(2n+3)x_n},$$

где фигурные скобки стоят «для красоты». Так как

$$\lim_{n\to\infty}(2n+3)x_n = -\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n+1)}{n^2+2} = -6,$$

то хочется сказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}\right)^{2n+3} = e^{-6}.$$

В общем-то, так и есть, но последний переход мы пока что объяснить не в силах.

§ 8. Сравнение скорости роста некоторых функций

При вычислении пределов часто оказывается полезным сравнивать скорости роста функций разной природы. В этом разделе мы попробуем разобраться в том, какие функции быстрее растут, а также в том: а что значит — «быстрее»?

Замечание 57.
Данный пункт, как окажется, опережает «свое время», а точнее — наше развитие на текущий момент. Мы пока не ввели ни понятия корня, ни понятие показательной или логарифмической функций. Однако, эти понятия (как и функции, и правила работы с ними) нам хорошо знакомы из школы. На данный момент мы будем пользоваться школьным пониманием происходящего, что, впрочем, не помешает в дальнейшем вернуться к строгим определениям.

Сравним между собой поведение показательной функции и факториала. Оказывается, факториал растет «быстрее», и вот что это значит.

Лемма 23.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \geq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Понятно, что при $n \geq 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{a}{n} x_{n-1}.$$

Так как $\frac{a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то, взяв $\varepsilon = 1$,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \frac{a}{n} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса (11), существует предел x_n. Назовем его A. Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{a}{n} x_{n-1}$$

получаем, что

$$A = 0 \cdot A \ \Rightarrow \ A = 0,$$

что и требовалось. □

Естественно, справедливо и вот какое следствие.

Следствие 12.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Данное утверждение вытекает из теоремы 10 о сжатой переменной и неравенства

$$-\frac{|a|^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{|a|^n}{n!},$$

верного в силу свойств модуля (теорема 3). □

Следующая в иерархии по скорости роста (известная) функция – степенная. Результат дается следующей теоремой.

Лемма 24.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{a^n} = 0, \quad |a| > 1,\ s \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n^s}{a^n}$$

при $a > 1$. Понятно, что при $n \geq 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1}.$$

Так как $\dfrac{n^s}{(n-1)^s a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{a} < 1$, то (лемма 9)

$$\exists n_0 :\ \forall n > n_0 \ \ \frac{n^s}{(n-1)^s a} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса (11), существует предел x_n. Назовем его A. Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1}$$

получаем, что

$$A = \frac{1}{a} \cdot A \ \Rightarrow\ A = 0,$$

что и требовалось.

Случай, когда $a < -1$ рассматривается также, как и в доказанном ранее следствии. □

Итак, мы получили, что любая степенная функция растет медленнее, чем любая (растущая) показательная.

Для степенной функции n^s характерной особенностью является то, что s — это число. В других случаях теорема, вообще говоря, может носить и противоположный характер.

Лемма 25.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{a^n}{n^n}.$$

Понятно, что при $n \geq 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} x_{n-1}.$$

Так как

$$\frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{a}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \cdot e^{-1} = 0,$$

то (лемма 9)

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что проводились в предыдущих доказательствах, и остаются в качестве упражнения. □

Теперь сравним логарифмическую и степенную функции.

Лемма 26.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a^\alpha n}{n^s} = 0, \quad s > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Этот факт, на самом деле, почти эквивалентен предыдущему (например, можно сделать что-то вроде замены переменной). Однако, чтобы не зарываться в сугубо технические детали, строгое его доказательство мы отложим до будущих времен. □

Итак, сделаем важный вывод: из рассмотренных (семейств) функций быстрее всего «растет» факториал. Затем, конечно, показательная функция с показателем большим 1, затем любая степенная функция и, в конце концов, логарифм.

Докажем также следующую полезную для практики теорему, касающуюся корней n-ой степени.

Теорема 14.
Справедливы следующие утверждения:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a > 0$.
3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$, где $\alpha_n > 0$ и $A > 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как, по доказанному в лемме 24,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$

то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \ \Rightarrow \ n < (1+\varepsilon)^n.$$

В частности, при $n > n_0$

$$1 \leq n < (1+\varepsilon)^n \ \Leftrightarrow \ 1 \leq \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

2. Докажем второй пункт. Пусть $a \geq 1$ и $\varepsilon > 0$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$

то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \frac{a}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \ \Rightarrow \ a < (1+\varepsilon)^n.$$

В частности, при $n > n_0$

$$1 \leq a < (1+\varepsilon)^n \ \Leftrightarrow \ 1 \leq \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Если $a \in (0,1)$, то утверждение следует из следующих выкладок:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Последнее равенство верно в силу уже доказанного и того, что если $a \in (0,1)$, то $\dfrac{1}{a} > 1$.

3. Докажем третий пункт. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$ и $A > 0$, то по $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ |\alpha_n - A| < \frac{A}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{A}{2} < \alpha_n < \frac{3A}{2}.$$

Тогда, при $n > n_0$

$$\sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}},$$

и утверждение теоремы следует из теоремы 10 о сжатой переменной и результата предыдущего пункта. $\square$

§ 9. Подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы

Все это время мы занимаемся, по сути, теоремами, обеспечивающими существование предела при тех или иных условиях: арифметические свойства, теорема о сжатой переменной, теорема Вейерштрасса. Между тем, например, издавна знакомая нам последовательность $x_n = (-1)^n$ предела не имеет. А почему? Все потому, что в ней как будто бы переплетены две сходящиеся к совершенно разным числам последовательности: из единиц и из минус единиц. Обсудим это формально.

Определение 28 (Понятие подпоследовательности).
Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

натуральных чисел.

Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

Замечание 58.
Отметим отдельно, что при формировании подпоследовательности мы вольны вычеркивать какие-то члены исходной последовательности, но не вольны менять их порядок. Последнее диктуется требованием в определении: последовательность номеров n_k должна быть возрастающей.

Приведем пример.

Пример 13.
Пусть рассматривается последовательность $x_n = (-1)^n$. Тогда из нее можно выделить, например, такие подпоследовательности:

$$x_{2k} = (-1)^{2k} \equiv 1, \quad x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} \equiv -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Выделенные в примере подпоследовательности являются сходящимися. Введем следующее определение.

Определение 29 (Понятие частичных пределов).
Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности x_n называются частичными пределами этой последовательности.

Рассмотрим примеры.

Пример 14.
Множество частичных пределов уже рассмотренной последовательности $x_n = (-1)^n$ состоит из двух элементов: ± 1.

Множество частичных пределов последовательности $x_n = n^{(-1)^n}$ тоже состоит из двух элментов: 0 и $+\infty$.

Множество частичных пределов последовательности не всегда конечно. Легко проверить, что множество частичных пределов последовательности

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ \ldots\}$$

совпадает с множеством $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Более того, множество частичных пределов может быть даже очень бесконечным. Например, можно показать, что множество частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$ – это отрезок $[-1, 1]$.

Естественно задаться следующими вопросами: во-первых, каково множество частичных пределов последовательности, имеющей предел; во-вторых, правда ли, что из каждой последовательности можно выделить имеющие предел подпоследовательности?

На первый вопрос ответить не сложно.

Лемма 27.
Пусть последовательность x_n имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательности имеет тот же самый предел.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_0: \ \forall n > n_0 \ \ x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Пусть теперь x_{n_k} – подпоследовательность x_n. Так как $n_k \to +\infty$ (кстати, почему?), то

$$\exists k_0: \ \forall k > k_0 \ \ n_k > n_0,$$

а значит $x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$, что и доказывает утверждение. □

Замечание 59.
Итак, предыдущая лемма и ее доказательство не должны шокировать. Действительно, в случае наличия предела все члены последовательности, начиная с какого-то момента, лежат в произвольно выбранной окрестности вокруг предела. Значит, это же верно и с какого-то момента, но уже в подпоследовательности.

Интересно, что в отличие от первого вопроса, второй оказывается намного более хитрым. Все потому, что ответ на второй вопрос не решается без аксиомы непрерывности и, на самом деле, эквивалентен ей.

Теорема 15 (Теорема Больцано–Вейерштрасса).
У любой ограниченной последовательности x_n существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n\}.$$

Так как последовательность x_n ограничена, то S непусто и ограничено сверху, а значит, согласно принципу точной грани (4), существует $s = \sup S$. Согласно свойству супремума (19), если $k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists s' \in S: \ s - \frac{1}{k} < s' \le s.$$

В частности, в силу транзитивности отношения $<$, справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Так как

$$s + \frac{1}{k} \notin S,$$

то аналогичным образом устанавливается справедливость высказывания

$$s + \frac{1}{k} < x_n \text{ для конечного числа членов } x_n,$$

а значит для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n < s + \frac{1}{k} \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Теперь будем строить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $k = 1$, выберем

$$x_{n_1} \in \{x_n : \ s - 1 < x_n < s + 1\}.$$

Далее, пусть построены члены с номерами $n_1, n_2, \ \dots, n_p$. В качестве n_{p+1}-ого члена подпоследовательности выберем

$$x_{n_{p+1}} \in \left\{x_n : \ s - \frac{1}{p+1} < x_n < s + \frac{1}{p+1}\right\}$$

так, чтобы $n_{p+1} > n_p$. Последнее всегда возможно в силу доказанной бесконечности множества членов последовательности, удовлетворяющих выписанному неравенству. Продолжая по индукции, получаем подпоследовательность x_{n_p}, причем для всех $p \in \mathbb{N}$

$$s - \frac{1}{p+1} < x_{n_p} < s + \frac{1}{p+1}.$$

Согласно теореме 10 о сжатой переменной, $x_{n_p} \xrightarrow[p\to\infty]{} s$. □

Итак, теорема Вейерштрасса устанавливает непустоту множества частичных пределов (в $\mathbb{R}$) в случае, когда рассматриваемая последовательность ограничена. Эту теорему можно расширить и на случай неограниченности, причем абсолютно естественно.

Лемма 28 (Дополнение теоремы Больцано–Вейерштрасса).
Если последовательность x_n не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к $+\infty$ $(-\infty)$ подпоследовательность.

Доказательство. Пусть последовательность не ограничена сверху. Тогда найдется номер n_1 такой, что $x_{n_1} > 1$. Далее будем действовать по индукции. Если уже выбран номер $n_k > n_{k-1}$ такой, что $x_{n_k} > k$, то выбирается номер $n_{k+1} > n_k$ так, что $x_{n_{k+1}} >$

$k+1$. Такое построение возможно, так как иначе последовательность x_n была бы ограничена сверху числом $\max(x_1, \ldots, x_{n_k}, k+1)$. Тем самым, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Для неограниченной снизу последовательности доказательство аналогично. $\square$

Отметим некоторый итог в следующем замечании.

Замечание 60.
У любой последовательности существует подпоследовательность, имеющая предел в $\overline{\mathbb{R}}$. Для существования сходящейся (то есть имеющей предел в $\mathbb{R}$) подпоследовательности приходится накладывать какие-то дополнительные условия на исходную последовательность, например, ограниченность последней.

Говоря о множестве частичных пределов, важным оказывается выделить два: наибольший и наименьший из множества частичных пределов. Их мы будем называть верхним и нижними пределами. В этом пункте мы займемся изучением свойств этих объектов.

Определение 30 (Понятия верхнего и нижнего пределов).
Пусть E — (непустое) множество частичных пределов последовательности x_n.

Верхним пределом последовательности x_n называется $\sup E$ и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\limsup\limits_{n} x_n$.

Нижним пределом последовательности x_n называется $\inf E$ и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\liminf\limits_{n} x_n$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 15.
Найдем верхний и нижний пределы у уже рассмотренных ранее последовательностей.

Так как множество частичных пределов последовательности $x_n = (-1)^n$ состоит из двух элементов – ± 1, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1.$$

Так как множество частичных пределов последовательности

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ \ldots\}$$

совпадает с множеством $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1.$$

Так как множество частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$ – это отрезок $[-1, 1]$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1.$$

Хорошо бы теперь ответить на вопрос: всегда ли верхний или нижний предел последовательности являются ее частичными пределами, ведь супремум или инфимум не обязаны принадлежать рассматриваемому множеству. Оказывается, ответ положителен.

Лемма 29.
Верхний и нижний пределы последовательности x_n являются ее частичными пределами.

Доказательство. Проведем доказательство конструктивно, например, для верхнего предела. Сначала рассмотрим случай, когда x_n ограничена сверху. Пусть

$$y_k = \sup_n \{x_n,\ n \geq k\}.$$

Легко понять, что y_k – убывающая последовательность. Значит, по обобщенной теореме Вейерштрасса (12), она имеет предел. Кроме того, если x_{n_k} – подпоследовательность последовательности x_n, имеющая предел, то

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \ x_{n_k} \leq y_{n_k} \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

где последнее равенство верно в силу леммы (27). Если мы построим подпоследовательность x_n, сходящуюся к $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то теорема будет доказана. Для чисел $n \in \mathbb{N}$, используя свойства (19) верхней грани, подберем числа k_n так, что

$$y_n - \frac{1}{n} < x_{k_n} \leq y_n, \quad k_n > k_{n-1}.$$

Теперь утверждение следует из теоремы о сжатой переменной.

Если x_n не ограничена сверху, то доказательство вытекает из дополнения к теореме Больцано–Вейерштрасса (28). □

Замечание 61.
Отметим, что в доказательстве есть пояснение к тому, почему верхний предел часто обозначают как $\limsup$, а нижний как $\liminf$. Мы показали, что, например, в случае ограниченности x_n сверху

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \sup_n \{x_n,\ n \geq k\},$$

что и есть верхний предел. Даже больше, можно написать в этом случае, опираясь на убывание y_k, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \{x_n,\ n \geq k\} = \inf_k \sup_n \{x_n,\ n \geq k\}.$$

Такие же формулы (с естественными изменениями) можно написать и в случае ограниченности x_n снизу, проделайте это самостоятельно.

Замечание 62.
В качестве заключительного замечания отметим без доказательства, наверное, интуитивно понятный, но не потребующийся нам в дальнейшем критерий существования предела последовательности.

Последовательность x_n имеет предел (может быть, равный $\pm\infty$) тогда и только тогда, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Заинтересованные читатели могут попробовать доказать этот критерий самостоятельно.

§ 10. Критерий Коши

В этом, заключительном разделе, касающемся предела последовательности, мы обсудим важнейший критерий существования конечного предела – критерий Коши. В тех или иных нотациях он будет встречаться нам во время всего курса анализа.

Сначала разберемся с интуицией. Что можно сказать про сходящуюся последовательность? Согласно определению предела, задавшись произвольной окрестностью предела, начиная с какого-то момента все члены последовательности находятся внутри этой окрестности, то есть все они находятся равномерно близко друг к другу. Дадим этому формальное определение.

Определение 31 (Понятие фундаментальной последовательности).
Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; \forall n > n_0 \; \forall p \in \mathbb{N} \;\; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Итак, вроде бы понятно, что сходящаяся последовательность оказывается фундаментальной, а наоборот? А наоборот, как оказывается, нет.

Пример 16.
Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Мы знаем, что ее пределом является число e, а значит (это пока не доказано, но все же) рассматриваемая последовательность фундаментальна. Однако, e – иррациональное число, хотя рассматриваемая последовательность – это последовательность рациональных чисел.

Значит, с тем же успехом мы могли бы рассматривать не множество $\mathbb{R}$, а множество $\mathbb{Q}$. И в последнем множестве наша последовательность бы тоже была фундаментальной, но предела, из-за дырявости, не имела бы.

Итак, мы снова натыкаемся на то, что многое завязано на аксиоме непрерывности (полноты) множества $\mathbb{R}$.

Теорема 16 (Критерий Коши).
Последовательность x_n сходится (в $\mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \;\; |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - A) + (A - x_n)| \le |x_{n+p} - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

то есть x_n – фундаментальная последовательность.

Достаточность. Пусть x_n – фундаментальная последовательность, $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < 1.$$

В частности, при $n = n_0 + 1$

$$-1 + x_{n_0+1} < x_{n_0+p+1} < 1 + x_{n_0+1},$$

откуда члены последовательности x_n при $n > n_0 + 1$ ограничены числом

$$\max(|-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|).$$

Тогда, положив

$$C = \max(|x_1|, |x_2|, \ \ldots, |x_{n_0+1}|, |-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|)$$

получаем, что

$$|x_n| \leq C,$$

то есть фундаментальная последовательность ограничена. По теореме Больцано–Вейерштрасса (15) из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит

$$\exists x_{n_k} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A.$$

Докажем, что пределом последовательности x_n является число A. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу фундаментальности x_n,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$, то

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad |x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $k_1 > k_0$ таково, что $n_{k_1} > n_0$, тогда при $n > n_0$ имеем

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - A)| \leq |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение. □

Замечание 63.
Как полезно проследить, в доказательстве необходимости мы не пользовались никакими отсылками к аксиоме непрерывности. Наши нестрогие рассуждения ранее полностью подтвердились.

Что касается доказательства достаточности, то мы явно воспользовались теоремой Больцано–Вейерштрасса, которая, как обсуждалось ранее, эквивалентна аксиоме непрерывности.

На практике Критерий Коши часто используется для доказательства того, что предела не существует. Приведем соответствующие примеры.

Пример 17.
Важную роль в математическом анализе играет последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0\ \exists p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $p = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} \cdot n\right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ выполнено отрицание критерия Коши, откуда следует, что последовательность предела не имеет.

Можно заметить, что данная последовательность монотонна и имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, равный $+\infty$.

Вернемся к уже обсуждаемому ранее примеру.

Пример 18.
Докажем, что последовательность $x_n = \sin n$ не имеет предела. Предположим противное, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = A \in \mathbb{R}$. Так как

$$|\sin(n+2) - \sin n| = 2|\sin 1 \cdot \cos(n+1)|$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = A$ (лемма 27), а также так как $\sin 1 \neq 0$, то, переходя к пределу в полученном равенстве получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0$. Значит, аналогично,

$$\lim_{n\to\infty} \cos n = \lim_{n\to\infty} \cos(n+2) = 0.$$

Так как

$$|\cos(n+2) - \cos n| = 2|\sin 1 \cdot \sin(n+1)|,$$

то, аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0$, а значит $A = 0$. Но это невозможно, ведь

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1.$$

Глава 3
Предел и непрерывность функции

> Господь сотворил целые числа;
> остальное — дело рук человека.
>
> *Леопольд Кронекер*

В этой главе мы обобщим все те понятия, которые обсуждали в предыдущей главе, на функции, определенные не только на множестве натуральных чисел, но и на более причудливых множествах. Оказывается, что поведение таких функций можно свести к описанию поведения соответствующих им последовательностей.

Во многих физических закономерностях считается правильной следующая фраза: «небольшое изменение аргумента функции влечет небольшое изменение значения функции». Оказывается, эта фраза может быть вполне четко определена математически. Такие «хорошие» функции мы назовем непрерывными, а при изучении их свойств снова увидим, насколько важен принцип полноты (или – непрерывности) множества вещественных чисел.

§ 1. Определение предела функции по Коши

Перед тем как дать определение предела функции, нам потребуется ввести понятие предельной точки – точки, в которой мы сможем выяснять что-то про предел. Точки, «рядом» с которой есть еще много точек.

Определение 32 (Понятие предельной точки).
Точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной для множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, если в любой окрестности x_0 содержится бесконечное число элементов множества E, то есть

$$\forall U(x_0) \quad U(x_0) \cap E \ \text{ бесконечно.}$$

Приведем примеры.

Пример 19.
Пусть $E = [a, b]$. Множество предельных точек E – это весь отрезок $[a, b]$.

Пусть $E = (a, b)$. Множество предельных точек E – это снова отрезок $[a, b]$.

Пусть $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Множество предельных точек E – это множество, состоящее лишь из одного элемента – нуля.

Замечание 64.
Из примеров видно, что предельная точка может как принадлежать рассматриваемому множеству, так и не принадлежать. Более того, без рассмотрения конкретного множества понятие предельной точки бессмысленно. Для нас множеством E как правило будет выступать область определения рассматриваемой функции.

Теперь наша цель – научиться характеризовать поведение функции сколь угодно близко к интересующей нас точке. Дадим основное определение.

Определение 33 ($\varepsilon - \delta$ определение предела функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ – предельная точка для E. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A.$$

Снова попробуем пояснить геометрическую подоплеку происходящего.

Замечание 65.
Геометрически (рисунок 2) определение предела функции означает, что какую бы полосу шириной 2ε ни взять, найдется δ, что при всех x из области определения функции, лежащих в проколотой окрестности $(x_0 - \delta, \ x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, значения функции $f(x)$ лежат в этой полосе. При уменьшении ε ширина рассматриваемой полосы тоже уменьшается, а значение δ, вообще говоря, уменьшается.

Итак, предел – это то значение, к которому «неограниченно приближаются»

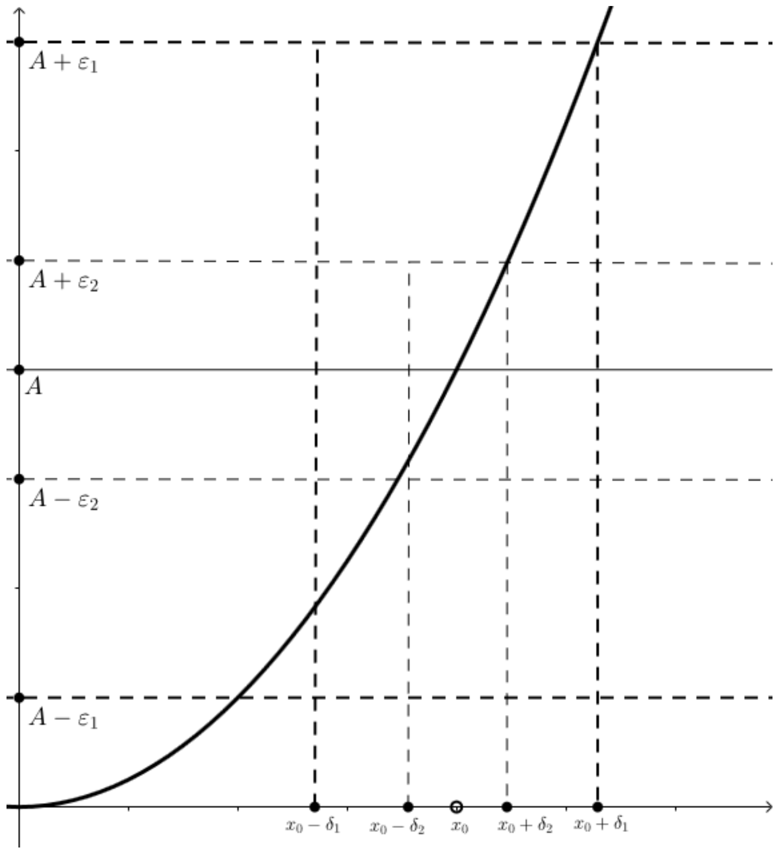

Рис. 2. Предел функции

значения функции при «неограниченном приближении» аргумента к x_0.

Замечание 66.
Здесь же отметим, почему важно, чтобы x_0 была предельной точкой для E. Если это не так, то значение δ можно взять настолько малым, что множество $\{x \in E : \ 0 < |x - x_0| < \delta\}$ будет пустым, а значит никакого «сравнения» значения функции $f(x)$ и A и просто не может быть. Кроме того, это рушит и всю идеологию понятия предела: изучать поведение функции сколь угодно близко к интересующей точке.

Отметим еще один момент, достойный отдельного замечания.

Замечание 67.
Обратите внимание, что при изучении предела само значение $f(x_0)$ никак не участвует, ведь сама точка x_0 в функцию «не подставляется». В частности, значение $f(x_0)$ может и вовсе быть не определено.

Перед тем, как рассмотреть примеры, приведем уже, в некотором смысле, знакомое нам замечание.

Замечание 68.
Используя понятия окрестности и проколотой окрестности, введенное определе-

ние предела можно переписать следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)\cap E\quad f(x)\in U_\varepsilon(A)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0)\cap E\right)\subset U_\varepsilon(A).$$

Теперь можно дать и такую трактовку понятию предела. Число A – предел функции f в точке x_0, если какую бы ни выбрать (сколь угодно малую) окрестность точки A, найдется проколотая окрестность точки x_0, что все (допустимые) значения функции в точках этой окрестности лежат в окрестности A.

Начнем со стандартного примера.

Пример 20.
Доказать, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Нужно найти те x, при которых выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon.$$

Так как $x\neq 2$, то

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| = |x+2-4| = |x-2|<\varepsilon.$$

Значит, если положить $\delta=\varepsilon$, то при $0<|x-2|<\delta$ выполняется

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon.$$

Замечание 69.
Снова отметим несколько важных моментов. Во-первых, δ должна найтись для каждого наперед заданного числа ε, а не для какого-то конкретного. Во-вторых, если нашлась какая-то $\delta(\varepsilon)$, то меньшее значение тоже подойдет в качестве δ. Ну и в-третьих, нам не нужно находить максимально возможное число δ, нам достаточно найти какое-нибудь.

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 21.
Доказать, что

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x)=6.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Заметим, что

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2).$$

Можно предполагать, что $x \in (2, 4)$, $x \neq 3$. Тогда

$$|(x-3)(x+2)| \le 6|x-3|.$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$6|x-3| < \varepsilon,$$

то, выбрав $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)$, при всех x таких, что $0 < |x-3| < \delta$, будет выполняться

$$|x^2 - x - 6| \le 6|x-3| < \varepsilon.$$

Конечно, не каждая функция имеет предел.

Пример 22.
Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Докажем, что у этой функции нет предела в точке 0. Запишем отрицание того факта, что число A является пределом введенной функции в нуле:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in E : 0 < |x - 0| < \delta \quad |\operatorname{sign} x - A| \ge \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ и $x_\delta = -\frac{\delta}{2}$, если $A \ge 0$, и $x_\delta = \frac{\delta}{2}$, если $A < 0$. Тогда, в любом из двух случаев,

$$|\operatorname{sign} x - A| \ge 1.$$

В то же время легко показать, что, например,

$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1.$$

Еще раз обратите внимание на то, что значение предела функции оказалось никак не связанным со значением функции в точке, где вычисляется предел.

Аналогично тому, как было в последовательностях, введем топологическое определение предела или определение через окрестности.

Определение 34 (Определение предела через окрестности).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для E. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A),$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A).$$

Конечно, как и при рассмотрении предела последовательности, справедлива следующая лемма.

Лемма 30.
Определения 33 и 34 эквивалентны.

Доказательство. Доказательство вторит доказательству леммы 20 и остается в качестве упражнения. □

Конечно, определение предела функции необходимо расширить: как на случай бесконечных пределов, так и на случай бесконечной точки. Все это, конечно, делается также, как делалось ранее: определение через окрестности не меняется, а определение через $\varepsilon - \delta$ переписывается лишь с оговоркой на «правильные» алгебраические выражения для окрестностей бесконечности. Приведем лишь некоторые варианты, остальные введите самостоятельно.

Определение 35 (Понятие бесконечных пределов).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E.
Элемент $-\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент $+\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 = -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x < -\frac{1}{\delta} \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Число A называется пределом функции f в точке $x_0 = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x > \frac{1}{\delta} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это, соответственно, так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} A.$$

Как и ранее, отметим следующее замечание.

Замечание 70.
Введенные определения можно переписать через ε-окрестности, то есть через $U_\varepsilon(\pm\infty)$, и через окрестности $U(\pm\infty)$, в том числе проколотые, ровно также, как это сделано в определениях 33 и 34. Утверждение леммы 30 сохраняется и в этом случае. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.

Вместо того, чтобы приводить очередной счетный пример, отметим вот такое связующее замечание.

Замечание 71.
Важно понимать, что определение предела последовательности – это частный случай определения предела функции. Так как для последовательности $E = \mathbb{N}$,

а элемент $+\infty$ – единственная предельная точка для E, то

$$\left\{x \in E : x > \frac{1}{\delta}\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\delta}\right\} = \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\},$$

где $n_0 = \min\left(\left\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\delta}\right\}\right) - 1$, а последний существует в силу следствия 7.

В заключение, отметим еще несколько важных замечаний.

Замечание 72.
Запись $\lim\limits_{x\to x_0} x_n = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 73.
При записи определения предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Замечание 74.
$\varepsilon - \delta$ определение предела 33 часто называют определением «по Коши», отсюда и название пункта

§ 2. Определение предела по Гейне

Несмотря на то, что, как мы выяснили в предыдущем пункте, определение предела последовательности – это частный случай определения предела функции, оказывается, что предел функции можно определить через предел последовательности. Такой подход называется определением предела по Гейне.

Определение 36 (Определение предела по Гейне).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка для E. Элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f в точке x_0, если **для любой** последовательности x_n такой, что:

1. $x_n \in E$.
2. $x_n \neq x_0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

выполняется равенство
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Конечно, было бы неловко называть разные вещи одним и тем же именем, поэтому докажем следующую теорему.

Теорема 17 (Об эквивалентности определений предела).
Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

Доказательство. Остановимся подробно на случае, когда $x_0, A \in \mathbb{R}$, остальные случаи оставим в качестве упражнения.

Сначала докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и в смысле определения по Гейне. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно определению по Коши,
$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(A).$$
Пусть последовательность x_n из условия. Тогда, по ранее найденному числу $\delta > 0$,
$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0).$$
Значит, при $n > n_0$
$$f(x_n) \in V_\varepsilon(A),$$
что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. В силу произвольности x_n, утверждение доказано.

Теперь докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Пойдем от противного, пусть не выполнено определение по Коши, то есть
$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Тогда, согласно написанному выше, для каждого δ_n

$$\exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_n}(x_0) \cap E : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Построенная последовательность x_n удовлетворяет (по построению) всем условиям, озвученным в теореме. В то же время, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако, так как

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, то есть не выполнено определение по Гейне. Это противоречие завершает доказательство. □

Определение предела по Гейне часто применяется на практике для доказательства того, что предела не существует. Приведем пример.

Пример 23.
Докажем, что не существует предела $\sin x$ при $x \to +\infty$. Рассмотрим две последовательности:

$$x_n^1 = 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad x_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Обе они удовлетворяют требованиям определения предела по Гейне. В то же время,

$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad f(x_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

и, так как пределы между собой не равны, мы делаем вывод, что предела не существует.

§3. Свойства функций, имеющих предел

Для функций, конечно, справедливы теоремы, аналогичные теоремам для последовательностей. Начнем с локальных свойств: единственность предела, ограниченность в случае конечного предела (правда, теперь лишь в окрестности точки) и сохранение знака. Геометрические подводки остаются ровно такими же, как и в случае последовательностей.

Теорема 18 (Локальные свойства функций, имеющих предел).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда:

1. При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.
2. При $A \in \mathbb{R}$ существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ функция $f(x)$ ограничена.
3. Если $A \neq 0$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, то существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и A совпадают.

Доказательство. Докажем первый пункт. От противного, пусть существует два предела $A_1 \neq A_2$ и пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$. Однако, в силу единственности предела последовательности (теорема 21) $A_1 = A_2$. Приходим к противоречию.

Докажем второй пункт. Пусть $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела функции,

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < 1 \ \Leftrightarrow \ (A-1) < f(x) < (A+1),$$

что и означает ограниченность.

Докажем третий пункт. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$. Тогда, согласно определению предела,

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \ \Leftrightarrow \ A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда и следует требуемое. Случай $A \in \overline{\mathbb{R}}$ остается в качестве упражнения. □

Отметим одно замечание.

Замечание 75.
В рамках условий доказанной теоремы, в пункте б) можно выдвинуть и следующее утверждение:

При $A \in \mathbb{R}$ существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ функция $f(x)$ ограничена.

Справедливость этого высказывания предлагается проверить самостоятельно.

§ 4. Арифметические свойства пределов

Теорема об арифметических свойствах пределов и мотивируется, и поясняется ровно также, как это было сделано в последовательностях. Приведем сразу ее расширенный вариант.

Теорема 19 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то:

1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть
$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$
2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть
$$f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} AB.$$
3. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой $\overset{o}{U}(x_0)$, то предел частного равен частному пределов, то есть
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Используя определение предела по Гейне, доказательство этой теоремы сводится к применению соответствующей теоремы (8) для последовательностей.

Докажем первое утверждение. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения предела по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Значит, по уже упомянутой теореме (8) для последовательностей,
$$f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$
В силу произвольности x_n это означает, что
$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$

Доказательство остальных пунктов остается в качестве упражнения. □

§ 5. Предельный переход в неравенствах

Аналогично тому, как было сделано в случае последовательностей, изучим двусторонние связи: как неравенство между функциями влияет на неравенство между пределами, и наоборот. Следуя уже известной логике, сначала разберемся со вторым вопросом.

Теорема 20.
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $A < B$. Тогда

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) < g(x).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы (9) для последовательностей и остается в качестве упражнения. □

Из этой теоремы моментально получается интересующее нас следствие – предельных переход в неравенствах.

Следствие 13 (Предельный переход в неравенствах).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Если $f(x) > g(x)$ на E, то $A \geq B$.
2. Если $f(x) \geq g(x)$ на E, то $A \geq B$.

Доказательство. Доказательство этого следствия можно либо провести непосредственно, как в случае последовательностей (следствие 11), либо воспользоваться тем же самым следствием и определением предела по Гейне. □

Конечно, нельзя не отметить следующее замечание.

Замечание 76.
В первом пункте следствия нельзя утверждать, что $A > B$. Например, для функций $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $g(x) = 0$ при $x > 0$ выполняется $f(x) > g(x)$, однако $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

§ 6. Теорема о сжатой переменной

Теорема о сжатой переменной – удобное достаточное условие существование предела. Естественно, оно переносится и на функции.

Теорема 21 (О сжатой переменной).
Пусть $f, g, h : E \to \mathbb{R}$, $f(x) \le h(x) \le g(x)$ на E и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$.
Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Доказательство. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Согласно последнему, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$. По теореме о сжатой переменной для последовательностей (10) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = A.$$

В силу произвольности последовательности x_n, теорема доказана. □

§ 7. Предел монотонной функции

Аналогично теореме Вейерштрасса для последовательностей и всему вокруг нее (см. соответствующий пункт), можно доказать аналогичную теорему и для функций. Перед этим, однако, введем необходимые определения.

Определение 37 (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция f убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Определение 38.
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

Теперь докажем теорему о пределе монотонной функции. Так как рассматривая предел функции в точке x_0 нам, вообще говоря, можно по-разному подбираться к x_0 (в отличие от предела последовательности на бесконечности), формулировка теоремы станет более тяжеловесной, но не менее геометричной.

Теорема 22 (О пределе монотонной функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – возрастающая (на E) функция, $s = \sup E$ – предельная для E. Тогда

$$\lim_{x \to s} f(x) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Конечность последнего предела равносильна ограниченности f (на E) сверху.

Доказательство. Пусть написанный предел конечен. Согласно локальным свойствам функций, имеющих предел (18), f ограничена в $U(s) \cap E$. Поскольку f – возрастающая на E функция, то это влечет ограниченность f сверху (на E).

Пусть теперь f ограничена сверху и $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно свойству (19) супремума,

$$\exists x_0 \in E : \;\; A - \varepsilon < f(x_0) \le A.$$

В силу неубывания f на E, при $x > x_0$, $x \in E$, имеем

$$A - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le A,$$

что и доказывает утверждение (сравните с доказательством теоремы Вейерштрасса 11).

Случай, когда f не ограничена сверху, остается в качестве упражнения. $\square$

Замечание 77.
Понятно, что аналогичная теорема справедлива для убывающей функции при $x \to i$, где $i = \inf E$ – предельная для E. Настоятельно советуем эту теорему аккуратно сформулировать и доказать.

Закинем якорь и немного на будущее.

Замечание 78.
Разговоры о супремуме и инфимуме E можно заменить на разговоры об одностороннем пределе в любой точке E. Уже сейчас полезно подумать, что значат эти слова. Мы же к этому понятию вернемся через несколько пунктов.

§ 8. Критерий Коши

В этом пункте все, опять-таки, аналогично соответствующему пункту про последовательности. Мы докажем, как и ранее, что существование конечного предела функции в точке равносильно тому, что значения функции в малой окрестности интересующей этой точки лежат очень близко друг к другу. Сформулируем это строго.

Теорема 23 (Критерий Коши).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для E. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \;\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \;\; |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь $x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, тогда, используя неравенство треугольника,

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \;\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Пусть x_n – последовательность, удовлетворяющая условиям определения предела по Гейне. Тогда, в частности,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E.$$

Значит при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ тем более

$$x_{n+p} \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E,$$

а значит

$$|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon,$$

что означает, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна и, тем самым, согласно критерию Коши для последовательностей (16), имеет конечный предел. Тем самым доказано, что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям определения предела по Гейне, последовательность $f(x_n)$ сходится.

Осталось показать, что все эти пределы одинаковы. От противного, пусть есть две последовательности x_n^1 и x_n^2, удовлетворяющие условиям определения предела по Гейне, но такие, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = A_1 \ne A_2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n^2).$$

Составим смешанную последовательность

$$x_n^3 = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \;\ldots, x_n^1, x_n^2, \;\ldots\},$$

которая, как легко понять, тоже удовлетворяет условиям определения предела по Гейне. С одной стороны, по только что доказанному выше, последовательность $f(x_n^3)$ сходится, а с другой стороны

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{2k-1}^3) = A_1 \neq A_2 = \lim_{k\to\infty} f(x_{2k}^3).$$

Это противоречит утверждению леммы 27. Тем самым, теорема доказана полностью. $\square$

§ 9. Односторонние пределы

В этом разделе мы обсудим понятие односторонних пределов. Косвенно эти понятия мы уже затрагивали, обсуждая пределы на бесконечностях или теорему о пределе монотонной функции (22), но теперь мы коснемся их намного детальнее.

Мотивация к введению понятия предела была такой: хотелось узнать поведение функции в окрестности той или иной точки. Односторонние пределы в некотором смысле обобщают и уточняют это желание. Приведем пример.

Пример 24.
Рассмотрим уже обсуждаемую ранее функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Понятно (пример 22), что у нее нет предела в точке ноль. Однако, если мы рассмотрим эту функцию лишь при $x > 0$, либо при $x < 0$, то ситуация изменится радикально: пределы будут 1 и -1, соответственно. Наверное, сложно не согласиться, что такая характеристика поведения функции куда более информативна, чем вывод, что предела в нуле нет. Аналогичные рассуждения применимы и к функции $\dfrac{1}{x}$, опять-таки, в нуле. Подумайте, что там так или не так.

Обозначив проблему, предложим и ее решение, введя понятия односторонних пределов.

Определение 39 (Понятие правостороннего предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$.

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 справа, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Определение 40 (Понятие левостороннего предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$.

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 слева, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Отметим и следующее замечание.

Замечание 79.
Мы видим, что здесь мы требуем, чтобы x_0 была «односторонней» предельной

точкой для области определения функции. Это мотивируется теми же соображениями, что были выдвинуты нами ранее при рассмотрении понятия предела.

Более того, мы допускаем, что A может быть элементом расширенного множества вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$, но требуем, чтобы точка x_0 была числом, то есть элементом $\mathbb{R}$. Все дело в том, что понятие предела при $x \to \pm\infty$ и так, по сути, является понятием одностороннего предела (вспомните, как там определяется окрестность!).

Кроме того, понятия односторонних пределов могут быть переписаны и через произвольные окрестности, и через определение по Гейне (с необходимыми изменениями), и все это приведет к эквивалентным понятиям. Мы не будем останавливаться на этом детально, но предлагаем читателю восстановить канву и понять, что за необходимые изменения надо провести, чтобы все утверждения и определения были четкими.

Отметим и еще одно замечание, касающееся, скорее, жаргона, а не сути.

Замечание 80.
На практике и в текстах часто применяют следующие обозначения:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Более того, иногда пишут $x \to x_0\pm$ вместо $x \to x_0 \pm 0$.

Приведем примеры.

Пример 25.
Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Ясно, что

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Пример 26.
Рассмотрим функцию

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x}}.$$

Так как при $x \to 0 + 0$ имеет место равенство

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

то легко понять (из школьных соображений), что

$$\lim_{x \to 0+0} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Аналогично, так как

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

то легко понять, что
$$\lim_{x\to 0-0} 5^{\frac{1}{x}} = 0.$$

В терминах односторонних пределов можно привести и следующий, напрашивающийся, критерий существования предела функции в точке.

Теорема 24 (Критерий существования предела через односторонннне).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ — предельная точка для множеств
$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}.$$
Тогда
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда
$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$
В частности,
$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$
то есть $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Аналогично,
$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$
то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда
$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$
Аналогично,
$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$
Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда выполнены оба неравенства, а значит
$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$
что и доказывает утверждение. □

Отметим и такое необременительное замечание.

Замечание 81.
Если x_0 – не предельная точка ровно для одного из множеств U_- или U_+, то теорема тоже остается верной. В этом случае понятие предела в точке x_0 само по себе становится понятием одностороннего предела. Это касается и пределов на бесконечностях.

Если x_0 – не предельная точка ни для иножества U_-, ни для множества U_+, то понятия предела в точке x_0, ровно как и понятий односторонних пределов, не существует и вовсе.

§ 10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

В этом пункте мы не обсудим ничего нового, но введем некоторую порцию новых, полезных для дальнейшего понятий, а так же свойств, связанных с этими понятиями.

Начнем с понятия бесконечно малой функции.

Определение 41 (Понятие бесконечно малой функции).
Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Итак, бесконечно малая в точке x_0 функция – это та функция, предел которой (а не значение!) в этой точке равен нулю. Почти аналогичным образом вводится понятие бесконечно большой функции.

Определение 42 (Понятие бесконечно большой функции).
Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} |\beta(x)| = +\infty.$$

Естественно задаться вопросом о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций. Он решается легко, при помощи следующей леммы.

Лемма 31 (О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).
Пусть $\beta(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда

$$\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$$

– бесконечно малая при $x \to x_0$.

Пусть $\alpha : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

— бесконечно большая при $x \to x_0$.

Доказательство. Доказательство этих соотношений можно провести непосредственно (сделайте это!), а можно воспользоваться теоремой 19. □

Отметим теперь свойства бесконечно малых функций.

Лемма 32.
Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда:

1. Функция $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

2. Функция $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.
3. Если функция $\theta : E \to \mathbb{R}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, то функция $\alpha(x)\theta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство. В силу арифметических свойств пределов (8), в доказательстве нуждается только третий пункт приведенной леммы.

Согласно условию,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |\theta(x)| \leq C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 < \delta : \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C+1}.$$

Тогда, при $x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E$ выполняется

$$|\theta(x)\alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

Приведем пример.

Пример 27.
Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, как мы знаем, не существует. В то же время, $|\sin x| \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}$, а значит функция $\sin x$ является ограниченной. Кроме того, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, значит функция $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$. Тогда, согласно доказанной лемме,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Отметим еще и один критерий существования конечного предела функции, полезный для нас в дальнейшем.

Теорема 25 (Критерий существования конечного предела в терминах б.м.).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная для E. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$ приходим к определению того, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ и, в то же время, представление $f(x) = A + \alpha(x)$.

Докажем достаточность. Пусть $f(x) = A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x\to x_0} A + \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

$\square$

§ 11. Понятие непрерывности функции

Понятие предела позволило понять что-то о поведении функции рядом с интересующей нас точкой. А что, если это поведение сравнить со значением функции в самой точке? Казалось бы, если рядом с точкой происходит то же самое, что в точке, то график функции можно рисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Такое свойство называется свойством непрерывности, на нем основывается огромное количество наших дальнейших построений.

Дадим общее «топологическое» определение непрерывности.

Определение 43 (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

Прежде чем пояснить данное определение еще раз, приведем следующее замечание.

Замечание 82.
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0 записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

Теперь перейдем к пояснению введенного понятия.

Замечание 83.
Мы не зря в конце предыдущего определения уже заговорили про предел. Ведь то, что написано – ну очень на него похоже. И правда, мы хотим, чтобы, взяв сколь угодно малую окрестность вокруг значения $f(x_0)$ функции f в точке x_0, нашлась окрестность точки x_0, что все значения функции в (допустимых) точках из этой окрестности лежали в выбранной окрестности $f(x_0)$.

Чем это отличается от предела? И мало, и много чем. Во-первых, теперь мы не требуем того, чтобы точка x_0 была предельной для области определения E. Это, как легко понять, дает нам автоматическую непрерывность функции во всех непредельных точках ее области определения. Во-вторых, окрестность точки x_0

теперь не проколотая. Но это не удивительно, ведь мы сравниваем значения f рядом с точкой x_0 со значением в точке x_0.

Итак, важно понять, что теперь, в отличие от наших предыдущих разговоров про предел, решается несколько иная задача. Правда, понятие предела здесь очень даже при чем.

Зафиксируем уже анонсированную ранее связь понятий предела и непрерывности.

Лемма 33 (Связь непрерывности и предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

1. Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
2. Если точка x_0 не является предельной для E, то f непрерывна в x_0.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим первое утверждение. Докажем необходимость. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, предельной для E, тогда
$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$
В частности,
$$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$
Тем самым, мы пришли к тому, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда
$$\forall V(f(x_0))\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$
Так $f(x_0) \in V(f(x_0))$, то на самом деле выполняется и то, что
$$\forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)),$$
и мы приходим к факту непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

2. Теперь докажем второе утверждение. Если x_0 не является предельной точкой для множества E, то существует окрестность $U(x_0)$, не содержащая других, кроме x_0, точек из E. А тогда если $\varepsilon > 0$, то
$$x \in U(x_0) \cap E \ \Rightarrow (x = x_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$
что и завершает доказательство. □

Приведем примеры.

Пример 28.
Рассмотрим в качестве функции тождественную константу, то есть $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Докажем, что она непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда неравенство
$$|c - c| < \varepsilon$$

справедливо для любого $\delta > 0$ и любой точки x_0, что и завершает доказательство.

Аналогичным образом можно показать, что функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, ведь неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

верно как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Обобщим теперь непрерывность функции в точке на непрерывность на множестве.

Определение 44 (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

Поясним введенное определение.

Замечание 84.
С точки зрения геометрии, непрерывность функции, например, на отрезке $[a, b]$ может трактоваться так: график функции на этом отрезке можно нарисовать не отрывая ручки от бумаги.

Кстати, непрерывные функции, и только они перестановочны с операцией взятия предела, ведь только для них

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0),$$

где последний переход справедлив в силу доказанной выше непрерывности функции x.

Буква C в обозначении непрерывной функции идет от слова «continuous».

Конечно, не все функции являются непрерывными. Примерам и обсуждению «проблемных» функций и будет посвящен следующий блок.

§ 12. Классификация точек разрыва

Рассмотрим ситуации, которые возможны в случае, когда функция не непрерывна. Для начала дадим «разумное» определение точке разрыва.

Определение 45 (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для E и f не непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется точкой разрыва для функции f.

Итак, точками разрыва функции $f : E \to \mathbb{R}$ мы будем называть даже те точки, в которых функция не определена, но только если они являются предельными для области определения E. Точки, в которых функция не определена «вообще» к точкам разрыва, конечно, не относятся.

Если в точке x_0 произошел разрыв, то интересным оказывается выяснить его причину, то есть посмотреть на то, что происходит слева и справа от x_0, конечно, по возможности. Значит, классификация разрывов опирается на поведение односторонних пределов. Чтобы дальнейший рассказ был логичным, сначала охарактеризуем непрерывность в терминах односторонних пределов.

Лемма 34 (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная для E. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

Доказательство. Эта лемма – комбинация леммы 33 и теоремы 24. □

Замечание 85.
Хочется прокомментировать слова «в смысле определения» в формулировке предыдущей леммы. Напомним, что для того, чтобы можно было рассматривать, скажем, левосторонний предел функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0, необходимо, чтобы x_0 была предельной для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : \ x < x_0\}$. Последнее же выполнено не всегда.

Например, область определения функции $f(x) = \ln x$ – это интервал $(0, +\infty)$, и левосторонний предел в точке 0 не существует не как предел, а как объект как таковой. Правосторонний же предел как объект существует, хотя и равен $-\infty$ и не существует в $\mathbb{R}$, но уже как предел.

В то же время, если x_0 – предельная для E, то она предельная и хотя бы для одного из множеств: $U_-(x_0)$ или $U_+(x_0) = \{x \in E : \ x > x_0\}$.

Приведенная лемма позволяет нам шаг за шагом ухудшать ситуацию с односторонними пределами, а значит и «увеличивать» градус (род) разрыва. Начнем с самой приятной ситуации, которую легко «исправить».

Определение 46 (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке x_0 либо не определено, либо отличается от A, то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f.

Приведем пример.

Пример 29.
Рассмотрим функцию
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$
и точку $x = 3$. Ясно, что $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$, но функция не определена в точке $x = 3$. Тем самым, точка $x = 3$ – это точка устранимого разрыва функции f.

Рассмотрим функцию
$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$
и точку 0. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$ и, так как $|\operatorname{sign} 0| = 0$, то точка 0 – точка устранимого разрыва функции $|\operatorname{sign} x|$.

Замечание 86.
Понятно, что устранимым разрыв называется не просто так. Переопределив, или определив в условиях данного выше определения функцию f в точке x_0 значением $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ мы добьемся того, что f станет непрерывной в x_0.

Ухудшим ситуацию и введем следующее определение.

Определение 47 (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но
$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$
то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или скачком.

Приведем пример.

Пример 30.
Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$. Точка $x_0 = 0$, очевидно, является точкой разрыва первого рода функции f, ведь, как мы знаем,
$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = 1.$$

Замечание 87.
Понятно, что скачком точка x_0 в предыдущем определении названа не просто

так. Геометрически, при переходе через точку x_0 значение функции меняется скачкообразно со значения $f(x_0 - 0)$ на значение $f(x_0 + 0)$. Естественно, для этого оба односторонних предела во-первых должны существовать как объекты, а во-вторых быть числами. Исправить разрыв первого рода, не меняя сильно функцию, нельзя. Само значение функции в точке x_0 ни на что не влияет.

Максимально ухудшим ситуацию и введем теперь уже финальное определение.

Определение 48 (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Приведем порцию примеров.

Пример 31.
Пусть $f(x) = \ln x$. Точка $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = -\infty$.

Пусть $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$. Точка $x_0 = 0$, опять-таки, точка разрыва второго рода, ведь

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

Во всех приведенных примерах односторонние пределы существуют в $\overline{\mathbb{R}}$. Это, конечно, не всегда так. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

Нетрудно понять, что односторонние пределы в нуле у этой функции не существуют вовсе, а значит $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода функции f.

Отметим следующее замечание.

Замечание 88.
Итак, разрыв второго рода – это либо уход функции на бесконечность, либо несуществование хотя бы одного из односторонних пределов даже в $\overline{\mathbb{R}}$. Конечно же, разрыв второго рода просто так не исправить.

Дадим и еще такое непонятное, но далеко идущее замечание.

Замечание 89 (О непрерывности элементарных функций).
А что можно вообще-то сказать про непрерывность функций? Неужели ее надо проверять в каждой точке? Заглянем немного вперед.

Синус, экспонента, аркфункции и все те стандартные функции, изучаемые в школе, часто называют простейшими. Их сумму, произведение, частное и композицию (в конечном числе) – элементарными. Так вот оказывается верной следующая теорема: все элементарные функции непрерывны на своей области определения. Тем самым, при исследовании функции на непрерывность, имеет смысл рассматривать только те точки, где либо рвется область определения (первый пример в примере 29), либо функция теряет элементарность (первый пример в примере 30).

Более строго обозначенные факты мы обсудим позже.

§ 13. Локальные свойства непрерывных функций

В этом пункте мы снова обсудим локальные свойства. Только теперь не функций, имеющих предел, а непрерывных функций. Так как определение непрерывности функции в точке, предельной для области определения, опирается на понятие предела, то «глобально» ничего нового мы не узнаем, а просто переформулируем уже известные и доказанные факты.

Теорема 26 (Локальные свойства непрерывных функций).
Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0.
2. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть, кроме того, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

(в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в x_0.

(г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в x_0.

(д) Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в x_0, если $g(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Первые два пункта доказывается также как соответствующие пункты в локальных свойствах (18) функций, имеющих предел, и остаются в качестве упражнения.

Докажем, например, третий пункт. Если x_0 – не предельная точка для E, то функция $f(x) + g(x)$, чья область определения – это множество E, автоматически непрерывна в точке x_0. Если же точка x_0 – предельная точка для E, то, используя определение непрерывности через предел, а также арифметические свойства пределов (19), имеем

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + g(x_0),$$

что и доказывает непрерывность суммы. Остальные пункты доказываются аналогично и остаются в качестве упражнения. $\square$

Богатейший источник функций – операция композиции. И здесь-то нас ждет что-то новое, но вряд ли удивительное. Коротко, но не совсем строго факт можно сформулировать так: композиция непрерывных функций – непрерывная функция. Приведем соответсвующую теорему.

Теорема 27 (О непрерывности композиции).
Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\forall V(g(y_0)) \; \exists U(y_0) : \forall y \in U(y_0) \cap E_2 \quad g(y) \in V(g(y_0)).$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x_0) = y_0$, то по $U(y_0)$

$$\exists W(x_0) : \forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad f(x) \in U(y_0),$$

и, так как $f : E_1 \to E_2$, то $f(x) \in U(y_0) \cap E_2$, откуда

$$\forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad g(f(x)) \in V(g(f(x_0))),$$

что и доказывает непрерывность $g(f(x))$ в точке x_0. □

Интересно, что подобной теоремы о, например, пределе композиции, у нас не было. Более того, такой теоремы «напрямую» и не получится.

Замечание 90.
Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ имеет предел в точке $x_0 \in E_1$, равный y_0, а функция $g(y)$ имеет предел в точке y_0. Верно ли, что функция $g(f(x))$ имеет предел в точке x_0?

Оказывается, что требования только существования предела функции $g(y)$ в точке y_0 недостаточно. Приведем пример. Пусть

$$g(y) = |\operatorname{sign} y|, \qquad f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ как произведение бесконечно малой на ограниченную (32), а $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$. В то же время, предела $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ не существует. Действительно, пусть

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n}, \; x_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^1)) = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^2)) = 1$, что противоречит определению предела по Гейне.

Исправить сложившуюся ситуацию можно, потребовав, чтобы функция $g(y)$ была непрерывна в точке y_0, при этом дополнительных ограничений на функцию f можно не накладывать. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, предложив доказать этот несложный факт в качестве упражнения.

§ 14. Глобальные свойства непрерывных функций

Данный пункт будет посвящен не локальным, точечным свойствам непрерывных функций, а глобальным. Эти свойства целиком и полностью опираются, опять-таки, на аксиому непрерывности, и мы постараемся понять почему.

Пример 32.
Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

На множестве $(0, 1)$ эта функция, будучи непрерывной, не ограничена и не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений. При этом эта функция ограничена в окрестности каждой точки множества $(0, 1)$ согласно локальным свойствам непрерывных функций (26).

На множестве $(0.5, 1)$ эта функция, опять-таки, непрерывна, теперь и ограничена, но все равно не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений.

На множестве $[0.5, 1]$ эта функция все также непрерывна, но теперь не только ограничена, но и достигает наибольшего и наименьшего значений.

Отметим какие-то выводы.

Замечание 91.
Мы видим, что непрерывность – не достаточное условие для «хорошего» поведения функции. Кроме как о функции, нужно думать и о множестве, на котором она задана. Чем так сильно, спросите вы, отличается отрезок от интервала? Тем, что он, как говорят, компактен, а именно:

1. Он ограничен как подмножество $\mathbb{R}$.
2. Если $x_n \in [a, b]$ – сходящаяся к x_0 последовательность, то $x_0 \in [a, b]$.

В итоге, отрезок «удерживает» в себе предел сходящейся последовательности его элементов. Это снова отсылает нас к вопросу полноты, который мы обсуждали при рассмотрении критерия Коши для последовательности, а значит и к аксиоме непрерывности.

У интервала ни того, ни другого свойства, вообще говоря, нет: интервал может быть неограниченным, но это ладно. Последовательность элементов интервала может сходиться к точке, не лежащей в интервале. Например, для интервала $(0, 2)$ такой последовательностью будет последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Давайте сначала формально обоснуем наши слова про «удержание» отрезком предела сходящейся последовательности его элементов.

Лемма 35 (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a, b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b].$$

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Допустим противное, пусть $A \notin [a, b]$. Тогда при $\varepsilon = \min(|a - A|, |b - A|)$ в ε-окрестности точки A нет точек из отрезка $[a, b]$, а значит и членов последовательности x_n, что невозможно согласно, например, пункту

3 леммы 21. Это противоречие завершает доказательство. □

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса.

Теорема 28 (Вейерштрасса).
Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда:

1. f ограничена на $[a, b]$.
2. f достигает на $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений.

Доказательство. Докажем первый пункт. От противного, пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда существует (сродни доказательству леммы 28) последовательность $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Так как x_n ограничена, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (15),

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Согласно лемме 35, $x_0 \in [a, b]$. Теперь мы приходим к противоречию с непрерывностью f в точке $x_0 \in [a, b]$: с одной стороны, из непрерывности следует, что

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \in \mathbb{R},$$

а с другой стороны, из леммы 27,

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Случай, когда f не ограничена снизу, рассматривается аналогично и остается в качестве упражнения.

Докажем второй пункт. Снова будем доказывать от противного. Пусть, например, супремум не достигается:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x) \neq M \quad \text{при} \quad x \in [a, b].$$

Тогда функция

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

положительна на $[a, b]$ и, кроме того, по теореме 26, непрерывна на $[a, b]$. Значит, по доказанному в первом пункте, функция $g(x)$ ограничена. Тогда существует число $M_1 > 0$, что $g(x) < M_1$ на $[a, b]$. В то же время, при $x \in [a, b]$

$$\frac{1}{M - f(x)} < M_1 \ \Leftrightarrow \ M - f(x) > \frac{1}{M_1} \ \Leftrightarrow \ f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

что противоречит тому, что $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. □

Замечание 92.
Не обойтись и без комментариев, конечно, к первому пункту. Если вдуматься в

доказательство, то мы воспользовались всеми теми бонусами отрезка, о которых говорили. Ограниченность отрезка как подмножества $\mathbb{R}$ дает нам возможность воспользоваться теоремой Больцано–Вейерштрасса (15) и выделить сходящуюся подпоследовательность. Свойство «удержания» предела, присущее отрезку, позволило воспользоваться непрерывностью функции на отрезке, так как точка x_0 осталась в нем, а не «сбежала».

Теперь обсудим еще одно важное свойство непрерывных на отрезке функций: принимая на отрезке два любых значения, они принимают на этом отрезке и все промежуточные значения. Однако, сначала обсудим геометрически понятную теорему о корне: непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, должна в какой-то точке отрезка обратиться в ноль.

Теорема 29 (Первая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Обозначим $a_1 = a$, $b_1 = b$. Разделим отрезок $I_1 = [a_1, b_1]$ пополам точкой

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Если $f(c_1) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_1) \neq 0$, то либо $f(c_1) > 0$, либо $f(c_1) < 0$. Из получившихся двух отрезков выберем тот, на концах которого значения функции все также имеют разный знак. Это значит, что в первом случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[c_1, b]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a, c_1]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_2 и b_2.

Продолжаем по индукции. Если построен отрезок $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, то на шаге $n \geq 2$ разделим отрезок I_{n-1} пополам точкой

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Если $f(c_{n-1}) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_{n-1}) \neq 0$, то либо $f(c_{n-1}) > 0$, либо $f(c_{n-1}) < 0$. В первом случае в качестве отрезка I_n выберем отрезок $[c_{n-1}, b_{n-1}]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a_{n-1}, c_{n-1}]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_n и b_n.

Так как $a_n, b_n \in [a, b]$, то по теореме Больцано–Вейерштрасса (15)

$$\exists a_{n_k} : a_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} a_0, \quad \exists b_{n_k} : b_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} b_0,$$

причем $a_0, b_0 \in [a, b]$, что следует из леммы 35. Так как длина отрезка I_1 на каждой итерации уменьшается в два раза, то

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

откуда $a_0 = b_0 = x_0 \in [a, b]$. Пользуясь непрерывностью f на $[a, b]$, имеем:

$$f(a_{n_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x_0), \quad f(b_{n_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x_0).$$

Так как, по построению, $f(a_{n_k}) > 0$, $f(b_{n_k}) < 0$, то, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$(f(x_0) \geq 0) \ \wedge \ (f(x_0) \leq 0) \ \Rightarrow \ f(x_0) = 0,$$

и теорема доказана. □

Замечание 93.
Обратите внимание, как мы снова использовали все свойства, присущие отрезку, речь о которых велась в самом начале данного пункта.

Полезно отметить и следующее. Доказательство теоремы оказалось весьма конструктивным. Предложенный метод поиска корня уравнения $f(x) = 0$ называется дихотомией или методом половинного деления.

Из доказанной теоремы легко получается интересующий нас, упомянутый ранее, факт – теорема о промежуточных значениях.

Теорема 30 (Вторая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда

$$\forall C \in (A, B) \ \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

Доказательство. Пусть $C \in (A, B)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - C.$$

Во-первых, эта функция непрерывна на $[a, b]$ как разность непрерывных функций. Во-вторых,

$$g(a) = A - C < 0, \quad g(b) = B - C > 0.$$

Значит, согласно первой теореме Больцано–Коши (29),

$$\exists c \in (a, b) : g(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) - C = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) = C,$$

что и доказывает теорему. □

Снова повторим, что доказанный нами факт говорит о том, что непрерывная функция, принимая на отрезке какие-то два значения, принимает на этом же отрезке и все промежуточные значения.

Еще одна характерная особенность непрерывных функций – способность сохранять промежуток. Для начала разберемся с понятием последнего.

Определение 49 (Понятие промежутка).
Отрезок, интервал, полуинтервал или луч с концами $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ называется промежутком и обозначается $\langle a, b \rangle$.

Оказывается, на прямой промежуток характеризуется следующим образом: вместе с любыми двумя точками он содержит и отрезок с концами в этих точках. Иными словами – промежуток, и только он – выпуклое в $\overline{\mathbb{R}}$ множество.

Лемма 36 (Характеристика промежутка).
Следующие утверждения эквивалентны:

1. $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ – промежуток.
2. Если $a, b \in E$, $a < b$, то $[a, b] \subset E$.

Доказательство. Второе утверждение моментально следует из первого, если только вспомнить определение промежутка. Докажем встречное утверждение.

Пусть $M = \sup E$, $m = \inf E$. Ясно, что $E \subset [m, M]$. Покажем, что $(m, M) \subset E$. Действительно, если $z \in (m, M)$, то, согласно свойству точных граней (см., например, лемму 19),

$$\exists x, y \in E : \quad x < z < y.$$

Тогда, по условию, $[x, y] \subset E$, а значит $z \in E$, что и доказывает утверждение. □

Полезно отметить, что непрерывные функции обладают свойством «сохранения» промежутков. Точнее это свойство может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 31 (О сохранении промежутка).
Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Тогда

$$f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle, \quad m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Доказательство. Пусть $E = f(\langle a, b\rangle)$. Согласно второй теореме Больцано–Коши (30), если $y_1, y_2 \in E$, $y_1 \leq y_2$, то $[y_1, y_2] \subset E$. Тем самым, по только что доказанной лемме, E – промежуток, что завершает доказательство. □

Замечание 94.
Заметим, что тип промежутка при непрерывном отображении, вообще говоря, может не сохраняться. Так, например, непрерывная функция $y = \sin x$ отображает что интервал $(0, 3\pi)$, что полуинтервал $(0, 2\pi]$, в отрезок $[-1, 1]$. Впрочем, совсем уж «всяких» вариантов быть не может.

Отрезки множества $\mathbb{R}$ обладают особым свойством.

Лемма 37 (Непрерывный образ отрезка).
Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$. Тогда

$$f([a, b]) = [m, M], \quad m = \min_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \max_{\langle a,b\rangle} f.$$

Доказательство. Согласно теореме о сохранении промежутка (31),

$$f([a, b]) = \langle m, M\rangle, \quad m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f$$

В то же время, согласно теореме Вейерштрасса (28), образ отрезка содержит максимальный и минимальный элементы. Эти рассуждения завершают доказательство. □

Заметим вскользь, что упомянутые в доказательстве наибольшее и наименьшее значения функции вовсе не обязаны достигаться на концах отрезка. В то же время, следующее, на наш взгляд идейное замечание, выделим отдельно.

Замечание 95.
Теорема о сохранении промежутка не допускает прямого обращения. Например, разрывная в точке $x = 1$ функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (1,2] \end{cases}$$

образом области определения имеет отрезок $[0,1]$.

В то же время, если наложить на функцию требование монотонности, то теорема о сохранении промежутка обращается. И правда, если и только если монотонная функция не непрерывна, то ее образ не является промежутком.

Теорема 32 (Критерий непрерывности монотонной функции).
Пусть f – монотонная на $\langle a,b\rangle$ функция. Тогда:

1. f не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность f равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

Доказательство. Пусть, например, f возрастает.

1. Докажем первый пункт. Пусть $x_0 \in (a,b\rangle$, $x_1 \in \langle a,x_0)$. В силу возрастания f, имеем

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_0), \quad x \in (x_1,x_0).$$

По теореме Вейерштрасса (22), f имеет предел при $x \to x_0 - 0$. Согласно теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f(x_1) \le f(x_0 - 0) \le f(x_0).$$

Аналогично доказывается, что для $x_0 \in \langle a,b)$, $x_1 \in (x_0,b\rangle$

$$f(x_0) \le f(x_0 + 0) \le f(x_1).$$

Тем самым, установлено существование (в $\mathbb{R}$) односторонних пределов, что и доказывает утверждение.

2. Докажем второй пункт. В силу теоремы о сохранении промежутка (31), в доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть $f(\langle a,b\rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность f в любой точке $x_0 \in (a,b\rangle$ слева. Если это не так, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0).$$

Пусть $y \in (f(x_0 - 0), f(x_0))$. Тогда, если $x_1 \in (a,x_0)$, то

$$y \in [f(x_1), f(x_0)] \subset f(\langle a,b\rangle),$$

а значит y – значение функции. Но, как показано в доказательстве первого пункта,

$$f(x) \le f(x_0 - 0) < y, \quad x \in (a, x_0),$$

$$f(x) \ge f(x_0) > y, \quad x \in [x_0, b\rangle,$$

а значит f не принимает значение y, что приводит к противоречию. Аналогичным образом доказывается непрерывность f в каждой точке множества $\langle a, b)$ справа. □

Теперь мы готовы доказать теорему об обратной функции. Для обратимости функции важна ее биективность, а простой способ удовлетворить биективности – потребовать строгую монотонность. В этом случае обратная функция, конечно, окажется тоже строго монотонной, с тем же характером монотонности. Если же исходная функция, к тому же, непрерывна, то это свойство унаследует и обратная функция.

Теорема 33 (Об обратной функции).
Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и строго монотонна,

$$m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и f.
3. $f^{-1} \in C(\langle m, M\rangle)$.

Доказательство. Будем считать, что f строго возрастает.

1. Докажем первый пункт. В силу строгого возрастания f,

$$(x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \wedge (x_1 < x_2) \ \Rightarrow\ (f(x_1) < f(x_2)),$$

откуда f – инъекция. То, что $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$ следует из теоремы о сохранении промежутка (31). Итого, f – биекция между указанными множествами.

2. Докажем второй пункт. Пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, $y_1 < y_2$. Тогда, так как $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, то $x_1 < x_2$ в силу строгого возрастания f.

3. Докажем третий пункт. Его утверждение следует из теоремы 32. □

§ 15. Первый замечательный предел

В этом пункте мы докажем равенство, которое называется первым замечательным пределом. Будем пользоваться школьным (наивным) определением синуса. Подробнее о возникающих проблемах поговорим в разделе про построение простейших функций.

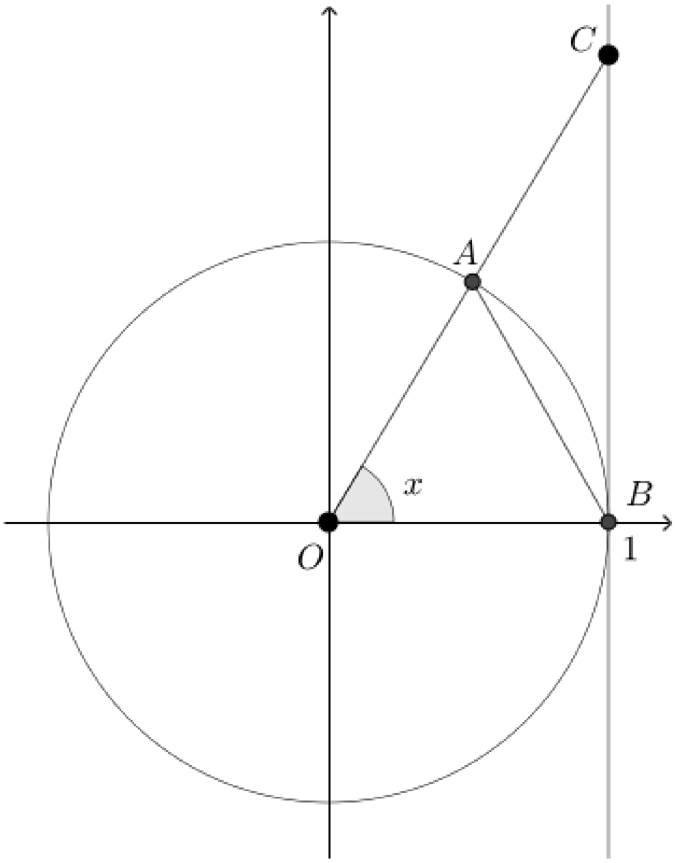

Рис. 3. Первый замечательный предел

Теорема 34 (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пусть $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Построим (рисунок 3) единичную окружность с центром в начале координат, а также ось тангенса – ось CB. Из геометрических соображений очевидно неравенство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\triangle OCB}.$$

Вычислив все эти площади, придем к соотношениям

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сект. } OAB} = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot OB = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

которые приводят к цепочке неравенств

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Замечание 96.
Прямо здесь, внутри доказательства, отметим попутно установленное неравенство

$$\sin x < x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

или, учитывая нечетность функций x и $\sin x$, то, что $\sin 0 = 0$, и область значений синуса,

$$|\sin x| \le |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поделив упомянутую ранее цепочку на $\sin x$, и приняв во внимание четность входящих в нее функций, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве при $x \to 0$ и докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| = \left|2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}\right| \le \left|2 \sin \frac{x}{2}\right| < 2 \left|\frac{x}{2}\right| = |x| < \varepsilon.$$

Взяв $\delta = \varepsilon$, приходим к определению предела. Тем самым, по теореме о сжатой переменной (21),

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

откуда и следует утверждение. □

В доказательстве попутно был установлен следующий важный факт. Вынесем его отдельно.

Следствие 14.
Справедливо неравенство

$$|\sin x| \le |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

§ 16. Непрерывность элементарных функций

До сих пор мы обсуждали свойства непрерывных функций, но так толком и не обсудили непрерывность функций, которыми на практике пользуемся мы: степенная, тригонометрические, и другие. В этом достаточно объемном и трудоемком разделе мы определим так называемые простейшие функции. Начнем с формальности.

Определение 50 (Понятие простейших функций).
Основными элементарными функциями, или простейшими функциями, называются следующие функции:

1. Постоянная или
$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
2. Степенная или
$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
3. Показательная или
$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$
4. Логарифмическая или
$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$
5. Тригонометрические или
$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \operatorname{ctg}(x).$$
6. Обратные тригонометрические или
$$f(x) = \arcsin x, \quad f(x) = \arccos x, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f(x) = \operatorname{arcctg} x.$$

По сути, нам надо построить каждую из функций, описать ее область определения, и, в итоге, исследовать на непрерывность.

1 Постоянная функция

Областью определения постоянной функции
$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
является множество $\mathbb{R}$. При этом, как уже было установлено в примере 28, она непрерывна на $\mathbb{R}$.

2 Степенная функция: начало

Целью этого и еще одного последующего пункта будет определить и исследовать степенную функцию – функцию вида
$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
Будем постепенно усложнять вид степени α.

В случае, когда $\alpha = 1$, функция $f(x) = x$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$ (пример 28).

Для $\alpha \in \mathbb{N}$ по определению положим

$$x^n = x \cdot \ldots \cdot x.$$

Согласно теореме о локальных свойствах непрерывных функций (26), построенная функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Для $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, по определению положим

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Эта функция непрерывна на своей области определения, опять-таки, согласно теореме 26.

При $\alpha = 0$ положим $x^0 = 1$, если $x \neq 0$. Однако, удобным бывает доопределить функцию в нуле по непрерывности и считать $0^0 = 1$.

Замечание 97.
Отметим в замечании несколько свойств построенной функции.

При нечетном $n \in \mathbb{N}$ функция x^n возрастает, причем

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} x^n = -\infty, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} x^n = +\infty.$$

Значит, по теореме 31, область значений функции x^n в рассматриваемом случае – это $\mathbb{R}$.

При четном $n \in \mathbb{N}$ функция x^n возрастает при $x \geq 0$, причем

$$\inf_{x \geq 0} x^n = 0, \quad \sup_{x \geq 0} x^n = +\infty.$$

Значит, по теореме 31, область значений функции x^n в рассматриваемом случае – это $[0, +\infty)$.

Замечание делалось, чтобы определить функцию $x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, как обратную к функции x^n. Итак,

$$x^{1/n} = (x^n)^{-1}.$$

Тем самым,

$$x^{1/n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad n \text{ нечетно},$$

$$x^{1/n} : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad n \text{ четно}.$$

Согласно теореме об обратной функции (33), рассматриваемая функция $x^{1/n}$ непрерывна и возрастает на своей области определения.

Замечание 98.
Вместе с обозначением $x^{1/n}$ для только что введенной функции, мы часто будем использовать и обозначение $\sqrt[n]{x}$. Обозначения будем считать эквивалентными. В частности, обозначения мотивируют и несколько «жаргонное» название введенной функции – корень n-ой степени.

Отметим следующие важные свойства корня.

Лемма 38 (О свойствах корня).
Пусть $x, y \geq 0$ и $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда:

1. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$.
2. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$.
3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.
4. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$, $y \neq 0$.

Доказательство. Все свойства немедленно следуют из определения. Докажем, например, первое из них. Пусть $z = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$, тогда $z^n = \sqrt[m]{x}$ и $z^{nm} = x$, откуда $z = \sqrt[nm]{x}$.

Доказательство остальных свойств предлагается в качестве упражнения. □

Замечание 99.
Понятно, что предыдущая лемма справедлива и при $x, y < 0$ лишь только написанные корни существуют.

Теперь введем рациональную степень. Пусть $p/q \in \mathbb{Q}$ – несократимая дробь. Определим функцию

$$x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$$

для всех таких x, для которых правая часть имеет смысл. Итого, областью определения введенной функции является:

1. При нечетном q – множество $\mathbb{R}$.
2. При $p/q > 0$ – множество $[0, +\infty)$.
3. При $p/q \geq 0$ – множество $(0, +\infty)$.

Легко понять, что по теореме о непрерывности композиции (27), введенная функция непрерывна на области определения. Кроме того, она возрастает на $[0, +\infty)$ при $p/q \geq 0$ и убывает на $(0, +\infty)$ при $p/q < 0$.

Замечание 100.
Число p/q часто называется показателем степени.

Отметим следующие свойства введенной функции, хорошо известные, но не факт, что обоснованные в школе.

Лемма 39 (О свойствах степени с рациональным показателем).
Пусть $x, y \geq 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Тогда:

1. $x^{-r_1} = \dfrac{1}{x^{r_1}}$.
2. $x^{r_1} x^{r_2} = x^{r_1 + r_2}$.
3. $(x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$.
4. $x^{r_1} y^{r_1} = (xy)^{r_1}$.

Доказательство. Доказательство этих свойств происходит сразу из определений.

Например, если $r_1 = p_1/q_1$, то, пользуясь свойствами корней (лемма 38),

$$x^{-r_1} = x^{-p_1/q_1} = \left(x^{-p_1}\right)^{1/q_1} = \sqrt[q_1]{x^{-p_1}} = \sqrt[q_1]{\frac{1}{x^{p_1}}} = \frac{1}{\sqrt[q_1]{x^{p_1}}} = \frac{1}{x^{r_1}}.$$

Если $r_2 = p_2/q_2$, то, аналогично,

$$x^{r_1}x^{r_2} = \sqrt[q_1]{x^{p_1}}\,\sqrt[q_2]{x^{p_2}} = \sqrt[q_1q_2]{x^{p_1q_2}}\,\sqrt[q_1q_2]{x^{p_2q_1}} =$$

$$= \sqrt[q_1q_2]{x^{p_1q_2+p_2q_1}} = x^{\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}} = x^{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}} = x^{r_1+r_2}.$$

Доказательство остальных свойств предлагается в качестве упражнения. □

Замечание 101.
Понятно, что только что доказанная лемма справедлива и при $x, y < 0$ лишь только написанные функции определены.

Для случая иррационального показателя степени построение проведем несколько позже.

3 Показательная функция

Пусть $0^x = 0$ для $x > 0$. Пусть $a > 0$. Цель данного пункта — определить a^x для $x \in \mathbb{R}$. Пока что значение a^x определено лишь при $x \in \mathbb{Q}$.

Начнем со следующих, во многом уже известных, свойств.

Лемма 40 (О свойствах почти показательной функции).
Пусть $r, s \in \mathbb{Q}$, $a, b > 0$. Тогда

1. $a^{r+s} = a^r a^s$.
2. $(a^r)^s = a^{rs}$.
3. $(ab)^r = a^r b^r$.
4. Если $r < s$, то $a^r < a^s$ при $a > 1$ и $a^s < a^r$ при $0 < a < 1$.

Доказательство. Первые 3 свойства уже доказаны в лемме 39. Докажем последнее свойство. Пусть $x, y > 0$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$(x < y) \;\Leftrightarrow\; (x^n < y^n), \quad (x = y) \;\Leftrightarrow\; (x^n = y^n).$$

Значит, если $a > 1$, то и $a^{1/n} > 1$. Действительно, допустив, что $a^{1/n} \le 1$, согласно только что проведенным рассуждениям получим, что $a = (a^{1/n})^n \le 1^n = 1$. Аналогично, если $m \in \mathbb{N}$, то $a^{m/n} > 1$, а тогда, если $r < s$, то

$$a^s = a^{s-r}a^r > a^r.$$

Случай $a \in (0, 1)$ рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения. □

Дадим основное определение.

Определение 51 (Понятие показательной функции).
Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. По определению положим

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

При $a > 0$, $a \neq 1$, полученная функция называется показательной функцией с основанием a.

Замечание 102.
Описанная в определении последовательность рациональных чисел существует. Например, можно рассмотреть последовательность

$$r_n = \frac{[10^n x]}{10^n}.$$

Она, кстати, обладает и еще одним свойством – она возрастающая.

Конечно, введенное определение пока что носит совершенно неправомерный характер. Для того, чтобы обосновать его корректность, необходимо доказать, что написанный предел существует, не зависит от последовательности r_n, и что для рациональных x новое определение совпадает со старым. Начнем осуществлять намеченный план с доказательства следующей леммы.

Лемма 41.
Пусть $a > 0$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1.$$

Доказательство. В лемме 14 было доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, \quad a > 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{1/n}} = 1, \quad a > 0.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$, $a > 1$. Тогда, используя монотонность (лемма 40) и сказанное выше, найдется номер n_0, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как $r_n \in Q$ – сходящаяся к нулю последовательность, но, начиная с некоторого номера n_1,

$$-\frac{1}{n_0} < r_n < \frac{1}{n_0},$$

а значит, снова пользуясь монотонностью, для $n > n_1$

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{r_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Если $a \in (0,1)$, то $1/a > 1$ и, по доказанному,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/a)^{r_n}} = 1.$$

Случай $a = 1$ очевиден, так как $1^{r_n} = 1$. □

Итак, мы доказали корректность определения функции a^x в нуле. Воспользуемся этим для доказательства корректности определения и в других точках $\mathbb{R}$.

Лемма 42.
Пусть $a > 0$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность a^{r_n} сходится.

Доказательство. Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$ и s_n — возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x (существование такой последовательности обосновано в замечании 102). Тогда, согласно лемме 40, последовательность a^{s_n} возрастает и ограничена сверху, например, числом $a^{[x]+1}$, а значит, по теореме Вейерштрасса (11), имеет предел.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = A$ и r_n – последовательность из условия. Тогда, так как $a^{r_n - s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (это следует из леммы 41), получим

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} A.$$

Если $a \in (0,1)$, то $1/a > 1$ и, по доказанному,

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{A}.$$

Случай $a = 1$ очевиден, так как $1^{r_n} = 1$. □

Суммаризируем наши результаты в следующее замечание.

Замечание 103.
Доказанная лемма устанавливает корректность определения функции a^x. Во-первых, так как для любой последовательности рациональных чисел предел существует, то он один и тот же (докажите это, посмотрев, в качестве подсказки, на конец доказательства критерия Коши (23)). Если же $x \in \mathbb{Q}$, то, положив $r_n = x$, получим, что вновь введенное определение совпадает с ранее введенным.

Теперь обсудим свойства введенной функции. По сути, будем вторить лемме 40 и обобщать ее на вещественный аргумент. Начнем, однако, с монотонности.

Лемма 43 (О монотонности a^x).
Если $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, то $a^x < a^y$ при $a > 1$ и $a^y < a^x$ при $0 < a < 1$.

Доказательство. Пусть $a > 1$, $x < y$. Нужно показать, что $a^x < a^y$. Пусть числа $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ таковы, что

$$x < r_1 < r_2 < y.$$

Рассмотрим последовательности $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $r_n^1 < x$, $r_n^2 > y$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$ (докажите, что такие последовательности существуют, используя, например, замечание 102). В силу монотонности функции a^x при рациональном аргументе (лемма 40),

$$a^{r_n^1} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_n^2}.$$

Тогда, по теореме о предельном переходе в неравенствах (11),

$$a^x \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^y,$$

что и доказывает утверждение. Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогичным образом и остается в качестве упражнения. $\square$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 44.
Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

Доказательство. Пусть $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$. Так как (лемма 40)

$$a^{r_n^1 + r_n^2} = a^{r_n^1} a^{r_n^2},$$

то, переходя к пределу в этом равенстве, получаем требуемое. $\square$

Теперь докажем непрерывность функции a^x на области определения.

Теорема 35 (О непрерывности a^x на $\mathbb{R}$).

$$a^x \in C(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Мы знаем, что согласно лемме 41,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$$

Докажем сначала непрерывность в нуле. Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть, кроме того, $a > 1$, а x_n – произвольная последовательность, стремящаяся к нулю. Тогда можно выбрать номер n_0 такой, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то найдется номер n_1, что при $n > n_1$

$$-\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}.$$

В силу возрастания функции a^x (лемма 43),

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{x_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/a)^{x_n}} = 1.$$

Если $a = 1$, то непрерывность очевидна, так как $1^{x_n} = 1$.

Непрерывность в произвольной точке x_0 следует из непрерывности в нуле, так как

$$a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.$$

□

Продолжим изучение свойств функции a^x в следующей лемме.

Лемма 45.
Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Доказательство. Пусть $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$. Согласно лемме 40,

$$(a^{r_n^1})^{r_m^2} = a^{r_n^1 r_m^2}.$$

Пусть m фиксировано, а $n \to \infty$. По определению функции a^x,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n^1} = a^x, \quad \lim_{n\to\infty} a^{r_n^1 r_m^2} = a^{x r_m^2}$$

В силу непрерывности степенной функции с рациональным показателем,

$$\lim_{n\to\infty} (a^{r_n^1})^{r_m^2} = a^{x r_m^2}.$$

Остается устремить $m \to \infty$ и воспользоваться непрерывностью функции a^x. □

Отметим замечание, которое разрешит вопросы корректности вычисления пределов, в которых возникает неопределенность вида 1^∞.

Замечание 104.
Рассуждения, которые приведены в доказательстве предыдущей леммы позволяют обосновать переход, который часто совершается на практике при использовании второго замечательного предела. Переход такой: если $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\alpha_n \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (1+\alpha_n)^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \left((1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\right)^{\alpha_n \beta_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \beta_n}.$$

Заключительное алгебраическое свойство введенной функции отметим в следующей лемме.

Лемма 46.
Пусть $a, b > 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогичным предыдущему образом и остается в качестве упражнения. □

Теперь отметим заключительное свойство показательной функции – отметим ее область значений.

Лемма 47 (О биективности показательной функции).
Показательная функция – биекция между $\mathbb{R}$ и $(0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Функция a^x строго возрастает, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Действительно, эти пределы существуют в силу строгого возрастания функции a^x, а заявленные равенства следуют из того, что ($a = 1+\alpha$, $\alpha > 0$), согласно неравенству Бернулли,

$$a^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

По теореме о сохранении промежутка (31), область значений – это промежуток $\langle 0, +\infty)$. В то же время, значение 0 не принимается, так как, в силу строгого возрастания (лемма 43), если $a^{x_0} = 0$, то при $x < x_0$ должно быть $a^x < 0$, что невозможно.

Случай $a \in (0, 1)$ рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения. □

④ Логарифмическая функция

В этом пункте мы введем понятие и изучим свойства логарифмической функции. Конечно, опираться мы будем на построенную и вдоль и поперек изученную показательную функцию.

Определение 52 (Понятие логарифмической функции).
Функция, обратная к показательной функции $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, называется логарифмом с основанием a и обозначается $\log_a x$.

Сразу отметим следующее замечание.

Замечание 105.
Введенное определение корректно в силу леммы 47. Мы видим, что область определения логарифма – промежуток $(0, +\infty)$, а основание логарифма может принимать значения $a > 0$, $a \neq 1$, в силу определения показательной функции. Логарифм осуществляет биекцию между $(0, +\infty)$ и $\mathbb{R}$.

Следующая теорема освещает основные качественные свойства логарифмической функции.

Теорема 36 (О непрерывности логарифмической функции).
Функция $\log_a x$ непрерывна на области определения, строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $a \in (0, 1)$. Кроме того,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}, \quad \lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из теоремы об обратной функции (33) и свойств показательной функции. □

Конечно, те соотношения, которые давались в школе, теперь можно не просто сформулировать, но и обосновать.

Лемма 48 (Некоторые свойства логарифмов).
Пусть $x, y > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $a^{\log_a x} = x$.
2. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a x^p = p \log_a x$.
4. $\log_{a^p} x = \dfrac{1}{p} \log_a x$, $p \neq 0$.
5. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Доказательство. Все сформулированные свойства доказываются одинаково, используя свойства показательной функции. Например, так как

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy,$$

то $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$. Доказательство остальных свойств остается в качестве упражнения. □

Отметим такое вот внезапное, но концептуальное замечание.

Замечание 106.
Посмотрите, например, на третье соотношение. В нем присутствует выражение x^p, где $x > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Не то ли это в точности, что мы ищем? Не так ли мы будем определять степенную функцию с вещественным показателем степени? На самом деле, именно так, и сделаем мы это уже в следующем пункте.

Чтобы как-то логично завершить данный пункт, дадим следующее определение.

Определение 53.
Логарифм по основанию e часто называют натуральным логарифмом и обозначают $\ln x$. Логарифм по основанию 10 иногда называют десятичным логарифмом и обозначают $\lg x$.

5 Степенная функция: окончание

Перед нами остался незакрытым вопрос определения функции x^α при $\alpha \in \mathbb{I}$. Так как при всех $x > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо представление (оно установлено в предыдущем пункте, лемма 48)

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

то это и логично принять за определение степенной функции с вещественным показателем. Из этого определения сразу следует, что x^α непрерывна при $x > 0$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $\alpha \in \mathbb{I}$, то

$$x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad \alpha > 0,$$

$$x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \quad \alpha < 0.$$

Отметим, что при $\alpha > 0$ непрерывность x^α в нуле сохраняется, ведь

$$\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0+0} e^{\alpha \ln x} = 0.$$

Замечание 107.
Отдельно подчеркнем, что нет какого-то единого соглашения, связанного с определением степенной функции. Некоторые авторы считают, что функция x^α определена только при $x > 0$, чтобы избежать ситуаций вроде

$$1 = ((-1)^2)^{1/4} = (-1)^{2/4} = (-1)^{1/2}.$$

Некоторые оговаривают ситуацию, когда α – целое, отдельно. Некоторые различают символы $x^{1/n}$ и $\sqrt[n]{x}$, считая, что первый определен при $x > 0$, а второй – при всех. Мы тоже «возились» с определением в начале нашего рассказа, но избрали другой подход – определять степень на максимально возможном множестве, и не делать лишних различий.

(6) Тригонометрические функции

Здесь, ранее и далее мы пользовались и будем пользоваться «школьным» определением косинуса и синуса как абсциссы и ординаты точки на единичной окружности, а также всеми выведенными тригонометрическими формулами. Полнота такого определения зависит от строгости введения понятия соответствия между точками числовой прямой и точками единичной окружности (углы, повороты, и проч.). Не пытаясь закрыть этот пробел сейчас, отметим, что формальное определение дать, конечно, возможно, и один из вариантов сделать это в вещественном случае – привлечь теорию интегралов или теорию рядов.

Приведем основные результаты.

Теорема 37 (О непрерывности синуса и косинуса).
Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем непрерывность синуса. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0| < \varepsilon$$

как только $\delta = \varepsilon$. Предпоследний переход справедлив в силу следствия 14.

Непрерывность косинуса можно доказать аналогичным образом, а можно воспользоваться представлением

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

и теоремой о непрерывности композиции (27). □

Из доказанной теоремы немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие 15.
Функции

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

непрерывны на своей области определения.

Доказательство. Доказательство сразу следует из теоремы о локальных свойствах непрерывных функций (26). □

7 Обратные тригонометрические функции

Несмотря на то, что обратные тригонометрические функции обычно изучаются в школе, студенты часто путают области определений, области значений, характер поведения этих функций. Поэтому в этом разделе мы не просто проговорим про непрерывность этих функций, но и дадим этим функциям определение.

Функция $\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не является обратимой, так как каждое свое значение она принимает более одного раза (даже бесконечное число раз). Однако, функция $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, возрастает, а поэтому обратима.

Определение 54 (Понятие арксинуса).
Пусть $\sin x : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Обратная к данной функции функция называется арксинусом и обозначается $\arcsin x$, то есть

$$\arcsin x = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin \alpha = x, \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 38 (О непрерывности акрсинуса).
Функция $\arcsin x$ возрастает и непрерывна на своей области определения.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из непрерывности синуса и теоремы 33. □

Функция $\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не является обратимой, однако функция $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, убывает, а поэтому обратима.

Определение 55 (Понятие арккосинуса).
Пусть $\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Обратная к данной функции функция называется арккосинусом и обозначается $\arccos x$, то есть

$$\arccos x = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos \alpha = x, \\ \alpha \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 39 (О непрерывности арккосинуса).

Функция $\arccos x$ убывает и непрерывна на своей области определения.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из непрерывности косинуса и теоремы 33. □

Функция $\operatorname{tg} x$ не является обратимой, однако функция $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, возрастает, а поэтому обратима.

Определение 56 (Понятие арктангенса).
Пусть $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. Обратная к данной функции функция называется арктангенсом и обозначается $\operatorname{arctg} x$, то есть

$$\operatorname{arctg} x = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = x, \\ \alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 40 (О непрерывности арктангенса).
Функция $\operatorname{arctg} x$ возрастает и непрерывна на своей области определения.

Функция $\operatorname{ctg} x$ не является обратимой, однако функция $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, убывает, а поэтому обратима.

Определение 57 (Понятие арккоттангенса).
Пусть $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$. Обратная к данной функции функция называется арккоттангенсом и обозначается $\operatorname{arcctg} x$, то есть

$$\operatorname{arcctg} x = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = x, \\ \alpha \in (0, \pi) \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 41 (О непрерывности арккотангенса).
Функция $\operatorname{arcctg} x$ убывает и непрерывна на своей области определения.

8 Непрерывность элементарных функций

Теперь дадим понятие элементарной функции.

Определение 58.
Функция, получающаяся в результате конечного числа применений операций сложения, умножения, деления и композиции к простейшим функциям, называется элементарной.

Важнейшим следствием всего того, что проделано в этом пункте, является следующая теорема.

Теорема 42 (О непрерывности элементарных функций).
Элементарные функции непрерывны на своей области определения.

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием теоремы о локальных свойствах непрерывных функций 26, теоремы о непрерывности композиции 27, а также свойств построенных в этом пункте простейших функций. □

§ 17. Второй замечательный предел

Обобщим введенный ранее второй замечательный предел с последовательности на функции.

Теорема 43 (Второй замечательный предел).

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Функция

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

определена при $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,0]$. Пусть $x_n \in \mathbb{R}\setminus[-1,0]$, $|x_n| \to +\infty$. Достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

1. Пусть, сначала, $x_n \in \mathbb{N}$ и пусть $\varepsilon > 0$. Используя определение числа e, имеем:

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \ |f(k) - e| < \varepsilon.$$

Так как $x_n \in \mathbb{N}$, то $x_n \to +\infty$ и

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ x_n > k_0,$$

а значит для тех же n

$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

2. Пусть теперь $x_n \to +\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера, $x_n > 1$. Не нарушая общности можно считать, что x_n всегда больше 1. Очевидна цепочка неравенств

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1},$$

которая переписывается в виде

$$\frac{f([x_n]+1)}{1+\dfrac{1}{[x_n]+1}} \le f(x_n) \le f([x_n])\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right).$$

Так как $[x_n]+1$ и $[x_n]$ – последовательности натуральных чисел, стремящиеся к $+\infty$, то, по доказанному в предыдущем пункте, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f([x_n]+1) = e, \quad \lim_{n\to\infty} f([x_n]) = e,$$

а значит, по теореме о сжатой переменной (10), $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

3. Пусть $x_n \to -\infty$. Можно считать, что $x_n < -2$. Если положить $y_n = -x_n$, то $y_n \to +\infty$. Так как

$$f(x_n) = \left(1+\frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right) f(y_n-1)$$

и, по доказанному в предыдущем пункте, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n - 1) = e$, приходим к требуемому.

4. Наконец, пусть $|x_n| \to +\infty$, $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Если число отрицательных (положительных) членов последовательности x_n конечно, то $x_n \to +\infty$ $(x_n \to -\infty)$. Если же количество положительных и отрицательных членов последовательности бесконечно, то натуральный ряд разбивается на две подпоследовательности n_k и n_p так, что $x_{n_k} \geq 0$, $x_{n_p} < 0$. По доказанному,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = e.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad |f(x_{n_k}) - e| < \varepsilon,$$

$$\exists p_0 : \forall p > p_0 \quad |f(x_{n_p}) - e| < \varepsilon.$$

Положим $n_0 = \max(n_{k_0}, n_{p_0})$. Тогда при $n > n_0$ либо $n = n_k$ при $k > k_0$, либо $n = n_p$ при $p > p_0$, а тогда

$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$. $\square$

По своей сути, доказанная теорема – это наш давний долг из замечания 56 – далеко идущее обобщение 2 замечательного предела в классическом (для последовательностей) понимании.

§ 18. Следствия из замечательных пределов

В этом пункте мы обсудим важные следствия из первого и второго замечательных пределов. Приведем эти следствия как список лемм и начнем со следствий из первого замечательного предела.

Лемма 49.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,$$

где в последнем равенстве используется первый замечательный предел и непрерывность функции $\cos x$. □

Лемма 50.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Доказательство. Пусть $y=\operatorname{arctg} x$. Так как $x\to 0$ и функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна, то $y\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}}=1$$

по только что доказанному. □

Отметим следующее замечание, касающееся проведенной замены.

Замечание 108.
Замена, проведенная в доказательстве выше, требует обоснования. Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $x_n\neq 0$. Нужно вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}.$$

Обозначим $y_n=\operatorname{arctg} x_n$. В силу непрерывности функции $\operatorname{arctg} x$, последовательность y_n стремится к 0. Кроме того, так как $x_n\neq 0$, то и $y_n\neq 0$. Тогда

$$\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}=\frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}.$$

Последний предел, как показано выше, равен 1, а значит для любой последовательности y_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, $y_n\neq 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}=1.$$

Тем самым, выполнено определение по Гейне и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Аналогичный результат получим, если заменить $\operatorname{arctg} x$ на $\arcsin x$.

Лемма 51.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пусть $y = \sin x$. Так как $x \to 0$ и функция $\sin x$ непрерывна, то и $y \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$

Обоснование замены проводится аналогичным замечанию 108 образом. □

Еще одну популярную неопределенность показывает следующий предел.

Лемма 52.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Домножив числитель и знаменатель на $(1+\cos x)$ и воспользовавшись первым замечательным пределом и непрерывностью функций x^2 и $\cos x$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

□

Теперь обсудим следствия из второго замечательного предела.

Лемма 53.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Доказательство. Пусть $y = \dfrac{1}{x}$, тогда $|y| \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{|y|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 108. □

Лемма 54.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Доказательство. В силу соотношения, позволяющего заменить основание логарифма (лемма 48), достаточно доказать второе равенство. Так как логарифм непрерывен на своей области определения, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

□

Лемма 55.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx}=1,\quad s\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $y=(1+x)^s-1$. В силу непрерывности степенной функции, если $x\to 0$, то и $y\to 0$. Кроме того, $\ln(1+y)=s\ln(1+x)$, а значит

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{s\ln(1+y)}\frac{s\ln(1+x)}{x}\right)=1.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 108. □

Лемма 56.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Доказательство. Пусть $y=a^x-1$, откуда $x=\log_a(1+y)$ и при $x\to 0$ выполняется и $y\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\log_a(1+y)}{y}}=\ln a.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 108. □

Конечно, хочется примеров применения написанных лемм. Но для эффективного использования доказанных фактов нам потребуется понятие эквивалентности. К этому понятию, как и к понятиям локального сравнения функций, мы и переходим.

§ 19. Асимптотическое сравнение функций

Цель данного пункта – научиться сравнивать функции локально, в окрестности некоторой точки. Конечно, это хочется делать с использованием изученных понятий, например, понятия предела.

Замечание 109.
Наверное, имеет смысл обсудить, что в общем и целом, глобально (хоть и локально :)) может получаться, если мы зададимся целью сравнить поведение двух функций.

Первое, что напрашивается, наверное, – это желание сказать, что функции «очень похожи». Что это значит? Видимо, что предел их отношения равен 1. Конечно, к такому смелому выводу нужно подходить с должной аккуратностью, поглядев, например, на функции

$$f(x) = x + \sin x, \quad g(x) = x, \quad x \to +\infty.$$

Далее, что тоже может оказаться интересным – это сказать, что функции имеют один порядок или отличаются в $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ раз. По сути, это можно интерпретировать так: предел отношения этих двух функций равен числу, отличному от нуля.

Ну и, конечно, а что же мы можем сказать в случае, когда предел отношения равен 0? Видимо, что функция в числителе зануляет (имеет больший порядок малости) функцию в знаменателе.

Вроде бы все так замечательно, но. Функция 0 – она же очень похожа на 0? Вроде бы да. Но отношение нуля к нулю мы, к сожалению, составить не можем. Именно поэтому вводимые определения будут несколько отличаться от того, что мы только что проговорили.

Итак, введем следующее определение.

Определение 59.
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная для E, и существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$ при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$.

1. Если $\alpha(x)$ ограничена на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «O большое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут
$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «o малое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут
$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

Конечно, такое запутанное определение нельзя оставить без подробных пояснений.

Замечание 110.
Первое определение говорит несколько больше, чем фразу «отличаться в α раз». Действительно, оно говорит, что на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$

$$|\alpha(x)| \leq C \Rightarrow -Cg(x) \leq f(x) \leq Cg(x),$$

то есть f лежит в «полосе», образованной функциями $\pm Cg(x)$. Внутри этой «полосы» f может вести себя по-разному, и может не быть в точности α-копией g.

Второе определение говорит, что f «убывает» быстрее, чем g, или что f «растет» медленнее, чем g. К этому «или» надо относиться скептически, ведь, например,

$$\frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to 0,$$

и модули обеих функций идут к $+\infty$.

Третье же определение позволяет, и правда, сравнить даже 0 с 0, сказав, например, что они друг другу эквивалентны.

Теперь мы готовы привести аккуратное соображение, касающееся того, как определить то или иное «отношение» между функциями, используя аппарат пределов. Иными словами, ровно тем способом, с которого мы начали обсуждение данного пункта.

Лемма 57.
В обозначениях предыдущего определения, если на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ выполняется $g(x) \neq 0$, то:

1. $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$ равносильно тому, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C, \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E.$$

   В частности, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R},$$

   то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$.

2. $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ равносильно тому, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ равносильно тому, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Доказательство. 1. Докажем первое утверждение. Пусть $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$. Тогда

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E,$$

причем $|\alpha(x)| \le C$ при тех же x. Отсюда, в силу возможности «разделить»,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |\alpha(x)| \le C, \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E.$$

Обратное утверждение сразу следует из условия, если обозначить

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Остальные утверждения, как и часть первого утверждения, остаются в качестве упражнения. □

Приведем какой-нибудь пример. Мы помним (лемма 24), что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1.$$

В новых обозначениях это может быть записано так: $n = o(a^n)$, $n \to \infty$, $a > 1$. А что можно сказать, если натуральные аргументы заменить вещественными?

Пример 33.
Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = 0, \quad a > 1.$$

Действительно, считая, что $x > 0$, справедливы неравенства

$$0 < \frac{x}{a^x} \le \frac{[x]+1}{a^{[x]+1}} \cdot a.$$

Как мы уже вспомнили (лемма 24),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1.$$

Значит, если $\varepsilon > 0$, то найдется номер n_0, что при $n > n_0$ выполняется

$$0 < \frac{n}{a^n} < \varepsilon.$$

Так как $x \to +\infty$, то найдется δ, что

$$x > \frac{1}{\delta} \;\Rightarrow\; [x] > n_0,$$

а значит

$$0 < \frac{[x]+1}{a^{[x]+1}} \cdot a < a\varepsilon,$$

что и доказывает требуемое.

Конечно, справедливо следующее замечание.

Замечание 111.
Используя предыдущий пример, не сложно показать, что $x^s = o(a^x)$ при $x \to +\infty$, $a > 1$, $s \in \mathbb{R}$.

Приведем и еще один пример, закрыв наш давний долг (лемма 26).

Пример 34.
Доказать, что $\log_a^\alpha x = o(x^s)$ при $x \to +\infty$, $s > 0$.

Пусть $a > 1$, тогда достаточно вычислить

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a^\alpha x}{x^s}.$$

Пусть $t = \log_a x$. Ясно, что $t \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a^\alpha x}{x^s} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{a^{ts}} = 0$$

по только что доказанному. Замена обосновывается так же, как и в замечании (108). Случай $0 < a < 1$ остается в качестве упражнения.

Приведем еще несколько часто встречающихся определений, касающихся классификации бесконечно малых и бесконечно больших. В такой классификации ранее приведенная терминология: «растет быстрее» или «убывает к нулю быстрее» уже становится оправданной.

Определение 60.
Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ и функция $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция $g(x)$ при $x \to x_0$.

Определение 61.
Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ и функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция $g(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка, чем функция $f(x)$ при $x \to x_0$.

Теперь обсудим правила обращения с введенными символами o и O. Отметим, что сами по себе они обозначают классы функций, а не конкретные функции, поэтому толкование равенств должно быть максимально осторожным, а точнее – вдумчивым.

Замечание 112.
Мы привыкли трактовать равенства так: если справедливо, что «a равно b», то справедливо и что «b равно a». В то же время, с введенными символами такой аналогии не получается. То, что $\sin x = O(x)$, $x \in \mathbb{R}$, вовсе не означает, что $O(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, ведь не всякая функция из $O(x)$ – это $\sin x$.

Аналогично, так как $x = O(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = O(x)$, $x \in \mathbb{R}$, весьма нелепо заключать, что $x = \sin x$. Отсюда, скажем, следует, что равенства

$$o(x) - o(x) = 0, \quad O(x) - O(x) = 0, \quad x \to x_0,$$

в общем случае просто-напросто неверны. Верными будут, например, такие равенства:

$$o(x) - o(x) = o(x), \quad O(x) - O(x) = O(x), \quad x \to x_0.$$

Описанные «парадоксы» на самом деле связаны лишь только с принятыми обозначениями. Эти обозначения оправданы тем, что они оказываются удобными при написании асимптотических равенств (перенос O- и o-членов через знак равно, и прочее). В то же время, такие договоренности могут (на первый взгляд) сбивать с толку.

Приведем некоторые правила обращения с символами O и o.

Лемма 58.
При $x \to x_0$ справедливы равенства:

1. $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.
2. $O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.
3. $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.
4. $o(f(x))$ является и $O(f(x))$, но не наоборот.
5. $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$ и $g(x)O(f(x)) = O(f(x)g(x))$.

Доказательство. 1. Докажем первое равенство (точнее – включение). Слева стоит функция вида

$$\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x),$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые при $x \to x_0$. В силу равенства

$$\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))f(x)$$

и того, что $\alpha_1 + \alpha_2$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, приходим к требуемому.

2–5. Данные пункты доказываются аналогичным образом. В пункте 4 имеет смысл воспользоваться тем фактом, что функция, имеющая конечный предел в точке x_0, ограничена в некоторой окрестности этой точки (теорема 18) □

Вернемся к понятию эквивалентности функций. В связи с пунктом про следствия замечательных пределов, оформим следующую таблицу.

Замечание 113.
При $x \to 0$ справедливы следующие соотношения:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^s - 1 \sim sx.$$

На самом деле на практике часто используется следующее обобщение приведенной таблицы.

Теорема 44.
Пусть $\beta : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$. Тогда при $x \to x_0$ справедливы следующие

соотношения:

$$\sin\beta(x) \sim \operatorname{tg}\beta(x) \sim \arcsin\beta(x) \sim \operatorname{arctg}\beta(x) \sim \beta(x),$$

$$1-\cos\beta(x) \sim \frac{\beta^2(x)}{2}, \quad \log_a(1+\beta(x)) \sim \frac{\beta(x)}{\ln a},$$

$$a^{\beta(x)}-1 \sim \beta(x)\ln a, \quad (1+\beta(x))^s-1 \sim s\beta(x).$$

Доказательство. Докажем, например, что

$$\sin\beta(x) \sim \beta(x), \quad x \to x_0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x = \alpha(x)x$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}(0)$, причем $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 1$. Доопределим функцию $\alpha(x)$ по непрерывности в нуле значением 1. Тогда

$$\sin x = \alpha(x)x, \quad x \in U(0).$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$, то

$$\exists\delta>0 : \forall x \in E : 0 < |x-x_0| < \delta \quad \beta(x) \in U(0).$$

Тогда можно записать равенство

$$\sin\beta(x) = \alpha(\beta(x))\beta(x),$$

справедливое в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Осталось проверить, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(\beta(x)) = 1$. Это немедленно следует из упражнения в замечании 90.

Остальные равенства доказываются аналогично. □

Конечно, было бы странно, если бы мы не могли «заменять» одну эквивалентную функцию на другую, например, при вычислении предела. «Заменять» мы можем, конечно, далеко не всегда, и лишь вот в в каком смысле.

Теорема 45 (О замене на эквивалентную).
Пусть $f, g, \tilde f : E \to \mathbb{R}$, $f \sim \tilde f$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} fg = \lim_{x\to x_0}\tilde f g.$$

Доказательство. Так как при $x \in \overset{o}{U}(x_0)\cap E$ выполняется $f(x) = \alpha(x)\tilde f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 1$, то

$$\lim_{x\to x_0} fg = \lim_{x\to x_0}\alpha\tilde f g = \lim_{x\to x_0}\alpha \lim_{x\to x_0}\tilde f g = \lim_{x\to x_0}\tilde f g.$$

□

Приведем примеры использования этой теоремы.

Пример 35.

Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{\sqrt{1-x^2}-1}.$$
Логарифм может быть переписан в виде
$$\ln\cos(3x)=\ln(1+\cos(3x)-1).$$
Так как $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(3x)-1)=0$, то (при $x\to 0$)
$$\ln\cos(3x)\sim\cos(3x)-1.$$
Так как $\lim\limits_{x\to 0}3x=0$, то (при $x\to 0$)
$$\cos(3x)-1\sim-\frac{9x^2}{2}.$$
Кроме того, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, то (при $x\to 0$)
$$(1-x^2)^{1/2}-1\sim-\frac{x^2}{2}.$$
Согласно теореме о замене на эквивалентную,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{-\dfrac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{9x^2}{2}}{-\dfrac{x^2}{2}}=9.$$

Покажем, что замена на эквиалентную в сумме может привести к неверному результату.

Пример 36.
Пусть требуется вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$
Так как при $x\to 0$ выполняются соотношения
$$\ln(1+3x+x^2)\sim(3x+x^2),\quad \ln(1-3x+x^2)\sim(-3x+x^2),$$
то ошибочная выкладка дает
$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^2+(-3x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$
Проведем вычисление исходного предела иначе, выполнив следующие преобразования
$$\ln\big((1+3x+x^2)(1-3x+x^2)\big)=\ln(1-7x^2+x^4)\sim(-7x^2+x^4),\quad x\to 0.$$

Тогда
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x^2+x^4}{x^2}=-7.$$
Причину ошибки мы раскроем ниже.

Отметим следующую важную, сразу следующую из определений, теорему.

Теорема 46 (Необходимое и достаточное условие замены на эквивалентную).
Функции f, g эквивалентны при $x\to x_0$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство
$$f(x)=g(x)+o(g(x)),\quad x\to x_0.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $f\sim g$ при $x\to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо равенство
$$f(x)=\alpha(x)g(x),$$
где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=1$. Тогда
$$f(x)-g(x)=g(x)(\alpha(x)-1),$$
откуда, так как $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x)-1)=0$, приходим к тому, что $f(x)-g(x)=o(g(x))$ при $x\to x_0$.

Докажем достаточность. Пусть $f(x)=g(x)+o(g(x))$ при $x\to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется
$$f(x)-g(x)=\beta(x)g(x),$$
где $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Отсюда $f(x)=g(x)(1+\beta(x))$ или $f(x)=g(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x)=1+\beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=1$. А следовательно, $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$. □

Используя доказанную теорему, таблицу эквивалентностей можно переписать следующим образом.

Замечание 114.
Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Тогда (при $x\to x_0$)
$$\sin\beta(x)=\beta(x)+o(\beta(x)),\quad \operatorname{tg}\beta(x)=\beta(x)+o(\beta(x)),$$
$$\arcsin\beta(x)=\beta(x)+o(\beta(x),\quad \operatorname{arctg}\beta(x)=\beta(x)+o(\beta(x)),$$
$$1-\cos\beta(x)=\frac{\beta(x)^2}{2}+o(\beta^2(x)),\quad \log_a(1+\beta(x))=\frac{\beta(x)}{\ln a}+o(\beta(x)),$$
$$a^{\beta(x)}-1=\beta(x)\ln a+o(\beta(x)),\quad (1+\beta(x))^s-1=s\beta(x)+o(\beta(x))$$

Приведем пример использования разработанной техники, например, для вычисления пределов.

Пример 37.

Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}+e^{5x}\operatorname{tg}3x-1}{\ln(1+3x)}.$$
Используя выведенные соотношения,
$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2}+o((2x)^2)=1-2x^2+o(x^2),$$
откуда
$$\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{1-2x^2+o(x^2)}=\big(1+(-2x^2+o(x^2))\big)^{1/2}=$$
$$=1+\frac{1}{2}(-2x^2+o(x^2))+o(-2x^2+o(x^2))=1-x^2+o(x^2).$$
Кроме того,
$$\operatorname{tg}3x=3x+o(x),$$
$$e^{5x}=1+5x+o(x).$$
Тогда
$$\sqrt{\cos 2x}+e^{5x}\operatorname{tg}3x-1=1-x^2+o(x^2)+(3x+o(x))(1+5x+o(x))-1=$$
$$=3x+o(x).$$
Так как
$$\ln(1+3x)\sim 3x,$$
то
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}+\operatorname{tg}3x\cdot e^{5x}-1}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{3x}=1.$$
Разберем теперь ранее рассмотренный пример.

Пример 38.
Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$
Мы знаем, что (при $x\to 0$)
$$\ln(1+3x+x^2)=(3x+x^2)+o(3x+x^2)=3x+x^2+o(x)=3x+o(x).$$
Аналогично (при $x\to 0$),
$$\ln(1-3x+x^2)=-3x+o(x).$$
Итого,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2},$$
где последний предел неизвестно чему равен. В итоге, точность при расписывании числителя у нас лишь порядка $o(x)$, и оставление каких-то комбинаций x^2 – это не ошибка, но бессмыслица. Подробнее об этом мы будем говорить в разделе, связанным с формулой Тейлора.

§ 20. Равномерная непрерывность функции

Наряду с понятием непрерывности функции, в теории часто оказывается полезным понятие равномерной непрерывности функции. Сразу же перейдем к определению.

Определение 62 (Понятие равномерной непрерывности).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x, x' \in D : \; |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Конечно, данное определение нуждается в пояснении.

Замечание 115.
Чем же так разительно отличается понятие равномерной непрерывности от понятия непрерывности? Приведем их одно над другим, считая, что $f : E \to \mathbb{R}$, $D \subset E$.

Непрерывность f на D означает следующее:

$$\forall x' \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in D : \; |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность f на D означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x, x' \in D : \; |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Отличие, причем очень существенное, возникает в том, как выбирается δ. При рассмотрении понятия непрерывности δ, на самом деле, зависит не только от ε, но и от рассматриваемой точки x'. В случае же равномерной непрерывности δ оказывается единой сразу «для всех» точек из D.

Это же наблюдение говорит и об отличии в геометрическом смысле. Если непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на этом промежутке может быть нарисован, не отрывая ручки от бумаги, то равномерная непрерывность говорит еще и о том, что функция не может меняться «быстро».

Рассмотрим пример.

Пример 39.
Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, очевидно, непрерывна на $(0, 1)$. В то же время, равномерно непрерывной на этом множестве она не является. Почему? Потому что чем ближе мы подходим к точке ноль (справа), тем быстрее изменяется значение функции, и маленькие «шаги» утихомирить это изменение не помогают.

Действительно, если положить

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x'_n = \frac{1}{2n},$$

то $x_n, x'_n \in (0,1)$, $(x_n - x'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Итак, как мы видим, несмотря на уменьшающуюся длину шага, по мере приближения к точке $x = 0$ рост функции не только не стабилизируется, но и даже ускоряется.

Конечно, равномерно непрерывная на множестве функция обязательно оказывается и непрерывной на этом множестве, что моментально следует из определения. Зафиксируем это в следующей лемме.

Лемма 59.
Если f равномерно непрерывна на D, то f непрерывна на D.

Конечно, хочется понять, нет ли какого-то удобного достаточного условия равномерной непрерывности функции.

Замечание 116.
Попробуем разобраться в приведенном примере более детально. Казалось бы, равномерной непрерывности мешает неограниченность рассматриваемой функции. Однако, функция $y = x$, являющаяся равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, тоже оказывается неограниченной.

Значит, дело не только и не столько в функции, сколько еще и в множестве, на котором эта функция рассматривается. Из-за того, что мы можем подходить сколь угодно близко к «плохой» точке из $\mathbb{R}$, мы можем провоцировать сколь угодно сильное изменение неограниченной рядом с этой точкой функции.

Исправить сложившуюся ситуацию снова поможет ограничение на множество – будем рассматривать отрезок.

Теорема 47 (Кантора).
Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть f непрерывна, но не равномерно непрерывна на $[a,b]$. Значит,

$$\exists \varepsilon_0 : \ \forall \delta \ \exists x, x' \in [a,b] : \ |x - x'| < \delta, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, тогда

$$\exists x_n, x'_n \in [a,b] : \ |x_n - x'_n| < \delta_n, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Так как $x_n \in [a,b]$, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (15), из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0,$$

где $x_0 \in [a,b]$ согласно лемме 35. Но тогда

$$(|x_n - x'_n| < \delta_n) \wedge (\delta_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0) \ \Rightarrow \ (x'_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}),$$

что оказывается несовместимым с неравенством $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Глава 4
Производная и исследование функции

Я получил образование в
библиотеке. Совершенно бесплатно.

Рэй Брэдбери

Дифференциальное исчисление было создано Г. Лейбницом и И. Ньютоном в XVII веке. Основная идея дифференциального исчисления может быть сформулирована так: всякая «хорошая» функция «в малом» линейна (на самом деле – афинна). Линейные функции устроены достаточно просто, поэтому, зная свойства линейных функций, близких к данной, можно делать выводы и о свойствах самой функции.

Кульминацией данной главы будет формула Тейлора, позволяющая сказать, что любая (достаточно) хорошая функция – это практически многочлен.

§ 1. Производная и дифференциал

Изложение начнем с понятия производной.

Определение 63 (Понятие производной функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Приведем пример.

Пример 40.
Вычислить производную функции $f(x) = 5^{1-3x}$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\left(5^{1-3x}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{5^{1-3(x_0+h)} - 5^{1-3x_0}}{h} =$$

$$= 5^{1-3x_0} \lim_{h\to 0} \frac{5^{-3h} - 1}{h} = 5^{1-3x_0}(-3\ln 5).$$

Отметим логичным образом возникающее замечание.

Замечание 117.
Приведенный пример показывает, что функция f может иметь производную не только в одной точке x_0, но и на некотором, вообще говоря большем множестве.

Теперь рассмотрим пример, в котором производная может принимать бесконечные значения.

Замечание 118.
Вычислить производную функции $f(x) = x^{1/3}$ в точке $x_0 = 0$.

$$\left(x^{1/3}\right)'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

Неверно, однако, полагать, что если функция определена в некоторой точке, то в этой точке у функции существует производная.

Пример 41.
Пусть $f(x) = |x|$ и $x_0 = 0$. Пусть $h > 0$, тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Пусть $h < 0$, тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

Значит, рассматриваемая функция не имеет производной в точке $x_0 = 0$. Впрочем, последнее очевидно и геометрически.

Теперь введем тесно связанное с понятием производной понятие дифференцируемости функции.

Определение 64 (Понятие дифференцируемости функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0{+}h \in \langle a, b\rangle$. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число A, что

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

Итак, дифференцируемость функции в точке x_0 – это, в каком-то смысле, возможность приблизить рассматриваемую функцию линейной функцией вблизи x_0.

Замечание 119.
Величины

$$\Delta f(x, h) = f(x + h) - f(x), \quad \Delta x(h) = (x + h) - x = h,$$

часто называют приращением функции и приращением аргумента, соответственно. Их иногда (правда, не вполне законно), обозначают как $\Delta f(x)$ и Δx.

В новой терминологии получается, что функция дифференцируема в точке, если ее приращение в этой точке как функция приращения аргумента h является линейной с точностью до поправки, бесконечно малой при $h \to 0$ в сравнении с приращением аргумента.

Определение 65 (Понятие дифференциала).
Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Отметим и следующее замечание.

Замечание 120.
Как следует из определения, для функции $f(x) = x$ выполняется

$$x_0 + h - x_0 = 1 \cdot h$$

тем самым $dx(h) = h$. Именно поэтому иногда говорят, что дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением.

Учитывая сказанное, выражение для дифференциала можно переписать так:

$$df(x_0)(h) = Adx(h),$$

или, более компактно, но не вполне законно, так:

$$df(x_0) = Adx.$$

Аналогично тому, как было сделано с производной, дифференцируемость можно рассматривать не в точке, а на множестве. В виду важности последнего понятия, выделим его в отдельное определение.

Определение 66 (Понятие дифференцируемости на множестве).
Говорят, что функция f дифференцируема на множестве E, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Давайте отметим, где же «скрыта» точка x_0 (или x) в определении дифференциала.

Замечание 121.
Если функция f дифференцируема на множестве E, то на этом множестве возникает функция
$$df(x)(h) = A(x)h = A(x)dx(h),$$
или, опять-таки,
$$df(x) = A(x)dx,$$
и изменение точки x, вообще говоря, меняет A. В итоге, A становится функцией от x.

А можно ли получить информацию об этой функции $A(x)$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 48 (О связи производной и дифференцируемости).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, значит
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0.$$
Поделив на h, получим
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + o(1).$$
Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем, что предел правой части равен A, значит
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A,$$
то есть, согласно определению и введенным обозначениям,
$$f'(x_0) = A = A(x_0).$$
Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой (25), имеем
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle,$$
откуда
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h),$$
то есть функция дифференцируема в точке x_0 и
$$A = A(x_0) = f'(x_0).$$

□

Естественно задаться вопросом: как связаны понятия дифференцируемости и непрерывности. Ответ дается следующей леммой.

Лемма 60 (О непрерывности дифференцируемой функции).
Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. В представлении

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0,$$

достаточно перейти к пределу при $h \to 0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0,$$

откуда

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции в точке x_0 (лемма 33). □

Здесь же отметим важное замечание.

Замечание 122.
Обратное утверждение к только что данному, конечно, неверно. Мы уже это видели, рассматривая пример 41.

Сформулируем и еще одно замечание.

Замечание 123.
Конечно, из существования бесконечной производной непрерывность, вообще говоря, не вытекает. Рассмотрим уже знакомую нам (разрывную в нуле) функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$. Несложно понять, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign} h}{h} = +\infty,$$

откуда и следует утверждение.

Раз производная определяется через предел, то оказывается разумным (и полезным с точки зрения геометрии) рассмотреть понятия односторонних производных – односторонних пределов специального вида.

Определение 67.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Предел

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется правосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$.

Аналогично, предел

$$\lim_{h \to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется левосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$.

Пример вычисления односторонних производных нами, на самом деле, уже показан в примере 41. Более детально к применению односторонних производных мы обратимся при изучении типов экстремумов. Сейчас же завершим изложение данного пункта следующими замечаниямми. Начнем с идейного.

Замечание 124.
Понятно, что критерий существования производной можно сформулировать аналогичным тому, как было сделано в случае пределов, образом – через односторонние производные (теорема 24). Формулировку теоремы и соответствующих ей ограничений мы оставляем читателю.

Теперь зафиксируем и следующее техническое замечание.

Замечание 125.
В дальнейшем мы часто, но не совсем корректно, приращение h в определении производной и (или) дифференцируемости будем обозначать через Δx. Это приблизит используемые нами обозначения к принятым во многих источниках (опять-таки, не совсем корректным) обозначениям.

§ 2. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная.

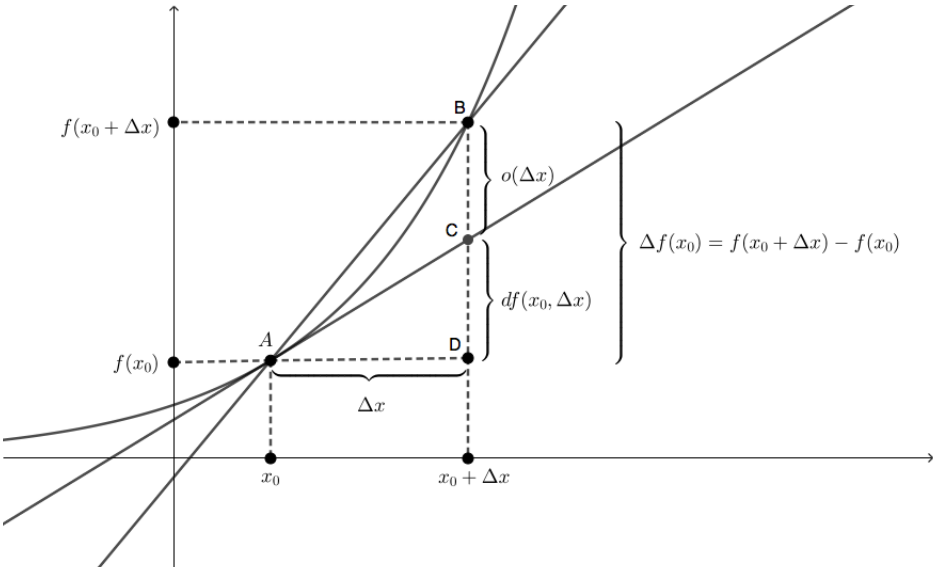

Рис. 4. Касательная и дифференциал

В предыдущем пункте мы полностью сосредоточились на «алгебраическом» и «анализном» смыслах вводимых понятий, ни разу не обратившись к геометрическому смыслу того, что происходит. Роль последнего же трудно переоценить. Оказывается, понятие дифференцируемости тесно связано с понятием касательной.

> **Замечание 126.**
> Из школьного курса геометрии часто известно следующее понятие касательной (обычно – к окружности): прямая называется касательной (к окружности), если она имеет (с окружностью) единственную общую точку. Такое определение годится (очень условно!), если рассматривается что-то «выпуклое, замкнутое и однопетельное», но не годится в общем случае. Так, прямые $y = 0$ и $x = 0$ имеют ровно одну общую точку – точку $(0, 0)$ – с графиком функции $y = x^2$ (последний, кстати, выпуклый), но в качестве касательной разумно рассматривать лишь прямую $y = 0$.

Посмотрим на рисунок 4. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Проведем секущую AB через точки

$$A = (x_0, f(x_0)), \quad B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)),$$

лежащие на графике функции. На рисунке $\Delta x \geq 0$, но, конечно же, это не обязательно так. Устремляя Δx к нулю, точка B будет двигаться (по графику функции) к точке A, а секущая AB будет стремиться занять предельное положение AC. Угловой коэффициент секущей AB равен

$$k_{AB} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}(BAD).$$

В силу дифференцируемости функции f в точке x_0,

$$k_{AC} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{AB} = f'(x_0) = \operatorname{tg}(CAD).$$

Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 68.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Предельное положение AC секущей AB графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Теперь сформулируем лемму об уравнении касательной.

Лемма 61 (Об уравнении касательной).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. Угловой коэффициент, согласно сказанному выше, равен $k_{AC} = f'(x_0)$. Осталось воспользоваться уравнением прямой с заданным коэффициентом наклона и проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$. □

Отметим несколько важных замечаний.

Замечание 127.
Рисунок 4 показывает связь приращения функции, производной этой функции, дифференциала и $o(\Delta x)$. Можно сформулировать следующий геометрический смысл дифференциала: дифференциал есть приращение касательной к графику функции, отвечающее приращению аргумента Δx.

Отдельно введем понятие вертикальной касательной – касательной в случае, когда $f'(x_0) = \pm\infty$. Чтобы не упереться в казуистические случаи вроде того, что показан в замечании 123, придется дополнительно потребовать непрерывность рассматриваемой функции.

Определение 69.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Для иллюстрации последнего определения полезно самостоятельно нарисовать картинку и понять происходящее, скажем, на примере функции $f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 0$.

Замечание 128.
Аналогично понятиям односторонних производных, можно ввести понятия односторонних касательных. Односторонние касательные помогают охарактеризовать поведение функции в «проблемных» точках.

Так, если $f'(x_0 - 0)$, $f'(x_0 + 0)$ существуют в $\mathbb{R}$ и различны, то в точке x_0 график функции терпит «излом» (например, $f(x) = |x|$).

Если, например, $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$ и f непрерывна в точке x_0, то в точке x_0 график функции выглядит как «птичка» (например, $f(x) = x^{2/3}$).

Понятно, что описанные ситуации могут комбинироваться. Интересующемуся читателю мы советуем самостоятельно подумать над возможными комбинациями и примерами к ним.

Если хотя бы одной из односторонних производных в точке x_0 нет, то нет и соответствующей односторонней касательной в этой точке.

Отметим и еще одно, асимптотическое замечание.

Замечание 129.
Если функция дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

и последнее представление единственно. Именно поэтому касательную часто называют наилучшим линейным (а вообще-то – афинным) приближением функции в точке x_0.

Вспоминая таблицу эквивалентностей (113) и формулы для производных простейших функций, известные из школы, полезно понять, что выведенные нами ранее эквивалентности – это в точности «касательные». Ну, за исключением функции $\cos x$, у которой мы добились большего – асимптотической кривой в виде многочлена второго порядка при $x \to 0$, задаваемой уравнением

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Касательная же оказывается, в некотором смысле, тривиальной – прямой $y = 1$.

§ 3. Основные правила дифференцирования

В этом разделе мы изучим основные правила дифференцирования: получим формулы для производной суммы, произведения, частного, композиции и обратной функции. Большинство этих формул, скорее всего, известно из школы. Применение доказанных формул мы увидим в следующем пункте.

Теорема 49 (О производной суммы, произведения и частного).
Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1. Их сумма дифференцируема в точке x_0 и
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. Их произведение дифференцируемо в точке x_0 и
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
3. Их частное дифференцируемо в точке x_0 при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Согласно определению,
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \quad g'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x},$$
причем оба предела конечны.
1. Докажем первый пункт. Так как
$$\Delta(f+g)(x_0) = f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$
$$= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) + g(x_0+\Delta x) - g(x_0),$$
то
$$(f+g)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f+g)(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)+g'(x_0).$$
2. Докажем второй пункт. Так как
$$\Delta(fg)(x_0) = f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$
$$= f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0),$$
то
$$(fg)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(fg)(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим первый из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=g(x_0)f'(x_0),$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)=g(x_0)$ в силу непрерывности функции $g(x)$ в точке x_0 (лемма 60). Теперь рассмотрим второй из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f(x_0)g'(x_0).$$

Тем самым,

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

3. Третий пункт предлагается доказать самостоятельно. □

Из связи производной и дифференциала сразу вытекает следующее следствие.

Следствие 16 (О дифференциале суммы, произведения и частного).
В условиях предыдущей теоремы справедливы следующие соотношения:

1. $d(f+g)(x_0)=df(x_0)+dg(x_0)$.
2. $d(fg)(x_0)=g(x_0)df(x_0)+f(x_0)dg(x_0)$.
3. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)=\dfrac{g(x_0)df(x_0)-f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, при $g(x_0)\neq 0$.

Теперь обсудим теорему о производной композиции.

Теорема 50 (О производной композиции).
Пусть $f:\langle a,b\rangle\to\langle c,d\rangle$, $g:\langle c,d\rangle\to\mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0\in\langle a,b\rangle$, g дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g'(y_0)\Delta y+o(\Delta y),\quad \Delta y\to 0,$$

где в представлении $o(\Delta y)=\alpha(\Delta y)\Delta y$, $\alpha(\Delta y)\xrightarrow[y\to y_0]{}0$, можно считать, что $\alpha(0)=0$.

Положив

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-y_0,$$

можно заметить, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности f (лемма 60). Тогда

$$g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) + o(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) =$$
$$= g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) =$$
$$= g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + g'(y_0)o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)).$$

Так как

$$o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)),$$

то, используя непрерывность α в нуле и утверждение из замечания 90 легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0)o(\Delta x) + \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

а значит композиция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

□

Как и ранее, отметим следующее следствие.

Следствие 17 (О дифференциале композиции).
В условиях предыдущей теоремы,

$$d(g(f))(x_0) = dg(y_0)(df(x_0)).$$

Иными словами, дифференциал композиции – это композиция дифференциалов.

Замечание 130.
Действительно, композиция $\psi(\varphi)$ двух линейных функций $\varphi(h) = Ah$ и $\psi(k) = Bk$ – это линейная функция

$$\chi(h) = BAh.$$

В данном случае $A = f'(x_0)$, $B = g'(f(x_0)) = g'(y_0)$.

Теперь обсудим теорему о производной обратной функции.

Теорема 51 (О производной обратной функции).
Пусть функции $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ и $f^{-1} : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – взаимно обратные, причем f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, а f^{-1} непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Положим

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 и непрерывности обратной функции f^{-1} в точке y_0, выполнено

$$(\Delta x \to 0) \Leftrightarrow (\Delta y \to 0).$$

Кроме того, так как функции взаимно обратны, то

$$(\Delta x \neq 0) \Leftrightarrow (\Delta y \neq 0).$$

Тогда

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Традиционно, отметим следующее следствие.

Следствие 18 (О дифференциале обратного отображения).
В условиях предыдущей теоремы,

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

Замечание 131.
Обратной к линейной функции $\varphi(h) = Ah$, $A \neq 0$, является линейная функция $\varphi^{-1}(h) = A^{-1}h$. В данном случае $A = f'(x_0)$.

§ 4. Таблица производных

В этом пункте мы выведем выражения для производных простейших функций. Скорее всего, многие из выводимых ниже результатов хорошо известны из школы.

Подробного описания требует область определения функции $f(x) = x^\alpha$.

1. Случай $\alpha = 0$ в таблице приведен отдельно.
2. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то f' определена на $\mathbb{R}$. Более того, при $\alpha = 1$ мы считаем, что $x^{\alpha-1} = 1$ и при $x = 0$.
3. Если $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, то f' определена на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. Если $\alpha = \frac{m}{2n+1}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то при $\alpha \geq 1$ функция f' определена на $\mathbb{R}$, а при $\alpha < 1$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
5. Если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ или $\alpha = \frac{2m+1}{2n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то f' при $\alpha > 1$ функция f' определена на $[0, +\infty)$, а при $\alpha < 1$ на $(0, +\infty)$.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему. При доказательстве мы используем замечательные пределы и следствия из них, а также теорему о замене на эквивалентную.

Теорема 52 (Производные простейших функций).
Справедливы следующие соотношения:

	f	f'	Область определения f'
1.	1	0	$\mathbb{R}$
2.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$.	смотри описание выше
3.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
4.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
5.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
6.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$
7.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
8.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
9.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
10.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
11.	$\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
12.	$\ln \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
13.	a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
14.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Доказательство. 1. Покажем, что $(1)' = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Действительно, так как

$$\Delta f(x_0) = 1 - 1 = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

то

$$(1)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

В силу произвольности x_0, получаем требуемое.
2. Покажем, что $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha = x_0^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha - 1 \right), \quad x_0 > 0,$$

то

$$(x^\alpha)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha x_0^{\alpha-1} \Delta x}{\Delta x} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

В силу произвольности x_0, получаем требуемое. Остальные случаи остаются в качестве упражнения.
3. Покажем, что $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

то

$$(\sin x)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0.$$

4. Данный пункт доказывается аналогичным предыдущему образом.
5. Покажем, что $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. По формуле производной частного (теорема 49) и только что доказанным формулам производных функций $\sin x$ и $\cos x$, имеем

$$(\operatorname{tg} x)'(x_0) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)'(x_0) = \frac{(\sin x)'(x_0) \cos x_0 - \sin x_0 (\cos x)'(x_0)}{\cos^2 x_0} =$$

$$= \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

6. Данный пункт доказывается аналогичным предыдущему образом.
7. Покажем, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции (51). Обратная функция такова: $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right]$. Все условия теоремы о производной обратной функции выполнены, а значит

$$(\arcsin x)'(x_0) = \frac{1}{(\sin y)'(y_0)} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

8-10. Данные пункты доказывается аналогичным предыдущему образом.
11. Покажем, что $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть $x_0 > 0$, тогда, так как

$$\Delta f(x_0) = \log_a (x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a \left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right),$$

то

$$(\log_a |x|)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x_0 \Delta x \ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

Аналогично рассматривается случай $x_0 < 0$.

12. Данный пункт – прямое следствие предыдущего.

13. Покажем, что $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции (51). Обратная функция такова: $x = \log_a y$, $y > 0$. Все условия теоремы выполнены, а значит

$$(a^x)'(x_0) = \frac{1}{(\log_a y)'(y_0)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y_0 \ln a}} = y_0 \ln a = a^{x_0} \ln a.$$

14. Данный пункт – прямое следствие предыдущего. □

Используя доказанные соотношения, а также теоремы о правилах дифференцирования, можно легко находить производные элементарных функций, которые, кстати, как теперь стало понятно, тоже являются элементарными функциями.

§ 5. Немного о параметрически заданной функции

Пусть T – множество, $\varphi, \psi : T \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} : T \to \mathbb{R}^2.$$

Определяет ли введенная система y как функцию f от x? Если да, то говорят, что **система задает функцию f параметрически**. Переменную t при этом называют параметром.

Замечание 132.
Понятно, что в общем случае ответ на поставленный вопрос отрицательный. Окружность, задаваемая системой

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

не является графиком какой-либо функции.

В то же время, если функция φ обратима, то ответ положительный:

$$t = \varphi^{-1}(x) \;\Rightarrow\; y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \varphi(T).$$

Иными словами, $f = \psi(\varphi^{-1})$.

Изучим способ нахождения производной функции f.

Теорема 53 (О производной функции, заданной параметрически).
Пусть $T = \langle a, b \rangle$, $t \in T$, $\varphi \in C(T)$, φ строго монотонна, φ, ψ дифференцируемы в точке t, $\varphi'(t) \neq 0$, $f = \psi(\varphi^{-1})$ – параметрически заданная функция. Тогда f дифференцируема в $x = \varphi(t)$ и

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Доказательство. По правилам дифференцирования композиции (50) и обратной (51) функции, имеем

$$f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

□

§ 6. Французские теоремы

В данном разделе мы изучим различные приложения производной как к исследованию функций на так называемый экстремум, так и к вычислению различного рода пределов. Начнем с определений.

Определение 70 (Понятия локального максимума и минимума).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0): \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0): \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \ge f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Итак, x_0 – точка локального максимума, если в некоторой окрестности этой точки значения функции не больше, чем в самой точке. Если же в некоторой проколотой окрестности этой точки значения функции меньше, чем в самой точке, то x_0 – точка строгого локального максимума. На рисунке 5 видно, что точка $x = 0$ – точка стро-

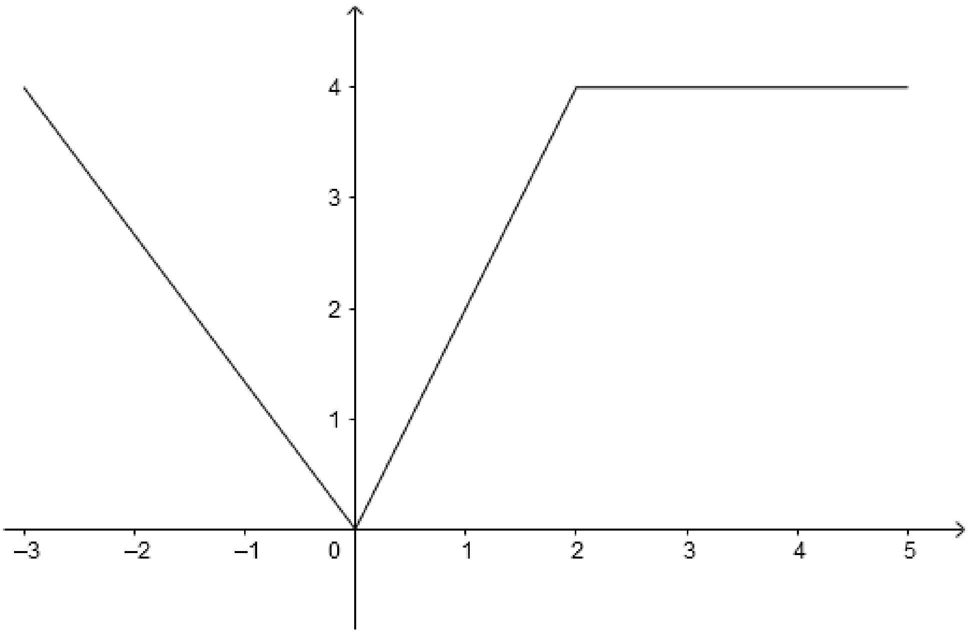

Рис. 5. Точки максимума и минимума

гого локального минимума, а точка $x = -3$ – точка строгого локального максимума. Все точки из множества $(2, 5]$ можно считать как точками локального максимума, так и точками локального минимума. Точка $x = 2$ – точка локального максимума (не строгого!).

Определение 71 (Понятие точек экстремума).
Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локально-

го минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

Наша задача – научиться находить точки экстремума, опираясь на поведение производной. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции дает теорема Ферма. Оно и понятно, в точке экстремума производная, если существует, должна быть равна нулю. А точно ли?

Теорема 54 (Ферма).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Для определенности будем полагать, что x_0 – точка локального максимума. При достаточно малом $\Delta x < 0$, из определения точки локального максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

При достаточно малом $\Delta x > 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Сравнивая два неравенства, приходим к тому, что $f'(x_0) = 0$. □

Отметим следующее замечание.

Замечание 133.
Геометрически теорема Ферма означает, что касательная в точке «внутреннего» экстремума дифференцируемой функции параллельна оси Ox.

Обратите внимание, что для «граничных» точек теорема, вообще говоря, неверна (рисунок 5 и точка $x = -3$). Озвученное наблюдение находит отражение как в формулировке теоремы, так и в ее доказательстве. Внимательно разберите, почему все может «сломаться» в граничных точках.

Следующая теорема – теорема Ролля. Оказывается, если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает одинаковые значения, то внутри отрезка она имеет хотя бы один экстремум и, как следствие, в этой точке ее производная обращается в ноль.

Теорема 55 (Ролля).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

Доказательство. Если f постоянна на отрезке $[a, b]$, то утверждение, очевидно, верно.

Если f не постоянна, то, по теореме Вейерштрасса (28), на отрезке $[a, b]$ существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее M и наименьшее m значения, причем $M \neq m$. Значит, хотя бы одно из этих значений принимается внутри интервала (a, b) в некоторой точке ξ. Значит, по теореме Ферма (54), $f'(\xi) = 0$. $\square$

Конечно, не обойтись без замечания.

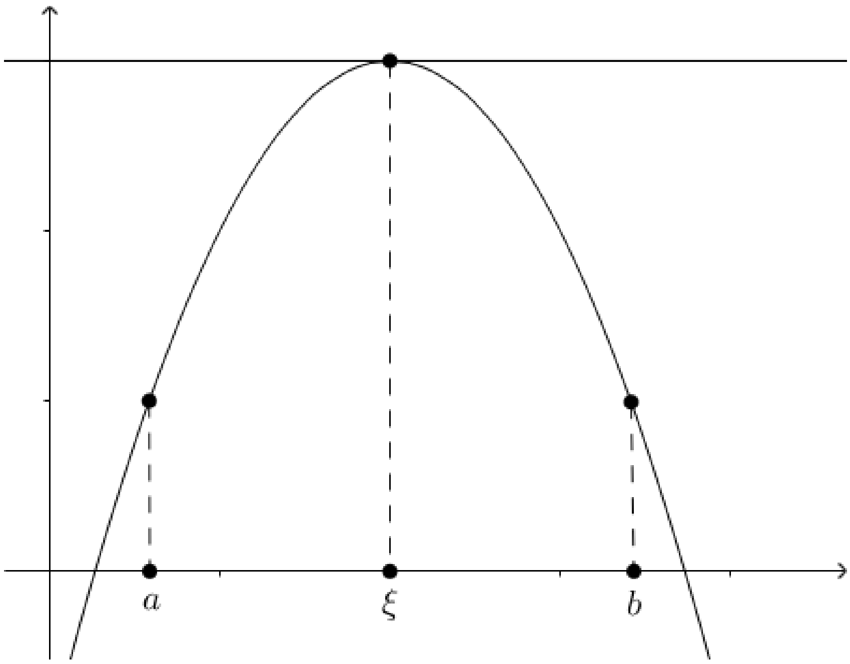

Рис. 6. Теорема Ролля

Замечание 134.
Еще раз подчеркнем геометрический смысл теоремы Ролля: если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум, рисунок 6.

Следующая теорема позволит нам выяснять характер монотонности функции в зависимости от знака производной. Итак, сформулируем теорему Лагранжа.

Теорема 56 (Лагранжа).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда

$$\exists \xi \in (a, b): \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Доказательство. Пусть

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Прямым вычислением проверяется, что $g(a) = g(b)$, причем $g \in C[a, b]$ как разность непрерывных функций, и дифференцируема на (a, b) как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля (55),

$$\exists \xi \in (a,b): \ g'(\xi) = 0,$$

откуда

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \ \Leftrightarrow \ f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

□

Отметим напрашивающееся замечание.

Замечание 135.
Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале (a,b) существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, см. рисунок 7.

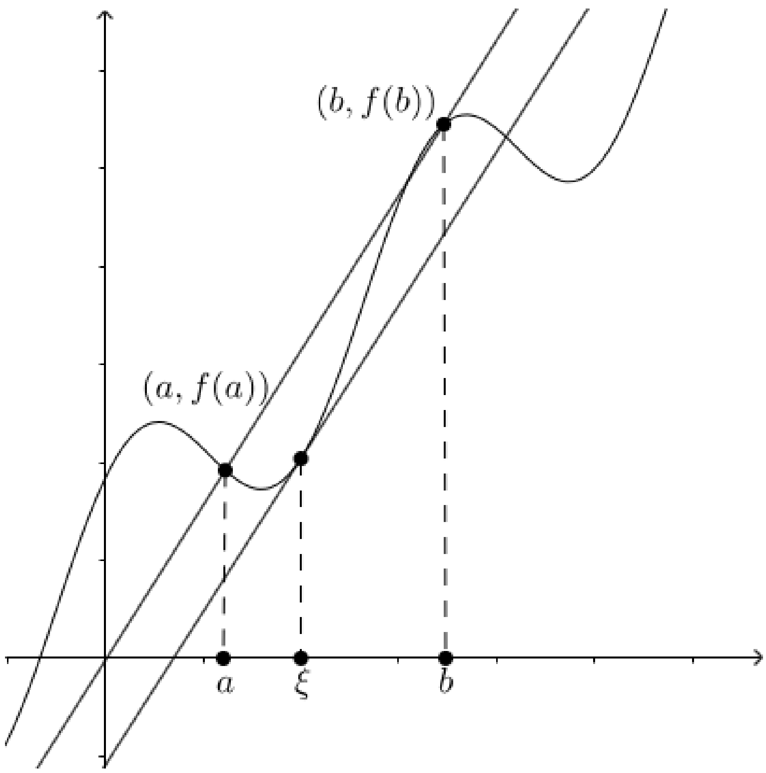

Рис. 7. Теорема Лагранжа

Как уже было анонсировано, теорема Лагранжа оказывается незаменимым помощником при исследовании монотонности функции.

Теорема 57 (Критерий монотонности функции).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда:

1. Для того чтобы функция f возрастала (убывала) на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a,b).
2. Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a,b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a,b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает.
Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in (a,b)$, тогда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенстве (13),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа (56) найдется $\xi \in (a,b)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geq 0$ на (a,b) и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Так как x_1, x_2 – произвольные, получаем определение возрастающей функции.

Если же $f'(x) > 0$ на (a,b), то $f(x_2) > f(x_1)$ и мы приходим к определению строго возрастающей функции. □

Замечание 136.
Полезно заметить, что из того, что функция возрастает (убывает), вообще говоря не следует положительность (отрицательность) производной. Пусть $y = x^3$. Очевидно, что функция возрастает, но $y' = 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.

Отметим и еще одно замечание.

Замечание 137.
Сформулированная теорема не должна удивлять. И правда, если производная (механически – скорость) положительна, то функция увеличивает свои значения в «положительную» сторону, то есть (строго) растет. Если отрицательна – (строго) убывает. Случай, когда производная равна нулю в точке x_0, не дает возможности охарактеризовать характер поведения функции. Действительно, если «скорость изменения» функции в точке x_0 стала равна нулю, то дальше возможны варианты: скорость может остаться нулевой, может изменить свой знак, а может сохранить. В этих случаях, очевидно, функция либо остается постоянной, либо имеет экстремум, либо имеет так называемую точку перегиба, соответственно.

При изучении интегралов оказывается полезным следующий критерий постоянства функции. В принципе, он «вскользь» уже был упомянут в предыдущем замечании.

Теорема 58 (Критерий постоянства функции).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Для того чтобы f была постоянной на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на (a,b).

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Если $f'(x) = 0$ на (a,b), то для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 < x_2$, по теореме Лагранжа (56)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности точек x_1, x_2 функция постоянна. $\square$

Следующая теорема часто помогает на практике при нахождении производных особенно в случае исследования функций.

Теорема 59 (О пределе производной).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Если

$$A = \lim_{x \to a+0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$

то $f'_+(a) = A$.

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа (56), если $\Delta x > 0$, то

$$f(a + \Delta x) - f(a) = f'(\xi)\Delta x, \quad \xi \in (a, a + \Delta x).$$

Осталось устремить Δx к нулю и воспользоваться условием теоремы и определением односторонней производной. $\square$

Замечание 138.
Понятно, что аналогичная теорема справедлива, если при тех же предположениях устремить $x \to b - 0$.

Приведем пример.

Пример 42.
Пусть $f(x) = 3x^{1/3}$. Понятно, что f не дифференцируема в нуле. Однако, если $x \neq 0$, то

$$f'(x) = x^{-2/3}.$$

Так как

$$\lim_{x \to 0} x^{-2/3} = +\infty,$$

то можно заключить, что $f'(0) = +\infty$ и $x = 0$ – вертикальная касательная к графику функции $y = f(x)$.

Теперь сформулируем и докажем так называемую теорему Коши.

Теорема 60 (Коши).
Пусть $f, g \in C[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b). Тогда $\exists \xi \in (a,b)$, что выполняется

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Прямые вычисления показывают, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что $\varphi \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Значит, по теореме Ролля (55) найдется $\xi \in (a,b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$g'(\xi)\left(f(b) - f(a)\right) = f'(\xi)\left(g(b) - g(a)\right).$$

Если $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала (a,b), в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Отметим замечания к данной теореме.

Замечание 139.
Геометрическая интерпретация к теореме Коши та же, что и к теореме Лагранжа. Пусть $g'(t) \neq 0$ на (a,b). Тогда, и это можно доказать, либо $g'(t) > 0$ на (a,b), либо $g'(t) < 0$ на (a,b), а значит система

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

задает функцию $y = f(g^{-1}(x))$ параметрически. Тогда в выражении

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

слева стоит коэффициент наклона хорды, соединяющей концы графика функции $y = f(g^{-1}(x))$, а справа – коэффициент наклона касательной к графику этой функции в некоторой промежуточной точке ξ (см. теорему 53).

Замечание 140.
Те же соображения, что описаны выше, и просто алгебраическая наглядность показывают, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши: достаточно в последней положить $g(x) = x$.

Теперь отметим достаточно известное и любимое студентами правило Лопиталя.

Теорема 61 (Правило Лопиталя).
Пусть f, g дифференцируемы на (a,b), $g'(x) \neq 0$ на (a,b) и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда в любом из двух случаев:

1. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty.$

выполняется
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Доказательство. Докажем первый пункт. Так как
$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}g(x)=0,$$
то функции f и g можно доопределить по непрерывности, положив $f(a)=g(a)=0$. Пусть $c\in(a,b)$. Тогда $f,g\in C[a,c]$ и дифференцируемы на (a,c). Так как $g'(x)\neq 0$, то, согласно теореме Коши (60),
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad a<\xi<x<c.$$
При $x\to a+0$ выполняется $\xi\to a+0$, а значит
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A\ \Rightarrow\ \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$
Докажем второй пункт. Пусть $A\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$. Тогда найдется $\delta_0<(b-a)$, что при $x\in(a,a+\delta_0)$ справедливо неравенство
$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon.$$
В частности, при $x\in(a,a+\delta_0)$ функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ограничена, то есть
$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|\leq M.$$
Пусть $x\in(a,a+\delta_0)$, рассмотрим преобразования
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a+\delta_0)}{g(x)}+\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}=$$
$$=\frac{g(x)-g(a+\delta_0)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(a+\delta_0)}{g(x)-g(a+\delta_0)}+\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}=$$
$$=\left(1-\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right)\cdot\frac{f(x)-f(a+\delta_0)}{g(x)-g(a+\delta_0)}+\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}.$$
На отрезке $[x,a+\delta_0]$ функции f и g непрерывны, а на интервале $(x,a+\delta_0)$ дифференцируемы, значит, по теореме Коши (60),
$$\frac{f(x)-f(a+\delta_0)}{g(x)-g(a+\delta_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad a<x<\xi<a+\delta_0.$$
Так как $|g(x)|\to+\infty$, то по ранее заданному ε, можно найти $\delta_1<\delta_0$, что при $x\in(a,a+\delta_1)$ справедливы оценки
$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right|<\varepsilon,\quad\left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right|<\varepsilon.$$

Тогда, при $x \in (a, a+\delta_1)$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \leq$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot M + \varepsilon = \varepsilon(2+M).$$

В силу произвольности ε отсюда следует требуемое.

Пусть теперь $A = +\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta_0 < (b-a)$, что при $x \in (a, a+\delta_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a+0} |g(x)| = +\infty$, можно найти $\delta_1 < \delta_0$ так, чтобы при $x \in (a, a+\delta_1)$ выполнялось

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Используя аналогичные выкладки, что и ранее, при $x \in (a, a+\delta_1)$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} > \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности ε отсюда следует требуемое.

Случай $A = -\infty$ доказывается аналогично предыдущему пункту и остается в качестве упражнения. □

Отметим несколько замечаний.

Замечание 141.
Рассмотренная теорема справедлива и при $a = -\infty$. Для доказательства достаточно положить $t = 1/x$ и применить предыдущую теорему.

Кроме того, конечно, теорема справедлива и при $x \to b-0$, необходимые изменения в предпосылках и утверждениях остаются на откуп читателю.

Замечание 142.
Условие существования предела производных важно. Так, например,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0,$$

и было бы ошибочно делать вывод о несуществовании заявленного предела, опираясь на несуществование предела отношения производных:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

Замечание 143.

Наконец, условия на «случаи» тоже важны. Ошибочно полагать, что верна цепочка равенств

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Объяснения о неприменимости теоремы Лопиталя в данном случае остаются в качестве упражнения.

Замечание 144.
Геометрически правило Лопиталя можно коротко, но не очень точно трактовать так: предел отношения функций в случае «неопределенности» равен пределу отношения коэффицентов наклона касательных, если последний существует.

Приведем, наконец, пример.

Пример 43.
Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Так как

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x\ln\sin x},$$

то, в силу непрерывности экспоненты, достаточно вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x\ln\sin x) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = 0$$

Значит, значением предела будет $e^0 = 1$.

§ 7. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница

Если функция f дифференцируема на множестве E_1, то на этом множестве возникает функция $f' : E_1 \to \mathbb{R}$, равная значению производной функции f в точке $x \in E_1$. Эта функция, в свою очередь, сама может оказаться дифференцируемой.

Замечание 145.
Напомним, что при определении производной функции f мы ограничились ситуацией, когда f задана на промежутке. Поэтому, чтобы определить производную функции f', необходимо соблюдать должную осторожность. Именно, при исследовании функции f' на дифференцируемость в точке $x_0 \in E_1$ необходимо, чтобы множество

$$E_1 \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

было невырожденным (с неравными концами) промежутком при некотором $\delta > 0$.

Теперь мы готовы дать определение производной n-ого порядка.

Определение 72 (Производная высшего порядка).
Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции f. Обозначим через E_n множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых

$$E_{n-1} \cap (x - \delta, x + \delta)$$

– невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$

Введенная функция называется производной порядка n, или, короче, n-ой производной функции f. При этом функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E_n.

Замечание 146.
Обычно, для удобства дальнейших обозначений, производную «нулевого порядка» отождествляют с самой функцией. Таким образом, $f^{(0)} \equiv f$.

Сразу отметим и еще одно важное определение.

Определение 73 (Классы гладкости).
Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $f^{(n)} : E \to \mathbb{R}$. Если $f^{(n)} \in C(E)$, то f называется n раз непрерывно дифференцируемой на E и обозначается

$$f \in C^n(E).$$

Через $C^\infty(E)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых на E функций – функций, заданных на E, и имеющих на E производные всех порядков.

Замечание 147.
Аналогично сказанному выше, класс $C^0(E)$ часто отождествляют с $C(E)$ – классом непрерывных на E функций.

Нетрудно проверить, что $C^{n+1}(E) \subset C^n(E)$, при этом все включения строгие, и что «формально»

$$C^\infty(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(E),$$

откуда, например, $C^\infty(E) \subset C^n(E)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Приведем примеры. Будем считать, что произведение, в котором нет сомножителей, равно 1.

Пример 44.
Пусть $f(x) = x^\alpha$ и $x > 0$. Тогда, как легко проверить по индукции,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - (n-1))x^{\alpha - n}.$$

В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m!, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases}.$$

Пример 45.
Пусть $f(x) = a^x$. Тогда, как легко проверить по индукции,

$$f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a.$$

В частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

Пример 46.
Пусть $f(x) = \ln(1 + x)$. Тогда, как легко проверить по индукции,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Пример 47.
Пусть $f(x) = \sin x$. Так как

$$(\sin(x))' = \cos x, \quad (\sin(x))'' = -\sin x, \quad (\sin(x))''' = -\cos x, \quad (\sin(x))'''' = \sin x,$$

то, обобщив, можно записать

$$(\sin(x))^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Аналогично,

$$(\cos(x))^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Замечание 148.
Отметим, что все функции, рассмотренные в примерах, оказываются бесконечно дифференцируемыми на своей области определения.

Теперь введем понятие дифференциала n-ого порядка.

Определение 74 (Дифференциал высшего порядка).
Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – n раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина

$$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$

называется n-ым дифференциалом функции f в точке x_0, соответcnвующим приращению h.

Сразу же отметим важное замечание.

Замечание 149.
Для удобства, опять-таки, часто пологают $d^0 f(x_0)(h) = f(x_0)$.

Кроме того, из связи дифференциала и производной, используя индукцию, легко получить, что

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n = f^{(n)}(x_0)(dx)^n.$$

Обязательно проделайте соответствующие выкладки самостоятельно.

Отметим некоторые арифметические свойства над производными высших порядков

Теорема 62 (Формула Лейбница).
Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ имеют $n \in \mathbb{N}$ производных в точке $x_0 \in E$. Тогда

1. Производная линейна, а именно:

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Справедлива формула Лейбница:

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Доказательство. Доказательства проводятся индукцией по n. Доказательство формулы Лейбница идентично доказательству формулы бинома Ньютона, где в качестве базы выступает, например, формула производной произведения. □

§ 8. Формула Тейлора

В данном разделе мы рассмотрим важнейшую формулу дифференциального исчисления – формулу Тейлора – формулу, благодаря которой становится возможным «приблизить» дифференцируемую функцию многочленом. В частности, благодаря формуле Тейлора «компьютеры» умеют вычислять значения экспонент, логарифмов, синусов и различных других, порой весьма хитрых, выражений.

Начнем, однако, с интуиции. Из всего изучаемого ранее могло возникнуть (вообще-то) верное соображение: чем больше производных совпадает у двух функций в некоторой точке, тем более «похожи» эти функции друг на друга в окрестности этой точки. Самое банальное и простое приближение функции, имеющей в точке x_0 значение $f(x_0)$, – это приближение константой $g_0(x) = f(x_0)$. К сожалению, обычно у рассматриваемой функции f и введенной функции g ничего общего, кроме значения в точке x_0, нет. Попытка улучшить введенное приближение приводит нас к уравнению касательной:

$$g_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Касательная оказывается куда более приятным приближением. Кроме значения функции в точке x_0, она показывает направление и скорость роста функции в этой точке. Легко понять, что теперь в точке x_0 выполняется сразу пара равенств:

$$\begin{cases} g_1(x_0) = f(x_0) \\ g_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}.$$

Замечание 150.
Как уже отмечалось, с уравнениями касательных мы встречались при изучении эквивалентностей. Это еще одна отсылка к вопросу приближения функций.

Нетрудно придумать и, как будто бы, следующее приближение – приближение многочленом второй степени. Вот оно:

$$g_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Теперь выполняется уже тройка равенств

$$\begin{cases} g_2(x_0) = f(x_0) \\ g_2'(x_0) = f'(x_0) \\ g_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

и введенная функция, графиком которой (при $f''(x_0) \neq 0$) является парабола, теперь не только указывает направление и скорость роста приближаемой функции в точке x_0, но и вторит направлению выпуклости этой функции в этой точке.

Замечание 151.
Вспомните, что

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0.$$

Нетрудно понять, что полученная эквивалентность есть не что иное, как многочлен g_2, построенный по функции $f(x) = \cos x$ в точке $x_0 = 0$. Сравните графики данных функций самостоятельно.

В связи со сказанным ранее, возникает идея приближать функцию в окрестности некоторой точки многочленом. Реализуем ее, введя следующее определение.

Определение 75 (Понятие многочлена Тейлора).
Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

Пример 48.
На рисунке 8 представлена функция $f(x) = x + \sin(2x)$ и ее приближения многочленами Маклорена 0, 1, 3 и 5 порядков, соответственно. Видно, что чем выше порядок многочлена, тем, как будто бы, точнее приближается функция уже не только в точке x_0, но и в ее окрестности. С ростом порядка окрестность, вообще говоря, «расширяется».

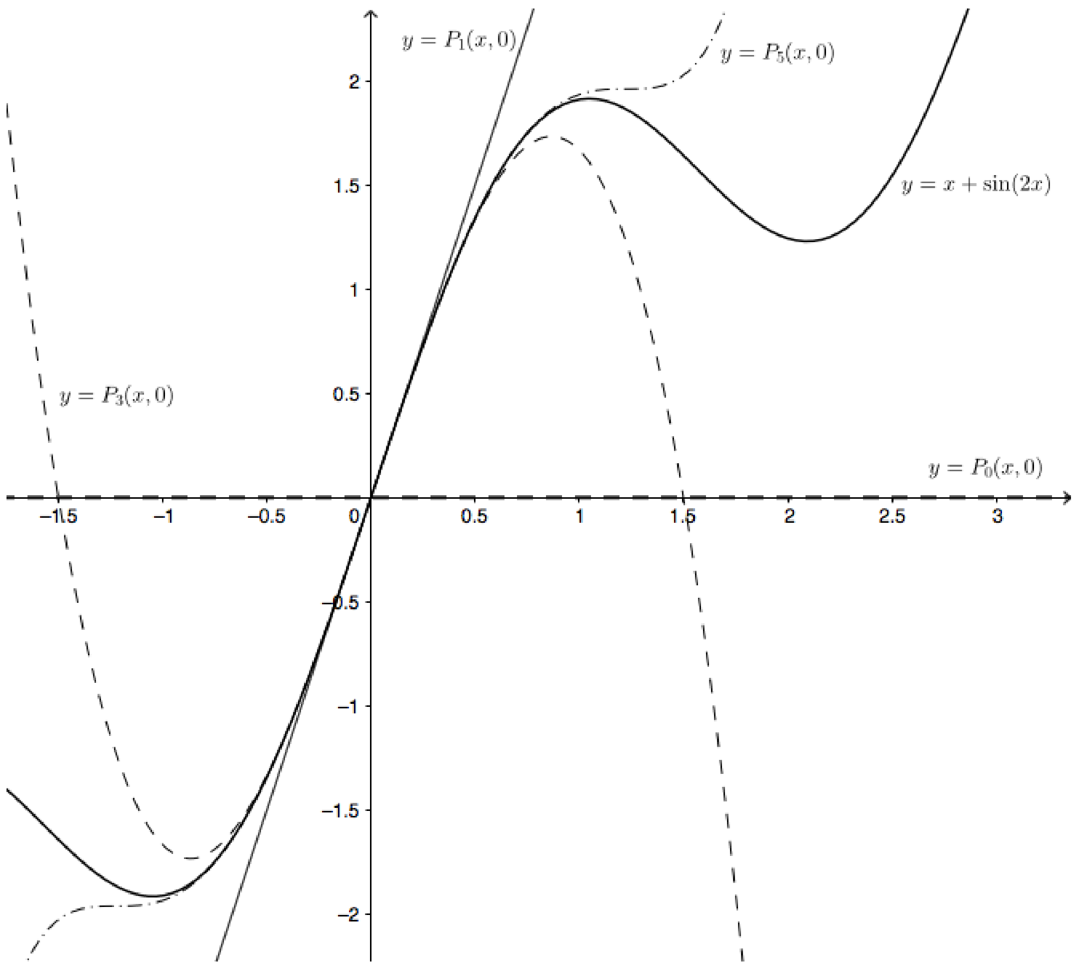

Рис. 8. Приближения Тейлора функции $f(x) = x + \sin(2x)$

Итак, многочлен Тейлора и правда обладает заявленным ранее свойством: его производные в точке x_0 до порядка n включительно совпадают с соответствующими производными породившей его функции.

Лемма 62.
Пусть $P_n(x, x_0)$ — многочлен Тейлора порядка n функции f в точке x_0. Тогда

$$\left(P_n(x, x_0)\right)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Доказательство. Проверка осуществляется прямым дифференцированием и остается в качестве упражнения. □

Любое приближение оказывается безыдейным, если только мы не умеем контролировать поведение погрешности приближения или, иначе – отклонения.

Определение 76 (Понятие отклонения).
Отклонением многочлена Тейлора $P_n(x, x_0)$ от породившей его функции f назовем величину

$$r_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$$

Первый результат, характеризующий отклонение, назовем формулой Тейлора с остатков в форме Пеано.

Теорема 63 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).
Пусть функция f в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, x_0)$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что

$$\varphi(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

а для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Так как функция φ имеет n производных в точке x_0, то все производные до $(n-1)$ порядка включительно определены как минимум на некотором промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, причем $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Используем теорему Коши (60) несколько раз, учитывая, что $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, и что, согласно лемме 62,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = 0, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{n((\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - x_0)^{n-2}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \varphi^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

где ξ_1 лежит между x и x_0, ξ_2 между ξ_1 и x_0, и так далее, ξ_{n-1} между ξ_{n-2} и x_0. Предпоследнее равенство верно в силу существования $\varphi^{(n)}(x_0)$ и того, что

$$(x \to x_0) \;\Rightarrow\; (\xi_{n-1} \to x_0).$$

□

Отметим следующее замечание.

Замечание 152.
Доказанная теорема утверждает, что многочлен Тейлора $P_n(x, x_0)$ – это лучшее приближение «многочленом степени n» при $x \to x_0$: остаток имеет малость большую, чем старшая степень $(x - x_0)^n$.

Заметьте, что определение дифференцируемости функции – это частный случай только что доказанной теоремы (при $n = 1$).

Обратите внимание, что, как сказано в доказательстве теоремы, функция f обязательно определена на каком-то невырожденном промежутке $\langle\alpha, \beta\rangle$, причем $x_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Именно поэтому написанное предельное соотношение $(x \to x_0)$ легально.

Оказывается, многочлен Тейлора – единственный в своем роде. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 64 (О единственности многочлена Тейлора).
Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он единственен.

Доказательство. Сначала определим коэффициент a_0 из равенства

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n)) = a_0.$$

Далее, найдем коэффициент a_1 следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})\right) = a_1.$$

Продолжая, найдем коэффициент a_n:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1})}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} (a_n + o(1)) = a_n.$$

□

Следствие 19.
Если в условиях предыдущей теоремы функция f имеет n производных в точке x_0, то

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \{0, \ldots, n\},$$

и Q – многочлен Тейлора $P_n(x, x_0)$.

До сих пор мы рассматривали лишь «асимптотическую» характеристику отклонения (остатка). В то же время, остатку можно придать и более «конкретную» форму.

Теорема 65 (О характеристике остаточного члена).
Пусть f непрерывна вместе со своими первыми n производными на отрезке с концами x_0 и x, а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка $(n+1)$. Тогда для любой функции φ, непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Доказательство. Пусть на отрезке I с концами x_0 и x введена функция $F(t) = f(x) - P_n(x, t)$. F непрерывна на данном отрезке, имеет производную в его внутренних точках и записывается как

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right).$$

Прямым вычислением проверяется, что

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Легко заметить, что $F(x) = 0$, а $F(x_0) = r_n(x, x_0)$. Применяя на отрезке I к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ теорему Коши (60), получаем

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

откуда

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

□

Получим несколько важных следствий из доказанной (искусственной) теоремы. Естественный аналог доказанной теоремы мы получим при изучении интегрального исчисления.

Следствие 20 (Остаточный член в форме Лагранжа).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Лагранжа:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0.

Доказательство. Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$. □

Следствие 21 (Остаточный член в форме Коши).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Коши:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0),$$

где ξ лежит между x и x_0.

Доказательство. Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)$. □

§ 9. Разложение некоторых функций по формуле Маклорена

В этом разделе мы рассмотрим разложение некоторых простейших функций по формуле Маклорена. В качестве остаточного члена будем использовать остаток в форме Пеано.

1 Показательная функция

Пусть $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Пусть $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$. Так как $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$, $f^{(n)}(0) = \ln^n a$, то

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

2 Синус и косинус

Пусть $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1},$$

то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0.$$

Пусть $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n,$$

то

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

3 Логарифм

Пусть $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

4 Бином

Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \quad y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)),$$

то

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n), \quad x\to 0.$$

(5) Арктангенс

Пусть $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x_0=0$. В силу предыдущего примера легко заметить, что

$$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

откуда

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + \ldots + (-1)^n (x^2)^n + o((x^2)^n)$$

и

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{2n} x^{2n} + o(x^{2n}).$$

С другой стороны, так как f бесконечное число раз дифференцируема в точке $x_0=0$, то, в силу следствия 19 из теоремы о единственности многочлена Тейлора,

$$\varphi(0) = f'(0),\ \varphi'(0) = 2f''(0),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(0) = nf^{(n)}(0),$$

откуда получается разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}), \quad x\to 0.$$

(6) Некоторые приложения и дополнительные сведения

В этом разделе мы приложим разработанный аппарат к весьма интересным вопросам. Сначала вернемся к обсуждению примера 38, который мы уже не раз крутили с разных сторон.

Пример 49.
Пусть требуется вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

Согласно выведенным соотношениям,

$$\ln(1+3x+x^2) = 3x + x^2 - \frac{(3x+x^2)^2}{2} + o((3x+x^2)^2) = 3x - \frac{7}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\ln(1+3x+x^2) = -3x + x^2 - \frac{(-3x+x^2)^2}{2} + o((-3x+x^2)^2) = -3x - \frac{7}{2}x^2 + o(x^2).$$

Значит,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2 + o(x^2)}{x^2} = -7.$$

Данный пример (вкупе с рассуждениями ранее) показывает, что эквивалентность, «ловящая» правильный коэффициент при x, в данном случае не способна «отловить» правильный коэффициент перед x^2, так как он запрятан во втором члене тейлоровского разложения.

Теперь обсудим далеко идущие планы – представление функций в виде многочленов «бесконечной» степени – рядов. В качестве такого бесконечного многочлена выступает, конечно, многочлен Маклорена, но уже «без остатка».

Теорема 66.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся разложением Маклорена с остатком в форме Лагранжа (20), получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где ξ находится между 0 и x. Так как

$$e^{\xi} \leq e^{|x|},$$

то (лемма 23)

$$\left|e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

что и доказывает утверждение. □

Отметим и следующее замечание.

Замечание 153.
Из доказательства предыдущей теоремы видно, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!},$$

где $\xi \in (0, 1)$. Тем самым,

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{e}{(n+1)!},$$

и мы получили эффективный способ быстрого и точного вычисления значения e.

Абсолютно аналогичным образом можно доказать и следующую теорему.

Теорема 67.

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Дальнейшие подробности мы увидим в теории рядов.

§ 10. Исследование функции с помощью производных

Итак, мы приступаем к изложению приложений производной для исследования функции. Начнем с исследования на монотонность и экстремумы.

1 Монотонность и экстремумы

Стартуем мы с уже, в принципе, известных фактов (теорема 57).

Теорема 68 (О связи монотонности и производной).
Пусть функция $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда справедливы соотношения:

$$f'(x) > 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) < 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$

Доказательство. Как уже было отмечено, данная теорема является переформулировкой уже доказанной теоремы 57 и замечания после нее. □

Отдельно выпишем, опять-таки, известное нам необходимое условие (внутреннего) экстремума.

Теорема 69 (Необходимое условие экстремума).
Пусть $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a,b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо f не дифференцируема в x_0.

Доказательство. Если f дифференцируема в точке x_0, то доказательство напрямую следует из теоремы Ферма (54). Иначе утверждение тривиально. □

Отметим и следующее замечание.

Замечание 154.
Написанное условие не является достаточным. Действительно, для функции $f(x) = x^3$ имеем $f'(x) = 3x^2$, и $f'(0) = 0$. Однако, точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума для функции f.

Теперь отметим важные достаточные условия экстремума. Начнем с условия, которое известно из школы, и которое часто принято называть первым достаточным условием.

Теорема 70 (Первое достаточное условие экстремума).
Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на множествах $U_-(x_0) = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+(x_0) = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:

1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального максимума функции f.

2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального минимума функции f.
3. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.
4. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и f непрерывна в точке x_0, то, согласно сформулированной выше теореме 68, f строго возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_-(x_0)$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и f непрерывна в точке x_0, то f строго убывает на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_+(x_0)$. Тем самым проверено, что точка x_0 – точка строгого локального максимума.

Доказательство остальных пунктов проводится аналогичным образом и остается в качестве упражнения. □

Замечание 155.
Важно понимать и геометрический смысл доказанной теоремы. Она говорит вот о чем: если функция строго возрастает (убывает) до точки x_0, непрерывна в последней, а затем строго убывает (возрастает), то, конечно, в точке x_0 находится строгий локальный максимум (минимум).

Если же характер (строгой) монотонности при переходе через точку (непрерывности) x_0 не меняется, то экстремума в этой точке нет.

Отметим и несколько важных примеров.

Пример 50.
Функция $f(x) = |x|$ имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, так как она непрерывна в точке $x = 0$ и, кроме того, $f'(x) = -1$ при $x < 0$, и $f'(x) = 1$ при $x > 0$.

Пример 51.
Важно отметить, что отказаться от непрерывности функции в точке x_0 в вышеизложенной теореме нельзя. Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

при $x < 0$ выполняется $f'(x) = 1$, а при $x > 0$ выполняется $f'(x) = -1$, но экстремума в точке $x = 0$, очевидно, нет.

Отметим и следующее замечание.

Замечание 156.

Вышеизложенное достаточное условие не является необходимым. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что данная функция имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, однако ее производная

$$f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности нуля.

Дадим теперь классификацию точек (внутреннего) экстремума в терминах производных.

Определение 77 (Классификация точек экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума f.

1. Если f дифференцируема в x_0, то экстремум называется гладким.
2. Если $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.
3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

Приведем примеры.

Пример 52.
Уже рассмотренная функция $f(x) = |x|$ имеет в точке $x_0 = 0$ угловой экстремум – минимум.

Пример 53.
Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}.$$

Легко заметить, что данная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Ее производная равна

$$f'(x) = \frac{(4 - 3x)}{3(1 - x)^{2/3}(x - 2)^{1/3}}.$$

Методом интервалов легко определить, что производная отрицательна при $x > 2$ и $x < \dfrac{4}{3}$ и положительна при $\dfrac{4}{3} < x < 2$.

Так как функция f дифференцируема в точке $x = \dfrac{4}{3}$ и слева от этой точки производная отрицательна, а справа положительна, то x – точка строгого локального минимума, причем минимум оказывается гладким.

Так как $f'(2 - 0) = +\infty$, $f'(2 + 0) = -\infty$, и слева от точки $x = 2$ производная положительна, а справа – отрицательна, то точка x – точка строгого локального максимума, причем максимум острый.

Можно заметить, что при переходе через точку $x = 1$ знак производной не

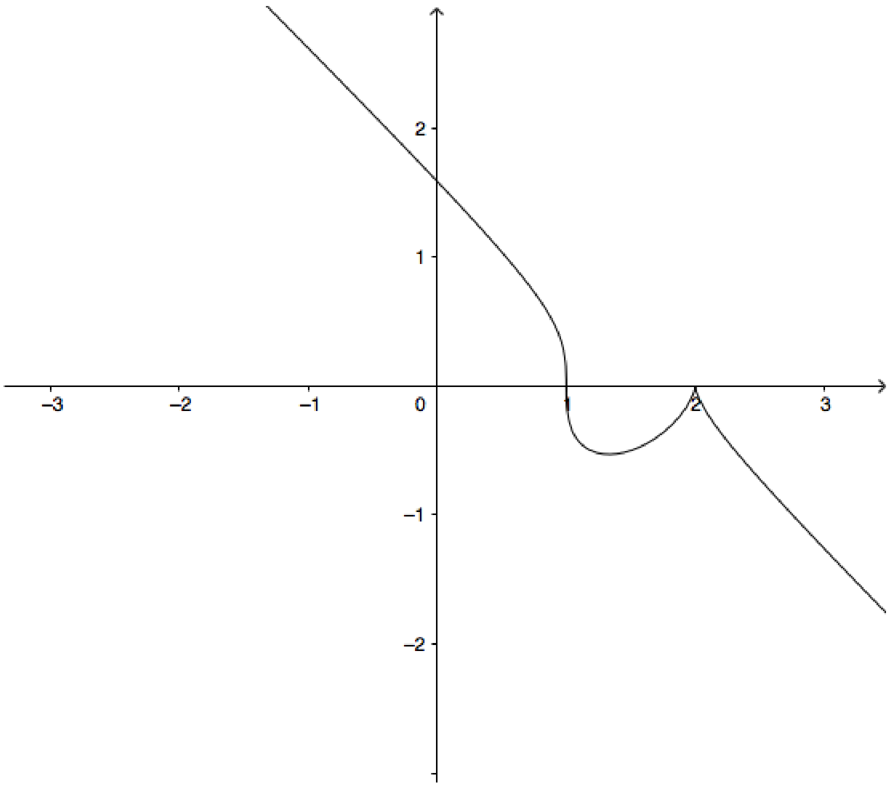

Рис. 9. График функции $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

меняется, а сама производная обращается в минус бесконечность (теорема 59). Значит, в точке $x = 1$ касательная к графику функции вертикальна. График обсуждаемой функции изображен на рисунке 9.

Отметим и следующее замечание.

Замечание 157.
Понятно, что экстремумы в граничных точках области определения тоже можно как-то классифицировать в терминах производных, и, в целом, понятно как. Однако, это редко требуется на практике, поэтому мы опускаем эту классификацию.

Теперь обсудим общематематическое (встречающееся везде, где нет разговора о монотонности, и чуть ли теперь для нас не самое естественное) второе достаточное условие экстремума. Опирается оно, конечно же, на формулу Тейлора.

Теорема 71 (Второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и f имеет в точке x_0 производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если n нечетно, то точка x_0 – не точка экстремума.
2. Если n четно, то точка x_0 – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано (теорема 63), тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + \alpha(x)), \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Из последнего следует, что найдется δ, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle a, b\rangle$, знаки выражений

$$f(x) - f(x_0) \quad \text{и} \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

совпадают.

Докажем первый пункт. При нечетном n выражение $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку x_0, значит, по соображениям выше, меняет знак и выражение $f(x) - f(x_0)$, что означает, что x_0 – не точка экстремума.

Докажем второй пункт. Пусть, например, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда, так как $(x-x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$, то при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$,

$$f(x) - f(x_0) > 0,$$

а значит x_0 – точка строгого локального минимума. Аналогичным образом разбирается случай, когда $f^{(n)}(x_0) < 0$. □

Замечание 158.
Утверждение и доказательство последней теоремы должны быть предельно прозрачными. Мы делаем вывод о поведении функции рядом с точкой x_0, основываясь на поведении первого ненулевого приближения вида $A(x-x_0)^n$. Поведение же последней функции хорошо известно еще со школы.

2 Выпуклость и точки перегиба

Теперь поговорим про такую важную характеристику функции как выпуклость.

Определение 78 (Понятие выпуклой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \underset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

то f называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

то f называется строго выпуклой вниз (верх).

Конечно, нужно выяснить геометрический смысл введенного понятия. Для этого обозначим

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

и заметим, что если λ пробегает интервал $(0, 1)$, то x пробегает интервал с концами x_1, x_2. Пусть, для удобства, $x_1 < x_2$. Разрешив написанное выражение относительно

λ, получим

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Тогда условие выпуклости вниз перепишется в виде

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

График правой части – это хорда (отрезок прямой), соединяющая точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Геометрически выпуклость вниз функции f на $\langle a, b\rangle$ означает, что какие бы точки $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ не взять, все точки графика функции, стягиваемые хордой, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, лежат не выше самой хорды, рисунок 10.

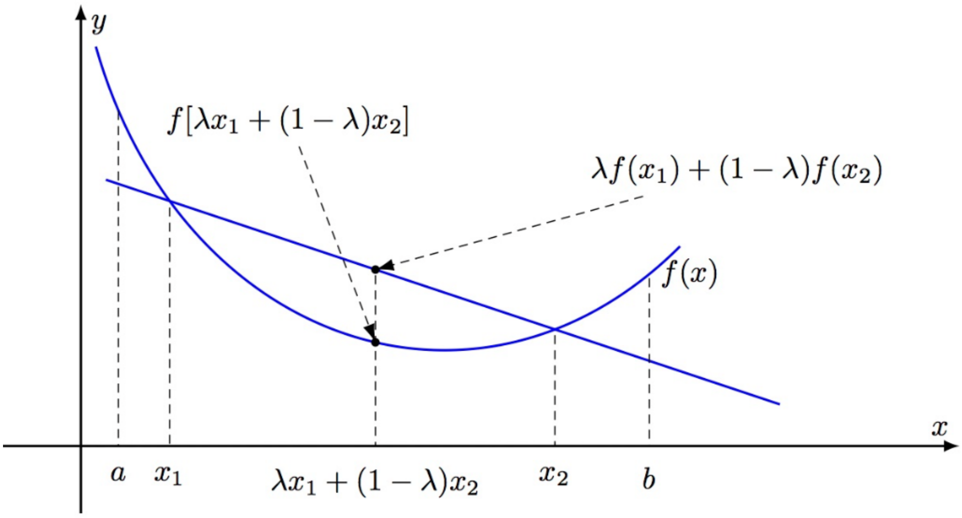

Рис. 10. Геометрический смысл выпуклости функци

Замечание 159.
Понятно, что геометрическое толкование выпуклой вверх функции будет ровно таким же. Строгая выпуклость означает, что все точки $(x, f(x))$, $x \in (x_1, x_2)$, графика функции лежат строго ниже соответствующей хорды.

Получим еще одно, эквивалентное определение выпуклости, теперь опирающееся на характеристику коэффициента наклона хорд.

Теорема 72 (Критерий выпуклости в терминах наклона хорд).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда для любых $x, x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{\geq}{\leq} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

При этом f строго выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{>}{<} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Доказательство. Продолжим начатые ранее преобразования. Из неравенства

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

получим

$$(x_2 - x_1) f(x) \le (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2).$$

Значит, так как

$$(x_2 - x_1) f(x) = (x_2 - x) f(x) + (x - x_1) f(x),$$

то

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \le (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

откуда, делением на $(x_2 - x)(x - x_1)$, приходим к требуемому.

Доказательство достаточности опирается на те же рассуждения, но проводимые «в обратную сторону». Строгая выпуклость, при этом, дает строгие неравенства, и наоборот. □

Замечание 160.
Доказанная теорема дает еще одну геометрическую трактовку понятию выпуклой функции: выпуклость функции вниз влечет возрастание коэффициента наклона стягивающей хорды, и наоборот.

В итоге хорда, соединяющая точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x, f(x))$ имеет коэффициент наклона (в случае выпуклости вниз) не больше, чем хорда, соединяющая точки $(x, f(x))$ и $(x_2, f(x_2))$ (см. рисунок 11). Это свойство оказывается характеристикой (критерием) выпуклости.

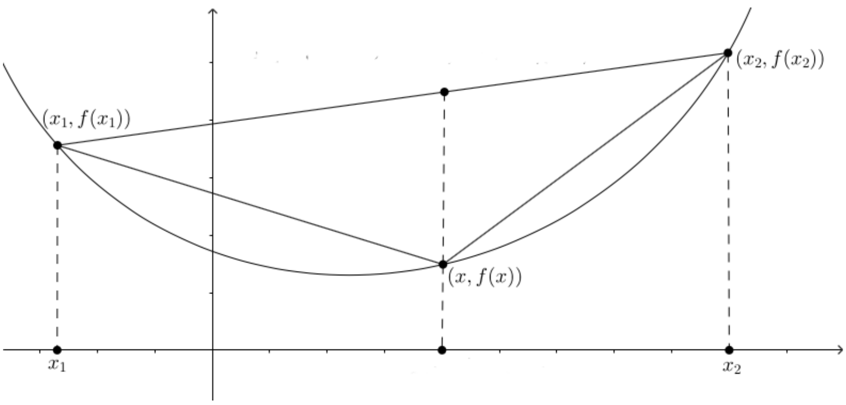

Рис. 11. Выпуклость и возрастание коэффициента наклона хорды

Теперь обсудим дифференциальные условия выпуклости. Они прямиком следуют из только что приведенного замечания.

Теорема 73 (Критерий выпуклости дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда f' возрастает (убывает) на (a, b).

2. f строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда f' строго возрастает (убывает) на (a, b).

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Для этого в неравенстве

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad x, x_1, x_2 \in (a,b), \quad x_1 < x < x_2,$$

перейдем к пределу при $x \to x_1$, получив

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Переходя в том же неравенстве к пределу при $x \to x_2$, получим

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2).$$

В итоге,

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2),$$

откуда и следует возрастание производной. Используя доказанное, для строго выпуклой вниз функции, используя теорему Лагранжа (56), получим

$$f'(x_1) \le f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2) \le f'(x_2)$$

при $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$. Следовательно, строгая выпуклость вниз влечет строгое возрастание производной.

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$, $x_1 < x_2$. Тогда, по теореме Лагранжа (56),

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \quad \xi_1 \in (x_1, x)$$

и

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad \xi_2 \in (x, x_2).$$

Так как f' возрастает на (a,b), то $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, откуда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

и функция f выпукла вниз (теорема 72). Если же f' строго возрастает, то $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, откуда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

и функция f строго выпукла вниз (теорема 72) □

Комбинируя эту теорему и теорему про связь монотонности и производной (68), приходим к следующему факту.

Теорема 74 (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дважды дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ на (a, b) ($f''(x) \leq 0$ на (a, b)).
2. Если $f''(x) > 0$ на (a, b) ($f''(x) < 0$ на (a, b)), то f строго выпукла вниз (вверх).

Оказывается, выпуклость дифференцируемой на $\langle a, b\rangle$ функции можно охарактеризовать в терминах касательных. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 75 (Характеристика выпуклости в терминах касательных).
Пусть f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции f лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть

$$f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle.$$

2. f строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции f, за исключением точки касания, лежат выше (ниже) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть

$$f(x) \underset{<}{>} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Применяя теорему Лагранжа (56), получим

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0),$$

где ξ лежит между x и x_0. Так как f выпукла вниз, то f' возрастает на (a, b) (теорема 73) и знак выражения $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$. Значит,

$$f(x) - g(x) \geq 0, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Если f строго выпукла вниз, то f' строго возрастает на (a, b) (теорема 73), откуда

$$f(x) - g(x) > 0, \quad x \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$

Докажем достаточность. Пусть $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ и

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Тогда при $x < x_0$ выполняется

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'(x_0),$$

а при $x > x_0$ выполняется

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'(x_0).$$

Тем самым, для любого набора точек $x, x_1, x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

и, согласно теореме 72, f выпукла вниз. Легко понять, что строгое неравенство влечет строгую выпуклость, а значит утверждение доказано. □

Дадим определение точке перегиба.

Определение 79 (Понятие точки перегиба).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0-\delta, x_0]$, $[x_0, x_0+\delta)$ функция f имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда x_0 называется точкой перегиба f.

Отметим несколько замечаний.

Замечание 161.
1. Название точки x_0, как и наложенные на нее условия, обусловлены чисто геометрическими соображениями: график функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ «перегибается» через касательную к f в этой точке (возможно – вертикальную).
2. Понятно, что точки перегиба дважды дифференцируемой функции имеет смысл искать там, где существует первая производная, а вторая производная либо равна нулю, либо не существует.
3. Аналогично теореме о первом достаточном условии экстремума (70), можно (для дважды дифференцируемых функций) сформулировать теорему и о достаточном условии точки перегиба. Мы предлагаем читателю самостоятельно придумать и доказать эту теорему.

Наконец, приведем пример.

Пример 54.
Исследовать на выпуклость и найти точки перегиба функции

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Найдем первую и вторую производные данной функции:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Методом интервалов убеждаемся, что на множестве $(-\infty, -1/\sqrt{3}]; [1/\sqrt{3}, +\infty)$ функция выпукла вниз, а на множестве $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ выпукла вверх. Точки $x = \pm 1/\sqrt{3}$ являются точками перегиба.

3 Асимптоты

В этом разделе мы поговорим про асимптоты графика функции. Начнем с определения.

Определение 80 (Понятие асимптоты).
Прямая l называется асимптотой графика функции f, если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой l стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.

Давайте разберемся, а как это «удаление» от начала координат может проходить.

Замечание 162.
Итак, удаление точки $(x, f(x))$ на бесконечность может происходить тремя спо-собоами:

1. Величина x ограничена, а $f(x) \to \pm\infty$.
2. Величина $f(x)$ ограничена, а $x \to \pm\infty$.
3. Одновременно $x \to \pm\infty$ и $f(x) \to \pm\infty$.

В первом случае мы будем говорить о вертикальной асимптоте, во втором – о горизонтальной, а в третьем – о наклонной (если существует).

Начнем с понятия вертикальной асимптоты.

Определение 81 (Понятие вертикальной асимптоты).
Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если выполнено хотя бы одно из (четырех) условий:

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = -\infty$$

Сразу отметим, среди каких точек стоит искать вертикальные асимптоты.

Замечание 163.
Так как функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки (теорема 26), то вертикальные асимптоты имеет смысл искать только в точках разрыва функции f.

Докажем, что введенное понятие вертикальной асимптоты укладывается в общее понятие асимптоты.

Лемма 63.
Вертикальная асимптота является асимптотой.

Доказательство. Пусть, например, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$. Тогда расстояние от точки, лежащей на графике функции, до прямой $x = x_0$ равно $(x - x_0)$. Значит, при $x \to x_0$:

1. Точка $(x, f(x))$ уходит на бесконечность от начала координат.
2. Расстояние от $(x, f(x))$ до прямой $x = x_0$, равное $(x - x_0)$, стремится к нулю.

Тем самым, прямая $x = x_0$ удовлетворяет определению асимптоты. □

Приведем пример.

Пример 55.
График функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как, очевидно,

$$\lim_{x\to\pm 0} = \frac{1}{x} = \pm\infty.$$

График функции $f(x) = 5^{1/x}$ тоже имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как

$$\lim_{x\to 0+0} 5^{1/x} = +\infty.$$

Теперь введем понятие наклонной асимптоты.

Определение 82 (Понятие наклонной асимптоты).
Прямая $g(x) = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

В случае, если $k = 0$, прямая $g(x) = b$ часто называется горизонтальной асимптотой.

Опять-таки отметим следующую лемму.

Лемма 64.
Наклонная асимптота является асимптотой.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

По формуле расстояния от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике функции, до прямой $y - kx - b = 0$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

Тем самым, прямая $y = kx + b$ удовлетворяет определению асимптоты. □

Коэффициенты k и b наклонной асимптоты $g(x) = kx + b$ определяются с помощью следующей теоремы.

Теорема 76 (Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты).
Для того чтобы прямая $g(x) = k_{\pm\infty}x + b_{\pm\infty}$ была асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{\pm\infty},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b_{\pm\infty}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x\to+\infty$. Случай $x\to-\infty$ разбирается аналогичным образом.

Докажем необходимость. Пусть прямая $g(x)=kx+b$ является асимптотой графика функции f при $x\to+\infty$. Тогда выполняется условие

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$$

или соотношение

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$. Обе части последнего равенства разделим на x, тогда

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x\to+\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k.$$

Далее, соотношение $f(x)=kx+b+\alpha(x)$ переписывается в виде $f(x)-kx=b+\alpha(x)$. Переходя к пределу при $x\to+\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

Докажем достаточность. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Тогда второе соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)-b=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0,$$

что по определению означает, что $y=kx+b$ – наклонная асимптота. □

Наличие горизонтальной асимптоты можно установить непосредственно, используя следующее следствие.

Следствие 22.
Для того, чтобы прямая $y=b$ была горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b_{\pm\infty}.$$

Приведем примеры.

Пример 56.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x}$. Из соотношений

$$k_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0,$$

$$k_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty,$$

видно, что график f может иметь асимптоту лишь на $+\infty$. И правда,

$$b_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,$$

а значит прямая $g(x) = 0$ – это асимптота графика функции f при $x \to +\infty$. Других асимптот нет.

Пример 57.
Рассмотрим функцию $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$. Данная функция непрерывна на всем множестве действительных чисел, поэтому у нее нет вертикальных асимптот. Будем искать наклонные. Из соотношений

$$k_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

следует, что у графика f могут существовать асимптоты как на $+\infty$, так и на $-\infty$. Далее,

$$b_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (x + \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$b_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, график функции f имеет две наклонные асимптоты

$$g_{+\infty}(x) = x + \frac{\pi}{2}, \quad g_{-\infty}(x) = x - \frac{\pi}{2}.$$

Из практики кажется понятным, что если функция f имеет асимптоту $g(x)$, скажем, на $+\infty$, и не меняет характер выпуклости при $x > x_0$, то

1. Если f выпукла вниз (строго выпукла вниз) на $(x_0, +\infty)$, то $f(x) \geq g(x)$ при $x > x_0$ ($f(x) > g(x)$ при $x > x_0$).
2. Если f выпукла вверх (строго выпукла вверх) на $(x_0, +\infty)$, то $f(x) \leq g(x)$ при $x > x_0$ ($f(x) < g(x)$ при $x > x_0$).

Итак, при наличии наклонной асимптоты график функции может к ней приближаться лишь «выпуклой частью». Установим это в следующей лемме.

Лемма 65 (Выпуклость и асимптота).
Пусть $f : (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет асимптоту $g(x) = kx + b$ при $x \to +\infty$ и выпукла вниз (строго выпукла вниз) на $(x_0, +\infty)$. Тогда $f(x) \geq g(x)$ при $x > x_0$ ($f(x) > g(x)$ при $x > x_0$).

Доказательство. Докажем, для разнообразия, утверждение для строго выпуклой вниз функции. Если мы покажем, что функция $f(x) - kx$ строго убывает при $x > x_0$, то по теореме Вейерштрасса (22) при $x > x_0$

$$f(x) - kx > \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b \;\Rightarrow\; f(x) > kx + b.$$

Пусть $x_0 < x < y$, рассмотрим

$$F(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Заметим, что

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{y} = k.$$

Покажем, что $F(y)$ строго возрастает. Пусть $y_1 > y$, положим $\lambda = \dfrac{y_1 - y}{y_1 - x}$, тогда $y = \lambda x + (1-\lambda)y_1$ и, пользуясь строгой выпуклостью вниз f, имеем

$$f(y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y_1) \;\Rightarrow\; f(y) - f(x) < (1-\lambda)(f(y_1) - f(x)) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; f(y) - f(x) < \frac{y - x}{y_1 - x}(f(y_1) - f(x)) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x},$$

что и означает требуемое. Значит, снова пользуясь строгим возрастанием и теоремой Вейерштрасса (22), имеем

$$F(y) < k \;\Leftrightarrow\; f(y) - f(x) < k(y - x) \;\Leftrightarrow\; f(y) - ky < f(x) - kx,$$

что завершает доказательство. □

Замечание 164.
Понятно, что аналогичная теорема справедлива и в случае, когда f выпукла вверх. Детали, основанные на обсуждениях перед теоремой, остаются читателю.

4 План исследования функции и построение графика

Для изучения поведения функции и построения ее графика целесообразно придерживаться следующей последовательности действий:

1. Найти область определения функции, охарактеризовать ее точки разрыва. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
2. Отметить такие свойства как четность, нечетность, периодичность.
3. Найти первую производную и промежутки возрастания и убывания функции, а также экстремумы.
4. Найти вторую производную и промежутки выпуклости, а также точки перегиба.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Построить график.

Ясно, что при решении конкретной задачи некоторые пункты могут быть расширены, а некоторые могут быть излишними или вовсе невыполнимыми.

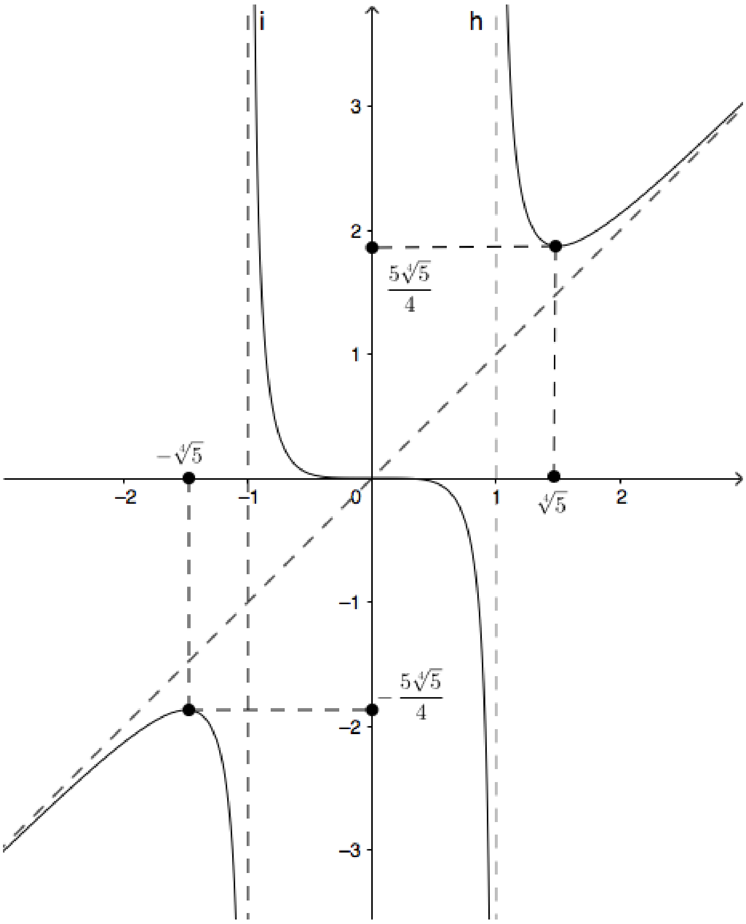

Рис. 12. График функции $f(x) = x^5/(x^4 - 1)$

Пример 58.
Построить график функции
$$f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$
Начнем с области определения. В область определения функции не входят те точки, которые удовлетворяют уравнению $x^4 - 1 = 0$, то есть точки ± 1. Кроме того, если $y = 0$, то $x = 0$, и наоборот, так что $(0,0)$ – единственная точка пересечения графика функции с осями координат.

Функция является нечетной, ведь
$$f(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^4 - 1} = -\frac{x^5}{x^4 - 1} = -f(x).$$
Вычислим первую производную рассматриваемой функции:
$$f'(x) = \frac{x^4(x^4 - 5)}{(x^4 - 1)^2}.$$
Методом интервалов легко получить, что f возрастает при
$$x \in \left(-\infty, -\sqrt[4]{5}\right]; \left[\sqrt[4]{5}, +\infty\right)$$

и убывает при
$$x \in \left[-\sqrt[4]{5}, -1\right); (-1,1); \left(1, \sqrt[4]{5}\right].$$
В точке $x = -\sqrt[4]{5}$ функция имеет строгий локальный максимум, причем $f(-\sqrt[4]{5}) = -\dfrac{5\sqrt[4]{5}}{4}$, а в точке $x = \sqrt[4]{5}$ – строгий локальный минимум, причем $f(\sqrt[4]{5}) = \dfrac{5\sqrt[4]{5}}{4}$.

Вычислим вторую производную рассматриваемой функции:
$$f'' = \frac{x^3(12x^4+20)}{(x^4-1)^3}.$$
Методом интервалов легко получить, что функция выпукла вниз при
$$x \in (-1, 0]; [1, +\infty)$$
и выпукла вверх при
$$x \in (-\infty, -1); [0, 1).$$
Ясно также, что точка $x = 0$ – точка перегиба, причем $y(0) = 0$.

Функция f непрерывна на множестве $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Так как
$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x^5}{x^4-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{x^5}{x^4-1} = +\infty$$
и
$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^5}{x^4-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{x^5}{x^4-1} = +\infty,$$
то можно заключить, что $x = 1$ и $x = -1$ — вертикальные асимптоты. Кроме того, так как
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^4-1} = 1$$
и
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^5}{x^4-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{x^4-1}\right) = 0,$$
то прямая $y = x$ является асимптотой графика функции как на $-\infty$, так и на $+\infty$.

Вся полученная информация теперь используется для построения графика функции, рисунок 12.

Глава 5
Неопределенный интеграл

> Математика — это та часть физики, в которой эксперименты очень дешевы.
>
> *Владимир Арнольд*

Неопределенный интеграл – раздел, идеи которого, на наш взгляд, имеют мало общего с идеями как такового анализа. В то же время этот раздел традиционно включается в курс лекций по математическому анализу, а не в курс лекций по общей алгебре. Скорее всего причин для этого несколько. Это и весьма скорая востребованность в аппарате, связанным с неопределенным интегралом, применительно к (настоящему) интегральному исчислению – одному из важнейших разделов анализа, и тяжесть такого раздела алгебраической науки как теория Галуа (а значит и невозможность изложить ее в первых семестрах), благодаря которой оказывается реальным и правда изучить по истине нетривиальные вопросы, связанные с неопределенным интегралом.

В данной сравнительно небольшой главе мы в основном затронем лишь требуемые нам в дальнейшем вычислительные аспекты, связанные с неопределенным интегралом, а идейные вопросы и вовсе оставим за кадром.

§ 1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла

1 Понятие первообразной

Во время изучения математики мы то и дело занимаемся тем, что изучаем «прямые» и «обратные» операции. Так, научившись складывать числа, в дальнейшем мы учимся их вычитать. Научившись умножать числа – делить. Научившись возводить в степень – извлекать корень, и многое другое. Теперь пришло время ввести операцию, обратную к операции взятия производной – операцию нахождения первообразной, или, что не то же самое, но довольно близко по смыслу, операцию нахождения неопределенного интеграла. Начнем с некоторых определений.

Определение 83 (Понятие первообразной).
Первообразной функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется функция F такая, что

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Итак, первообразная функции f на некотором промежутке – это функция, производная которой на этом промежутке совпадает с f. Обратимся к примерам.

Пример 59.
Функция $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, так как

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Понятно, что предъявленная первообразная не единственна. Так, функции $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5$ или $F_3(x) = \dfrac{x^3}{3} - \pi^e$ также будут первообразными для f при $x \in (-\infty, +\infty)$.

То, что первообразная некоторой функции рассматривается на промежутке – весьма важный момент. Подчеркнем его в следующем примере.

Пример 60.
Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $\dfrac{1}{x}$ как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Можно выдвинуть и такое утверждение: каждая из функций, входящих в семейство

$$\ln|x| + \begin{cases} c_1, & x < 0, \\ c_2, & x > 0 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

является первообразной функции $\dfrac{1}{x}$ на промежутках $x < 0$ и $x > 0$, соответственно. Но, конечно же, не на их объединении.

Как мы видим, первообразная функции, если и существует, то в общем случае не является единственной. Вопрос описания всех первообразных данной функции решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 77 (О множестве всех первообразных).
Пусть F — первообразная функции f на $\langle a, b\rangle$. Для того чтобы Φ также была первообразной функции f на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b\rangle, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\Psi = F - \Phi$, где F и Φ — первообразные для f на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Согласно теореме Лагранжа (56), для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Значит, $\Psi(x) \equiv C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in \langle a, b\rangle$.
Докажем достаточность. Пусть на $\langle a, b\rangle$ выполнено условие $F - \Phi \equiv C$, $C \in \mathbb{R}$. Тогда на этом промежутке $\Phi = F - C$ и, к тому же,

$$\Phi' = F' - C' = F' - 0 = F' = f.$$

Тем самым, Φ является первообразной для функции f на $\langle a, b\rangle$. □

Итак, по сути, любые две первообразные одной и той же функции на одном и том же промежутке отличаются лишь на константу. Доказанная теорема позволяет описать множество всех первообразных данной функции на некотором промежутке, зная конкретную первообразную на этом промежутке. Но как гарантировать существование первообразной? Отметим без доказательства (на данный момент) следующую теорему.

Теорема 78 (Достаточное условие существования первообразной).
Если $f \in C(\langle a, b\rangle)$, то множество первообразных f на $\langle a, b\rangle$ не пусто.

Здесь же нельзя не отметить и следующее замечание.

Замечание 165.
Обсудим важное с точки зрения идеологии отличие двух задач: задачи нахождения производной и задачи нахождения первообразной.

Формулы нахождения производной суммы, произведения, частного, композиции и обратной функции показывают, что при взятии производной от элементарной функции мы, если производная существует, опять-таки попадаем в класс элементарных функций.

В случае решения задачи нахождения первообразной это совсем не так. Можно доказать, например (и здесь и требуется нетривиальный аппарат алгебры), что у всюду непрерывной элементарной функции e^{x^2} не существует первообразной, выражающейся в элементарных функциях, ни на одном промежутке $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Обратите, однако, внимание, что, согласно предыдущей теореме (78), эта функция имеет первообразную даже на всем $\mathbb{R}$.

Сложившаяся ситуация, в целом, не то чтобы должна удивлять. Так, работая лишь в натуральных числах, мы легко можем любые два таких числа сложить, но чтобы ввести операцию вычитания, нам приходится расширить множество натуральных чисел до множества целых чисел. В множестве целых чисел мы «ловко» умеем умножать. Но, например, чтобы ввести операцию деления, нам приходится переходить к так называемым рациональным числам, и так далее.

Предыдущее замечание, однако, не отвечает на вопрос о том, всегда ли существует первообразная у произвольной функции на произвольном промежутке ее области определения. Для любопытствующих читателей приведем пример, отвечающий на этот вопрос отрицательно.

Пример 61.
Функция
$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$
не имеет первообразной на промежутке $[0, 1]$. Действительно, если F – первообразная на $[0, 1]$, то F дифференцируема на $[0, 1]$ и по теореме Лагранжа (56) для $\Delta x \in (0, 1)$
$$F(\Delta x) - F(0) = F'(\xi)\Delta x = \Delta x, \quad \xi \in (0, \Delta x).$$
Но тогда $F'_+(0) = 1$, что противоречит тому, что $\operatorname{sign}(0) = 0$.

Понятно, что аналогичным образом можно показать, что рассматриваемая функция не имеет первообразной ни на каком промежутке, содержащем точку 0.

(2) Понятие неопределенного интеграла

Теперь введем, в общем-то, напрашивающееся понятие неопределенного интеграла.

Определение 84 (Понятие неопределенного интеграла).
Неопределённым интегралом функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется множество всех первообразных f на этом промежутке.

Неопределенный интеграл обозначается следующим образом:
$$\int f\, dx,$$
где

$\int$ — знак неопределенного интеграла,
f — подынтегральная функция,
$f\, dx$ — подынтегральное выражение,
x — переменная интегрирования.

Отметим теперь очевидное замечание, которое следует сразу из уже разработанной нами теории.

Замечание 166.
Если F — какая-либо первообразная функции f на $\langle a, b\rangle$, то неопределенный

интеграл функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$ равен

$$\int f\ dx = F + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для краткости информацию о том, что рассматривается промежуток $\langle a, b\rangle$, часто опускают. Например, вместо

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

пишут

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

подразумевая, что C — кусочно-постоянная функция.

Хоть и несколько преждевременно, отметим и следующий чрезвычайно важный для практики момент.

Замечание 167.
Если запись dx под интегралом трактовать как дифференциал, то обсуждаемые в одном из следующих параграфов формулы интегрирования по частям и замены переменной становятся намного более наглядными и «механическими» для запоминания.

§ 2. Таблица неопределенных интегралов

В этом разделе мы приведем таблицу неопределенных интегралов, которая достаточно часто используется на практике.

Теорема 79.
Справедливы следующие равенства:

$\int 0\ dx = C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\ dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2\pm a^2}\rvert + C$

где в последних двух строчках таблицы считается, что $a \neq 0$, а все написанные соотношения рассматриваются на области определения подынтегральной функции.

Доказательство. Понятно, что все приведенные равенства доказываются формальным дифференцированием правой части и приведением результата к подынтегральной функции. Для примера, докажем следующее равенство:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Для доказательства достаточно показать, что производная правой части (точнее – любой фиксированной функции из множества) равна подынтегральной функции. Действительно,

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

откуда и следует написанное. □

Отметим следующее важное замечание.

Замечание 168.
Не нагружая формулировку предыдущей теоремы, отдельно отметим, что если область определения подынтегральной функции состоит из нескольких промежутков, то произвольные постоянные в правой части, вообще говоря, кусочно-постоянны.

Отметим и такое «жаргонное», но имеющее место замечание.

Замечание 169.
Соотношения в последней строчке приведенной в теореме таблицы часто называют «высоким» и «длинным» логарифмами, соответственно.

§ 3. Свойства неопределенного интеграла

В этом разделе мы обсудим основные свойства неопределенного интеграла. Все эти свойства являются чисто алгебраическими (по своей сути) и следуют из соответствующих свойств производной.

1 Связь интеграла и производной

Итак, раз мы сказали, что нахождение первообразной и нахождение производной — в некотором смысле обратные друг другу действия, то договоримся и о действиях, связывающих неопределенный интеграл и производную. Будем считать, что справедливы следующие соотношения (на множествах, где определены соответствующие неопределенные интегралы):

$$\left(\int f\ dx\right)' = f, \quad d\left(\int f\ dx\right) = f\ dx.$$

Конечно, эти соотношения нельзя оставить без каких-либо дополнительных пояснений.

> **Замечание 170.**
> Важно отметить, что в каждом из написанных соотношений (слева) соответствующая операция производится над множеством
>
> $$I = \int f\ dx.$$
>
> По сути, написанные соотношения и определяют эту операцию, ведь ранее мы нигде не вычисляли ни производную, ни дифференциал от множества. Мотивировкой такого определения можно считать то, что любой элемент множества I под действием соответствующей операции переходит ровно в один элемент.

Договоримся еще и о следующем. Если $F'(x) = f(x)$ при $x \in \langle a, b\rangle$, то, трактуя dx как дифференциал (чисто механически), будем считать, что

$$\int dF = F + C.$$

> **Замечание 171.**
> Мотивировка этого соотношения понятна: если dx – это дифференциал, то, согласно предположению, $dF = f(x)dx$, а тогда, по определению неопределенного интеграла,
>
> $$\int f(x)\ dx = F(x) + C.$$
>
> Справедливость указанной договоренности будет понятна после изучения формулы замены переменной в неопределенном интеграле.

② Линейность неопределенного интеграла

Так как свойство линейности присуще производным, то оно переносится и на неопределенный интеграл.

Теорема 80 (О линейности неопределенного интеграла).
Пусть на $\langle a, b\rangle$ существуют первообразные функций f и g. Тогда:

1. На $\langle a, b\rangle$ существует первообразная функции $f+g$, причем
$$\int (f+g)\ dx = \int f\ dx + \int g\ dx.$$
2. На $\langle a, b\rangle$ существует первообразная функции αf, $\alpha \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha \neq 0$
$$\int \alpha f\ dx = \alpha \int f\ dx.$$
3. На $\langle a, b\rangle$ существует первообразная функции $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$
$$\int (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int f\ dx + \beta \int g\ dx.$$

Последнее свойство часто (правда, не вполне законно) называют свойством линейности неопределенного интеграла. Прежде чем переходить к доказательству сформулированной теоремы, неплохо бы понять, а что в ней утверждается.

Замечание 172.
Давайте определимся с тем как нам следует понимать равенство
$$\int (f+g)\ dx = \int f\ dx + \int g\ dx.$$
Конкретнее, что же означает сумма множеств, записанная справа? Мы будем под этой записью понимать множество сумм всевозожных элементов соответствующих множеств, то есть
$$\int f\ dx + \int g\ dx = \{F + C_1 + G + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\},$$
где F — первообразная f, а G — первообразная g. Естественно, мы считаем, что рассматривается некоторый промежуток $\langle a, b\rangle$, на котором определены соответствующие неопределенные интегралы или, что то же самое, первообразные.

Аналогичным образом и при аналогичных предположениях имеет смысл понимать правую часть равенства
$$\int \alpha f\ dx = \alpha \int f\ dx.$$
Конкретнее, множество справа — это множество, составленное из всевозможных произведений числа α на элементы множества, которые даются неопределенным

интегралом от f, а именно:

$$\alpha \int f\ dx = \{\alpha F + \alpha C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Теперь перейдем к доказательству приведенной выше теоремы (80).

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Понятно, что по свойству производной суммы, $F + G$ — первообразная $f + g$. Значит, достаточно проверить равенство

$$\{F + G + C,\ C \in \mathbb{R}\} = \{F + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть $H \in \{F + G + C,\ C \in \mathbb{R}\}$, тогда

$$H = F + G + C = (F + 0) + (G + C),$$

а значит $H \in \{F + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}\}$ при $C_1 = 0, C_2 = C$.

Наоборот, пусть $H \in \{F + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}\}$, то есть

$$H = F + C_1 + G + C_2 = F + G + (C_1 + C_2).$$

Тогда и $H \in \{F + G + C,\ C \in \mathbb{R}\}$ при $C = C_1 + C_2$. Тем самым, равенство множеств установлено.

2. Докажем второй пункт. Понятно, что по свойству производной, αF — первообразная для αf. Значит, достаточно показать, что при $\alpha \neq 0$ верно равенство

$$\{\alpha F + C,\ C \in \mathbb{R}\} = \{\alpha F + \alpha C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Если $H \in \{\alpha F + C,\ C \in \mathbb{R}\}$, то

$$H = \alpha F + C = \alpha F + \alpha \cdot \frac{C}{\alpha},$$

откуда $H \in \{\alpha F + \alpha C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\}$ при $C_1 = \dfrac{C}{\alpha}$.

Обратное включение доказывается похожим образом и остается в качестве упражнения.

3. Доказательство третьего пункта немедленно следует из утверждений 1-ого и 2-ого пунктов. □

Прежде чем привести примеры использования доказанной теоремы, сформулируем важное для практики следствие.

Следствие 23.
Пусть на $\langle a, b\rangle$ существуют первообразные функций f и g, причем F — первообразная для f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

$$\int f\ dx + \int g\ dx = F + \int g\ dx.$$

По своей сути сформулированное следствие означает следующее: при вычислении неопределенного интеграла произвольную постоянную можно добавлять лишь в самом конце, при вычислении последнего интеграла. Теперь мы готовы привести некоторые примеры. Например, такой.

Пример 62.
Вычислить интеграл
$$\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x^2}+5}{x}\,dx.$$
По свойству линейности,
$$\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x^2}+5}{x}\,dx = \int x\,dx + \int x^{-1/3}\,dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^{2/3} + 5\ln|x| + C.$$

Остановимся и еще на одном примере.

Пример 63.
Вычислить интеграл
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$
Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Перейдем к изучению других свойств интегралов, конечно, тоже связанных со свойствами производной.

(3) Формула замены переменной

В этом пункте мы изучим мощный аппарат, применяемый при вычислении неопределенных интегралов — формулу замены переменной. По сути — это применение формулы производной сложной функции, но в обратную сторону. Сразу сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 81 (Формула замены переменной).
Пусть f имеет первообразную на $\langle a,b\rangle$, $\varphi : \langle \alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$, φ дифференцируема на $\langle \alpha,\beta\rangle$. Тогда
$$\int f\,dx = \int f(\varphi)\varphi'\,dt.$$

Доказательство. Пусть F — первообразная для функции f на $\langle a,b\rangle$. Тогда, согласно теореме о производной композиции (50), $F(\varphi)$ — первообразная для функции $f(\varphi)\varphi'$ на $\langle \alpha,\beta\rangle$, откуда
$$\int f\,dx = F + C = F(\varphi) + C = \int f(\varphi)\varphi'\,dt.$$
□

Отметим и такое замечание.

Замечание 173.
Сейчас снова уместно вспомнить, что dx под неопределенным интегралом удобно трактовать как дифференциал. Если это принять, то формула замены переменной становится просто-напросто «механической»: если $x = \varphi(t)$, то $f(x) = f(\varphi(t))$ и $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\ dt$.

Приведем сразу несколько примеров.

Пример 64.
Вычислить интеграл
$$\int xe^{x^2}\ dx.$$
Пусть $x^2 = t$, тогда $d(x^2) = dt$ или $2xdx = dt$, а значит
$$\int xe^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int e^t\ dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Вычисление этого интеграла можно оформить и несколько иначе.

Пример 65.
Вычислить интеграл
$$\int xe^{x^2}\ dx.$$
Трактуя dx как дифференциал, получим
$$\int xe^{x^2}\ dx = \int e^{x^2}\ d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\ dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$
Такой прием на практике часто называют занесением под знак дифференциала.

Понятно, что на самом деле, мы просто-напросто применили формулу замены переменной, но оформили решение задачи несколько иначе, и даже короче.

4 Формула интегрирования по частям

Ранее мы изучили свойства интеграла, следующие из свойств производной суммы и производной композиции. Теперь же обсудим формулу, которая, в некотором смысле, следует из формулы производной произведения. Сформулируем ее в общепринятом виде, используя в качестве обозначения функций не буквы f и g, а буквы u и v.

Теорема 82 (Формула интегрирования по частям).
Пусть u и v дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$, и пусть на $\langle a, b\rangle$ существует первообразная от vu'. Тогда
$$\int uv'\ dx = uv - \int vu'\ dx$$
или
$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

Доказательство. Согласно формуле производной произведения,

$$(uv)' = u'v + uv',$$

откуда

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

Беря интегралы от обеих частей и пользуясь следствием (23), приходим к формуле

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx.$$

□

Формула интегрирования по частям часто помогает проинтегрировать произведение так называемых трансцендентных функций, то есть функций разной природы. Лучше могут об этом сказать (или это показать) только примеры.

Пример 66.
Вычислить интеграл

$$\int x\sin x\,dx.$$

Пусть $u = x$, тогда $du = dx$, $dv = \sin x\,dx$ и $v = -\cos x$. Значит,

$$\int x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x\,dx \\ v = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Приведем и еще один пример.

Пример 67.
Вычислить интеграл

$$\int e^x \sin x\,dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \sin x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x\,dx \\ dv = \sin x\,dx \\ v = -\cos x \end{array}\right| = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Еще раз проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \cos x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \\ v = \sin x \end{array}\right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

В итоге,

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx,$$

откуда
$$\int e^x \sin x\ dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Интегралы такого типа, как мы рассмотрели выше, часто называются самосводящимися. Конечно, мы рассмотрели лишь некоторые типы интегралов или, что то же самое, некоторые приемы интегрирования. Бездонное количество различных приемов остается к отработке на практике. Мы же отметим следующее замечание.

Замечание 174.

Рассмотрев примеры, полезно ответить себе на следующие вопросы:

1. Почему при нахождении v в обоих примерах в качестве произвольной постоянной взята $C = 0$? Всегда ли так можно сделать?
2. Откуда взялась произвольная постоянная C в последнем примере, ведь при решении уравнения на интеграл ее нигде не было.

Успешно ответив на заданные вопросы, разрешите ($x > 0$) следующий «парадокс», «доказывающий», что $0 = 1$:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{c} u = 1/\ln x \\ du = -1/(x \ln^2 x)\ dx \\ dv = 1/x\ dx \\ v = \ln x \end{array} \right| = 1 + \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

Сокращая на интегралы, получаем требуемое.

§ 4. Интегрирование рациональных дробей

В этом разделе мы научимся интегрировать важный класс функций – рациональные дроби.

① Некоторые сведения из теории многочленов

На практике часто оказывается необходимым интегрировать так называемые рациональные дроби. Причиной этого, в частности, является то, что многие замены переменной под интегралом приводят исходную функцию к рациональной. Если мы научимся находить первообразные рациональных дробей, как говорят, в «замкнутом» виде, в виде элементарной функции, то мы научимся представлять в виде элементарной функции и первообразные многих других функций. Как обычно, сначала договоримся об обозначениях.

Определение 85 (Понятие многочлена).
Многочленом (полиномом) $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ будем называть функцию вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ i \in \{1, 2,\ \ldots, n\}.$$

Многочленом нулевой степени назовем произвольную константу, отличную от нуля. У тождественно равного нулю многочлена степенью будем называть символ $-\infty$.

Теперь введем определение так называемой рациональной функции или, что то же самое, рациональной дроби.

Определение 86 (Понятие рациональной дроби).
Рациональной дробью называется функция вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m, соответственно.

По аналогии с известным из теории рациональных чисел определением, введем следующее понятие.

Определение 87 (Понятие правильной рациональной дроби).
Рациональная дробь

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

называется правильной, если $n < m$, иначе дробь называется неправильной.

Конечно, если дробь оказывается неправильной, то, выделив целую часть, можно перейти к правильной дроби. Например, справедлива следующая лемма, которую мы оставим без доказательства, отправив читателя к курсу алгебры или посоветовав доказать ее самостоятельно, например, применив деление «уголком».

Лемма 66 (О делении многочленов с остатком).
Пусть
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$
– неправильная дробь. Тогда существует единственное представление этой дроби в виде
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$
где $R_{n-m}(x)$ – многочлен степени $(n-m)$, $T_k(x)$ — многочлен степени k и $k < m$.

В теории многочленов доказывается следующая теорема.

Теорема 83 (О разложении многочлена над $\mathbb{R}$).
Пусть $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, коэффициент при старшей степени которого равен единице. Тогда справедливо разложение
$$P_n(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_p)^{k_p} \cdot$$
$$\cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_mx+q_m)^{l_m},$$
где при $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$
$$a_i \in \mathbb{R}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad l_j \in \mathbb{N}, \quad p_j^2 - 4q_j < 0, \; k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2(l_1 + \ldots + l_m) = n.$$

Понятно, что числа $a_1, ..., a_p$ — это корни многочлена $P_n(x)$ кратностей $k_1, ..., k_p$, соответственно, а квадратные трехчлены $x^2 + p_jx + q_j$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$, вещественных корней не имеют. Последнее отметим в виде отдельного замечания.

Замечание 175.
Условия $p_j^2 - 4q_j < 0$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$, означают, что квадратные трехчлены $x^2 + p_jx + q_j$ не имеют вещественных корней.

Отдельно отметим, что каждый из этих квадратных трехчленов в этом случае имеет два комплексно-сопряженных корня $\alpha_j \pm i\beta_j$.

Теперь мы готовы применить описанный аппарат для решения сформулированной в самом начале данного параграфа задачи.

2 Разложение дроби на простейшие

В этом пункте мы обсудим способ разложения произвольной рациональной дроби на так называемые простейшие слагаемые. Начнем с определения последних.

Определение 88 (Понятие простейших дробей).
Простейшими дробями (дробями первого и второго типов) называют дроби вида
$$\frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$
где $k \in \mathbb{N}$ и $p^2 - 4q < 0$.

Оказывается, любая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму простейших. Этой теореме предпошлем две леммы.

Лемма 67 (О дробях первого типа).
Пусть
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$
– правильная рациональная дробь и
$$Q_m(x) = (x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{Q}(a) \neq 0, \quad \widetilde{Q} \ \text{ – многочлен.}$$
Существуют число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $\widetilde{P}(x)$, такие что
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$
причем написанное представление единственно.

Доказательство. Докажем существование заявленного разложения. Для этого рассмотрим разность
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)}$$
и выберем число A так, чтобы число a было корнем числителя, то есть чтобы выполнялось равенство
$$P_n(a) - A \cdot \widetilde{Q}(a) = 0.$$
Тогда, очевидно,
$$A = \frac{P_n(a)}{\widetilde{Q}(a)},$$
причем деление на $\widetilde{Q}(a)$ возможно, так как, по условию, $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.

При найденном A в числителе стоит многочлен с корнем a, значит, согласно теореме 83, его можно представить в виде
$$P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x) = (x-a)\widetilde{P}(x),$$
а тогда
$$\frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{(x-a) \cdot \widetilde{P}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$
Тем самым, существование разложения доказано.

Докажем единственность такого разложения. От противного, пусть существует два разложения
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$
Домножив на $(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, приходим к равенству
$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_1(x) \cdot (x-a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_2(x) \cdot (x-a),$$

верному при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x = a$, тогда это равенство превращается в

$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(a),$$

и, так как, $\widetilde{Q}(a) \neq 0$ то $A_1 = A_2$. Но тогда коэффициенты многочлена $\widetilde{P} = P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно (лемма 66). Противоречие. □

В целом, наверное, достаточно несложно сформулировать и вторую лемму.

Лемма 68 (О дробях второго типа).
Пусть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

– правильная рациональная дробь и

$$Q_m(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot \widetilde{Q}(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{Q}(\alpha \pm i\beta) \neq 0, \quad \widetilde{Q} \ - \ \text{многочлен},$$

$p^2 - 4q < 0$, а $\alpha \pm i\beta$ — комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$. Существуют числа $A, B \in \mathbb{R}$ и многочлен $\widetilde{P}(x)$ такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Докажем существование заявленного разложения. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{P_n(x) - (Ax + B) \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot \widetilde{Q}(x)}$$

Выберем числа A и B так, чтобы число $\alpha + i\beta$ было корнем числителя, то есть чтобы

$$P_n(\alpha + i\beta) - (A(\alpha + i\beta) + B) \cdot \widetilde{Q}(\alpha + i\beta) = 0.$$

Последнее равенство переписывается в виде

$$A\alpha + B + i(A\beta) = \frac{P_n(\alpha + i\beta)}{\widetilde{Q}(\alpha + i\beta)} =: R$$

По определению равенства комплексных чисел,

$$\begin{cases} A\alpha + B = \operatorname{Re}(R) \\ A\beta = \operatorname{Im}(R) \end{cases}.$$

Так как $\beta \neq 0$, то параметры A и B определяются из системы единственным образом:

$$A = \frac{\operatorname{Im}(R)}{\beta}, \quad B = -\frac{\alpha \operatorname{Im}(R)}{\beta} + \operatorname{Re}(R).$$

Если $\alpha + i\beta$ – корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\alpha - \beta i$ – тоже его корень, значит, при найденных A и B, числитель может (теорема 83) быть представлен в виде

$$P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x) = (x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x),$$

а тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{(x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot\widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\cdot\widetilde{Q}(x)}.$$

Тем самым, существование разложения доказано.

Доказательство единственности разложения аналогично доказательству единственности в предыдущей лемме и остается в качестве упражнения. □

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему.

Теорема 84 (О разложении дроби на простейшие).
Пусть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

– рациональная дробь, причем

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_p)^{k_p}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{l_m},$$

где при $i\in\{1,2,...,p\}$, $j\in\{1,2,...,m\}$

$$a_i\in\mathbb{R},\quad k_i\in\mathbb{N},\quad l_j\in\mathbb{N},\quad p_j^2-4q_j<0.$$

Тогда существует единственное разложение вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^{k_i-j+1}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^{l_i-j+1}},$$

где все коэффициенты в числителе дробей справа – вещественные числа.

Доказательство. Пусть $n>m$, тогда по лемме о делении с остатком (66), ее можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},\quad k<m.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда исходная рациональная дробь является правильной и не сократимой.

По лемме о дробях первого типа (67), рассматриваемую дробь можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\cdot\widetilde{Q}^{(1)}(x)},$$

где

$$\widetilde{Q}^{(1)}(x) = (x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_p)^{k_p}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}.$$

Далее, по той же самой лемме, можно найти число A_{12} и многочлен $\widetilde{P}^{(12)}(x)$ такие,

что
$$\frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)}=\frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\frac{\widetilde{P}^{(12)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2}\cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$
Продолжая аналогичные рассуждения, получим
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)}+\frac{\widetilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности k_i, $i\in\{1,2,...,p\}$, получим
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^{k_i-j+1}}+\frac{\widetilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\widetilde{Q}^{(p)}(x)},$$
где
$$\widetilde{Q}^{(p)}(x)=(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}$$
и дробь
$$\frac{\widetilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\widetilde{Q}^{(p)}(x)}$$
– правильная.

Далее воспользуемся леммой о дробях второго типа (68), получим
$$\frac{\widetilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\widetilde{Q}^{(p)}(x)}=\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{\widehat{P}^{(11)}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\cdot\widehat{Q}^{(1)}(x)},$$
где
$$\widehat{Q}^{(1)}(x)=(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}.$$
Продолжая рассуждения таким же образом, как выше, только с использованием леммы о дробях второго типа, придем к разложению
$$\frac{\widetilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\widetilde{Q}^{(p)}(x)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^{l_i-j+1}}.$$

Итого, теорема доказана. □

3 Интегрирование простейших дробей

В данном пункте мы в общем виде покажем способ вычисления интеграла от простейших рациональных дробей. Так как на практике финальные формулы проще получать каждый раз заново, мы не будем формулировать результаты в виде каких-то замкнутых теорем, отдавая предпочтению рассказу и идеям, в нем фигурирующим.

Интегрирование дробей первого типа

Для начала рассмотрим вычисление интеграла
$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx,\quad k\geq 1.$$

При $k = 1$ имеем

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

При $k > 1$ имеем

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Интегрирование дробей второго типа

Рассмотрим вычисление интеграла

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx, \quad k \geq 1, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Сначала выделим полный квадрат в знаменателе, получим:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}.$$

Так как

$$\frac{4q-p^2}{4} > 0,$$

то его можно обозначить через a^2. Кроме того, положим $t = x + \dfrac{p}{2}$, тогда $dt = dx$ и

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{(t^2+a^2)^k}dt = \int \frac{At + (B - \frac{Ap}{2})}{(t^2+a^2)^k}dt =$$

$$= A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Вычислим первый из двух интегралов:

$$A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{A}{2}\begin{cases} \ln(t^2+a^2) + C, & k = 1 \\ \dfrac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}, & k > 1 \end{cases}.$$

Теперь рассмотрим второй интеграл (опустив постоянный множитель), обозначив его I_k:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Ясно, что

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Если теперь $k > 1$, то

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt.$$

Последний интеграл вычислим, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt = \left| \begin{gathered} u = t \\ du = dt \\ dv = \frac{t\ dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} \\ v = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{gathered} \right| =$$

$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Тем самым,

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}\left(1+\frac{1}{2(1-k)}\right) - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, выражающая I_k через I_{k-1}. Так как I_1 известен, то схема вычисления интеграла полностью изложена.

Выражение интеграла от рациональной функции в элементарных функциях

Итак, резюмируя все полученное в предыдущих пунктах, мы приходим к следующему важному следствию.

Следствие 24.
Интеграл от рациональной дроби может быть выражен в элементарных функциях.

Глава 6
Интеграл Римана

> Разве ты не заметил, что способный к математике изощрен во всех науках в природе?
>
> *Платон*

Есть достаточно много способов определить интеграл от, подчеркиваем, непрерывной функции по отрезку $[a, b]$. Самый наглядный способ – это, наверное, аппелировать к площади под графиком функции. Для формализации такого определения, однако, требуется развивать такой абстрактный аппарат как теория площади (например, Жордана), что весьма кропотливо и трудоемко.

Второй подход, которым мы и будем пользоваться, несколько модифицирует описанный ранее способ, и предлагает приближать площадь под графиком функции площадью некоторой ступенчатой фигуры. Так возникают интегральные суммы Римана и, как итог, интеграл Римана.

Еще один способ – аксиоматический, состоит в том, чтобы постулировать через аксиомы некоторые естественные для нас свойства площади. При таком подходе само существование интеграла как объекта, задаваемого аксиомами, остается недоказанным.

Бывает, что используют и аналитический подход, называемый подходом Ньютона–Лейбница, когда за интеграл от функции по отрезку принимают разность значений первообразной данной функции на концах этого отрезка. Такой подход упрощат многие доказательства, но, на наш взгляд, сильно теряет в приложениях к геометрическим аспектам.

В любом случае, все описанные подходы связывает одно – так называемая основная формула интегрального исчисления – формула Ньютона–Лейбница, изучением которой мы, в общем-то, и закончим изучение теории интеграла Римана.

§ 1. Понятие интеграла Римана

В этом разделе мы введем понятие определенного интеграла Римана, придя к нему, как нам кажется, естественным образом — от решения конкретной прикладной задачи — задачи вычисления площади под графиком некоторой функции.

(1) Наводящие соображения

Рассмотрим задачу вычисления площади под графиком функции $y = x^2$ на отрезке $[0, 1]$. Будем пользоваться нашим «интуитивным» представлением о площади, ведь никакого строгого определения ни в школе, ни ранее введено не было.

Поступим следующим образом. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками

$$0 = \frac{0}{n},\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n} = 1$$

и будем приближать площадь под графиком функции над каждым из получившихся отрезков (отрезков разбиения) площадью, которую мы умеем вычислять, – площадью прямоугольника. Все бы ничего, но невольно встает вопрос: как выбрать высоты этих прямоугольников?

Кажется вполне логичным, что чем меньше длина каждого из отрезков разбиения, тем меньше меняется значение функции на этом отрезке. Значит, если мы устремим $n \to \infty$ и, тем самым, будем дробить наш отрезок на бесконечное число отрезков сколь угодно малой длины, то нам будет совершенно не важно, какое значение функции на каждом из отрезков считать высотой аппроксимирующего прямоугольника, а значит мы сможем выбирать то значение, которое нам удобно.

Выберем в качестве высот прямоугольников те значения, которые принимаются на правых концах каждого из отрезков разбиения, то есть значения, принимаемые в точках

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i \in \{1, 2,\ \ldots, n\}.$$

Значения эти равны

$$y(x_i) = \frac{i^2}{n^2}, \quad i \in \{1, 2,\ \ldots, n\}.$$

Значит, площадь над отрезком разбиения

$$\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right],\ i \in \{1, 2,\ \ldots, n\},$$

приближается площадью прямоугольника, равной

$$\frac{y(x_i)}{n} = \frac{i^2}{n^3}, \quad i \in \{1, 2,\ \ldots, n\}.$$

Итого, вся площадь под графиком функции приближается площадью ступенчатой фигуры, равной

$$\widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{y(x_i)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Устремляя n к бесконечности, приходим к тому, что наш способ приближения дает значение, равное

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Замечание 176.
Обратим внимание на следующие моменты.

Во-первых, при моделировании выше мы использовали так называемое «равномерное» разбиение (разбиение на отрезки равной длины) отрезка $[0,1]$. А что, если разбивать отрезок как-то иначе, не изменится ли результат?

Во-вторых, на каждом отрезке разбиения мы выбрали вполне конкретные точки, значения функции в которых считали значениями высоты аппроксимирующих прямоугольников. Что будет, если точки брать по какому-то другому правилу? Опять же, будет ли результат тем же самым?

На данный момент мы не можем ответить на эти вопросы лаконично, но интуиция подсказывает, что результат должен быть одним и тем же. Если это не так, то придется «грешить» на функцию. Что значит «не так» и что значит «грешить» – об этом и будет рассказывать развиваемая в этой главе теория.

(2) Определение интеграла Римана

Давайте теперь строго и, скажем так, по пунктам введем понятие интеграла Римана. Мы будем придерживаться ровно той схемы и той последовательности, что мы провели при моделировании конкретной задачи выше, разве что теперь мы будем действовать более абстрактно и, в некотором смысле, «общо». Итак, начнем с первого шага – с понятия разбиения.

Определение 89 (Понятие разбиения).
Говорят, что на отрезке $[a,b]$ введено разбиение (дробление) τ, если введена система точек x_i, $i \in \{0, 1, \ \ldots, n\}$, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots < x_n = b.$$

Итак, разбиение – это набор точек, делящих наш отрезок на более маленькие отрезки, которые попарно не имеют общих внутренних точек.

Замечание 177.
Еще раз обратим внимание на то, что «равномерное» разбиение, используемое нами при построении примера в начале данного пункта, является лишь весьма частным случаем только что введенного понятия.

Отметим замечание, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Замечание 178.
Обычно как для отрезка разбиения, так и для его длины, вводят следующие обозначения:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, \ x_i], \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Из приведенного нами примера, да и из здравого смысла, понятно, что чем меньшими по длине оказываются отрезки, получающиеся в результате разбиения, тем как будто бы точнее оказывается наше «приближение». Введем величину, контролирующую «величину» разбиения – мелкость или ранг разбиения.

Определение 90 (Понятие мелокости (ранга) разбиения).
Величина
$$\lambda(\tau) = \max_{i \in \{1,2,\ \dots, n\}} \Delta x_i$$
называется мелкостью (рангом, диаметром) разбиения (дробления).

Итак, ранг разбиения численно равен длине наибольшего отрезка, получившегося в результате разбиения. Теперь «оснастим» наше разбиение, или, что то же самое, выберем точки, в которых будем вычислять «высоту» прямоугольника, площадь которого (в случае, когда $f \geq 0$) приближает «площадь» под графиком исследуемой функции.

Определение 91 (Понятие оснащенного разбиения).
Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (оснащенное разбиение) (τ, ξ), если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ таким образом, что $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Введя понятие оснащенного разбиения, по аналогии с примером, мы готовы ввести понятие «приблизительной» площади – площади ступенчатой фигуры, приближающей площадь под графиком $f \geq 0$, или, как ее называют, интегральной суммы.

Определение 92 (Понятие интегральной суммы).
Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и введено разбиение (τ, ξ). Величина
$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
называется интегральной суммой для функции f на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ).

Теперь мы готовы дать определение понятию интеграла Римана.

Определение 93 (Понятие интеграла Римана).
Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$, если
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ \forall (\tau, \xi) :\ \lambda(\tau) < \delta\ \ |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$
Обозначают это число так:
$$I = \int\limits_a^b f\ dx.$$

Мы видим, что в обозначении интеграла символ dx можно трактовать как дифференциал, но, в некотором смысле, как дифференциал «в пределе». Это замечание лишь поясняет мотивацию введенного обозначения, как и механическое его удобство при использовании формул замены переменной, интегрирования по частям, Ньютона–Лейбница. О них подробнее мы узнаем несколько позже. Сейчас же отметим следующие важные замечания.

Замечание 179.
Интеграл Римана часто называют пределом интегральных сумм. Тем самым, проще, но с некоторыми оговорками, последнее определение можно переписать в следующем виде:
$$I = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_\tau(f, \xi).$$

К озвученному замечанию нужно подходить с достаточной степенью осторожности. Сформулировав его, хочется сразу перенести на новое понятие все свойства, тщательно изученные при рассмотрении пределов функций. Однако, не все так просто.

Замечание 180.
Понятие предела интегральных сумм, вообще говоря, не является частным случаем понятия предела функции, так как интегральная сумма является функцией разбиения и оснащения, а не его мелкости. Однако, предел такого типа можно свести (и мы сведем уже в следующем пункте) к пределу последовательности. В дальнейшем мы часто будем писать $\lambda(\tau) \to 0$, оставляя детальную расшифровку читателю.

Добавим еще несколько удобных для дальнейшего определений.

Определение 94 (Понятие интегрируемой функции).
Функция f, для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a, b]$, называется интегрируемой по Риману на этом отрезке (или просто интегрируемой).

Класс интегрируемых (по Риману) на отрезке $[a, b]$ функций будем обозначать так: $R[a, b]$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 68.
Покажем, что постоянная функция $f = C$ интегрируема по любому отрезку $[a, b]$, причем
$$\int\limits_a^b C\ dx = C(b - a).$$
Действительно, вводя произвольное разбиение (τ, ξ) отрезка $[a, b]$,
$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b - a),$$
откуда и следует требуемое.

Оказывается, не всякая функция, заданная на отрезке $[a, b]$, является интегрируемой на этом отрезке.

Пример 69.

Покажем, что функция Дирихле

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Пусть, для простоты, рассматривается отрезок $[0,1]$ и пусть τ — разбиение этого отрезка.

Выберем в каждом отрезке разбиения Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d,\xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

Теперь выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{I}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d,\xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Тем самым, при стремлении $\lambda(\tau) \to 0$ предел зависит от выбора точек ξ, что противоречит определению интеграла.

Рассмотрение произвольного отрезка $[a,b]$ проводится аналогичным образом.

Для дальнейшего изложения удобно немного расширить понятие интеграла Римана, определив его не только при $a < b$.

Определение 95.
По определению полагают

$$\int\limits_a^a f\,dx = 0, \qquad \int\limits_b^a f\,dx = -\int\limits_a^b f\,dx, \qquad a < b.$$

Введенное определение, в целом, легко мотивируется и геометрическими соображениями. Подумайте над ними самостоятельно.

3 Определение интеграла через последовательности

Итак, сформулируем и докажем теорему, связывающую предел интегральных сумм и предел последовательности интегральных сумм. Доказательство теоремы проводится так же, как и доказательство теоремы об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне (17), но ввиду важности этой теоремы в дальнейшем, мы проведем это доказательство еще раз.

Теорема 85 (Определение интеграла через последовательности).
Пусть f задана на $[a,b]$. Тогда I — интеграл Римана от функции f по отрезку $[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности (τ^n,ξ^n) оснащенных разбиений отрезка $[a,b]$ такой, что $\lambda(\tau^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, выполняется, что

$$\sigma_{\tau^n}(f,\xi^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть I — интеграл Римана от функции

f по отрезку $[a, b]$ согласно исходному определению и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta: \ \forall (\tau, \xi): \ \lambda(\tau) < \delta \ \ |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Пусть теперь (τ^n, ξ^n) — последовательность оснащенных разбиений отрезка $[a, b]$ такая, что $\lambda(\tau^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \ \ \lambda(\tau^n) < \delta.$$

Но тогда, при $n > n_0$ выполняется и

$$|\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| < \varepsilon,$$

откуда и следует утверждение.
Докажем достаточность. От противного, пусть выполнено утверждение теоремы, но I — не интеграл Римана, согласно исходному определению. Это значит, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \ \forall \delta > 0 \ \exists \ (\tau^\delta, \xi^\delta): \ \lambda(\tau^\delta) < \delta \ \text{ и } \ |\sigma_{\tau^\delta}(f, \xi^\delta) - I| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Тогда, по написанному,

$$\exists \ (\tau^n, \xi^n): \ \lambda(\tau^n) < \delta_n = \frac{1}{n} \ \text{ и } \ |\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| \geq \varepsilon_0.$$

Но так как $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\lambda(\tau^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а значит построенная последовательность оснащенных разбиений удовлетворяет условию теоремы. В то же время,

$$|\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| \geq \varepsilon_0,$$

что противоречит тому, что

$$\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.$$

$\square$

Данная теорема, как уже отмечалось, сводит понятие интеграла к понятию предела некоторой последовательности, что, в свою очередь, позволяет использовать результаты, ранее полученные для последовательностей. Например, единственность предела (а значит и интеграла), теоремы об арифметических операциях, и др.

§ 2. Суммы Дарбу и их свойства

Для изучения вопросов существования интеграла Римана, полезно рассмотреть две «крайние интегральные суммы», которые, на самом деле, интегральными суммами являются не всегда.

① Понятие сумм Дарбу

Начнем с основного определения.

Определение 96 (Понятие сумм Дарбу).
Пусть функция f задана на отрезке $[a,b]$ и τ — некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,\quad M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x),\quad i\in\{1,2,...,n\},$$

$$s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,\quad m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x),\quad i\in\{1,2,...,n\},$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции f, отвечающими разбиению τ, соответственно.

Полезно отметить геометрическое толкование сумм Дарбу при фиксированном разбиении: верхняя сумма отвечает «площади» наименьшей ступенчатой фигуры, описанной вокруг графика функции f, а нижняя — «площади» наибольшей ступенчатой фигуры, вписанной в график функции f. Слово площадь берется в кавычки не случайно: если функция принимает на отрезке разбиения отрицательное значение, то высота описанного прямоугольника на этом отрезке оказывается отрицательной, и площадь над этим отрезком берется со знаком минус. Аналогичные рассуждения справедливы и для вписанных прямоугольников.

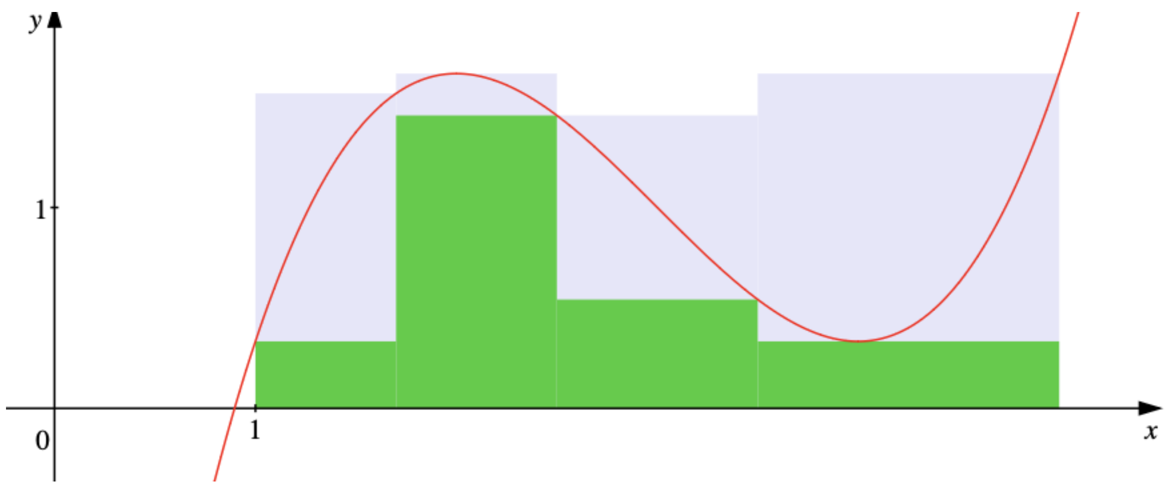

Рис. 13. Верхняя и нижняя суммы Дарбу для четырех отрезков разбиения

Замечание 181.

Из определения верхней и нижней сумм Дарбу очевидно неравенство

$$s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f,\xi) \le S_\tau(f),$$

верное для любых оснащенных разбиений (τ,ξ) отрезка $[a,b]$.

Понятно также, что если f не ограничена сверху (снизу), то $S_\tau(f) = +\infty$ ($s_\tau(f) = -\infty$). Конечность же любой из верхних (нижних) сумм Дарбу равносильна ограниченности функции сверху (снизу).

Лемма 69 (О связи конечности сумм Дарбу и ограниченности функции).
Ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности произвольной верхней (нижней) суммы Дарбу.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f ограничена сверху, то есть

$$\exists M: \ f(x) \le M, \ x \in [a,b].$$

Пусть τ — произвольное разбиение $[a,b]$. Тогда, так как $M_i \le M$, $i \in \{1,2,\ \ldots,n\}$,

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i = M(b-a) < +\infty.$$

Случай, когда f ограничена снизу доказывается аналогичным образом.
Докажем достаточность. Пусть τ — разбиение $[a,b]$ и $S_\tau(f)$ конечна. Тогда

$$M_i < +\infty, \quad i \in \{1,2,\ \ldots,n\},$$

и

$$f(x) \le M = \max_{i\in\{1,2,\ \ldots,n\}} M_i = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

откуда и следует требуемое.

Аналогичным образом доказывается утверждение в случае конечности $s_\tau(f)$. $\square$

2 Свойства сумм Дарбу

В этом пункте мы отметим важные (стандартные) свойства сумм Дарбу. Оказывается, что верхняя сумма Дарбу – это «наибольшая» из интегральных сумм при фиксированном разбиении, а нижняя – «наименьшая».

Лемма 70 (О связи сумм Дарбу и интегральных сумм).
Справедливы равенства

$$S_\tau(f) = \sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi), \quad s_\tau(f) = \inf_\xi \sigma_\tau(f,\xi).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Рассмотрим сначала случай, когда функция f ограничена сверху на $[a,b]$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по определению супремума,

$$\exists \xi_i \in \Delta_i: \ M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i \in \{1,2,\ \ldots,n\}.$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi) \;\Leftrightarrow\; S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi).$$

Так как, как уже отмечалось, $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f,\xi)$, то в итоге проверено, что

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi).$$

Пусть теперь f не ограничена сверху на $[a,b]$, тогда $S_\tau(f) = +\infty$. Ясно, что при фиксированном разбиении τ функция f не ограничена сверху хотя бы на одном отрезке разбиения Δ_i. Не нарушая общности можно считать, что она не ограничена на Δ_1. Тогда существует последовательность ξ_1^k, что $f(\xi_1^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$. Пусть $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in \{2,\ \ldots, n\}$, — какие-то фиксированные точки, $\xi^k = \{\xi_1^k, \xi_2,\ \ldots, \xi_n\}$. Тогда, в силу определения супремума,

$$\sup_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi) \geq \lim_{k\to\infty}\left(f(\xi_1^k)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right) = +\infty = S_\tau(f)$$

$\square$

Понятно, что справедливо следующее замечание.

Замечание 182.
В случае, когда $f \in C[a,b]$, очевидно,

$$S_\tau(f) = \max_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi), \quad s_\tau(f) = \min_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi).$$

Следующие свойства помогут нам установить так называемую монотонность сумм Дарбу. Начнем с определения.

Определение 97 (Понятие измельчения разбиения).
Пусть на отрезке $[a,b]$ введены разбиения τ_1 и τ_2. Говорят, что разбиение τ_1 является измельчением разбиения τ_2, если $\tau_2 \subset \tau_1$.

Иными словами, τ_1 является измельчением разбиения τ_2, если оно содержит все точки, входящие в разбиение τ_2 и, тем самым, порождает «более мелкие» отрезки разбиения.

Лемма 71 (О монотонности сумм Дарбу).
Пусть $\tau_2 \subset \tau_1$, тогда

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Достаточно рассмотреть случай, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\widehat{x} \in \Delta_k = (x_{k-1}, x_k)$.

Тогда

$$S_{\tau_2}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k.$$

Пусть

$$M_k' = \sup_{x\in[x_{k-1},\widehat{x}]} f(x), \quad M_k'' = \sup_{x\in[\widehat{x},x_k]} f(x),$$

тогда

$$M_k \geq M_k', \quad M_k \geq M_k''$$

и

$$M_k \Delta x_k = M_k(\widehat{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \widehat{x}) \geq M_k'(\widehat{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \widehat{x}),$$

откуда

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M_k'(\widehat{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \widehat{x}) = S_{\tau_1}(f).$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

Итак, лемма утверждает, что при измельчении разбиения верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние — не уменьшаются. Теперь установим взаимную ограни-

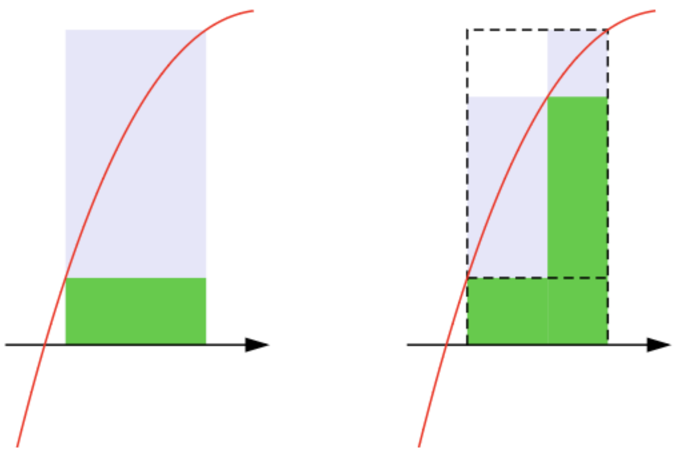

Рис. 14. Монотонность сумм Дарбу

ченность сумм Дарбу.

> **Лемма 72** (Об ограниченности сумм Дарбу).
> Пусть τ_1 и τ_2 — разбиения отрезка $[a, b]$, тогда
> $$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f).$$

Доказательство. Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. Пользуясь монотонностью сумм Дарбу (71), получим

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

что и доказывает утверждение. □

Иными словами, лемма утверждает, что любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

§ 3. Необходимое условие интегрируемости. Критерии интегрируемости

В этом разделе мы обсудим некоторые критерии интегрируемости функции. Начнем, однако, с необходимого условия интегрируемости, которое геометрически, наверное, достаточно понятно.

Теорема 86 (Необходимое условие интегрируемости).
Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Если предположить, что f не ограничена, например, сверху, то, по лемме 69,

$$S_\tau(f) = +\infty.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда, согласно определению интегрируемости,

$$\exists \delta > 0 : \ \forall (\tau, \xi) : \ \lambda(\tau) < \delta \ \ |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad I - 1 < \sigma_\tau(f, \xi) < I + 1.$$

В частности, при фиксированном разбиении τ, мелкость которого меньше δ, интегральные суммы ограничены (по ξ). Но это противоречит тому, что при том же разбиении (лемма 70),

$$\sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = S_\tau(f) = +\infty.$$

□

Итак, если функция оказывается неограниченной, то она оказывается и не интегрируемой (по Риману). Теперь сформулируем и докажем следующий, основной для нас критерий интегрируемости функции.

Теорема 87 (Критерий Дарбу).

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\lambda(\tau) \to 0} (S_\tau(f) - s_\tau(f)) = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta \ \ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \ \forall (\tau, \xi) : \ \lambda(\tau) < \delta \ \ |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в правой части неравенства к супремуму, а в левой части к инфимуму по ξ, получаем (лемма 70)

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_\tau(f), \quad S_\tau(f) \le I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Складывая неравенства

$$-s_\tau(f) \le \frac{\varepsilon}{3} - I, \quad S_\tau(f) \le I + \frac{\varepsilon}{3},$$

приходим к тому, что

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Так как $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} (S_\tau(f) - s_\tau(f)) = 0$, то все верхние и нижние суммы Дарбу конечны. В силу леммы 72,

$$\sup_\tau s_\tau(f) = I_* < +\infty, \quad \inf_\tau S_\tau(f) = I^* < +\infty,$$

причем $I_* \le I^*$. Пользуясь сказанным и тем, что для любого τ

$$s_\tau(f) \le I_* \le I^* \le S_\tau(f),$$

получим

$$0 \le I^* - I_* \le S_\tau(f) - s_\tau(f),$$

откуда, так как правая часть принимает сколь угодно малые значения (следствие 9), $I_* = I^*$. Пусть $I = I_* = I^*$. Из неравенств

$$s_\tau(f) \le I \le S_\tau(f), \quad s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f, \xi) \le S_\tau(f),$$

получаем

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| \le S_\tau(f) - s_\tau(f).$$

Осталось воспользоваться утверждением критерия Дарбу и заметить, что мы приходим к тому, что

$$\int\limits_a^b f\, dx = I,$$

что и доказывает утверждение. □

Отметим такое геометрическое замечание.

Замечание 183.
С точки зрения геометрии критерий Дарбу означает следующее: функция f оказывается интегрируемой в том и только том случае, когда «площадь» под графиком функции f может быть изнутри и снаружи аппроксимирована ступенчатыми фигурами (вписанной и описанной), «площади» которых могут быть сделаны сколь угодно близкими. В доказательстве достаточности мы еще и увидели значения I_* и I^*, часто называемые нижним и верхним интегралами Дарбу, соответственно. Они показывают в каком-то смысле пределы верхних и нижних сумм Дарбу при стремлении мелкости разбиения к нулю. Их равенство (и конечность) и есть условие существования искомого интеграла, а их общая величина – его значение.

Попутно обсудим и следующее, пригождающееся нам в дальнейшем замечание.

Замечание 184.
В процессе доказательства мы установили, что для любого разбиения τ

$$s_\tau(f) \leq \int\limits_a^b f\,dx \leq S_\tau(f).$$

Сказанное в какой-то мере запишем в виде следующего следствия.

Следствие 25.
Если $f \in R[a,b]$, то

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} s_\tau(f) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S_\tau(f) = \int\limits_a^b f\,dx.$$

Доказательство. Пользуясь предыдущим замечанием, имеем

$$0 \leq S_\tau(f) - \int\limits_a^b f\,dx \leq S_\tau(f) - s_\tau(f), \quad 0 \leq \int\limits_a^b f\,dx - s_\tau(f) \leq S_\tau(f) - s_\tau(f).$$

Остается применить критерий Дарбу (87). □

Для дальнейшего нам будет удобно ввести понятие колебания и переписать только что полученный результат в несколько иной форме.

Определение 98 (Понятие колебания).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Колебанием функции f на множестве E назовем величину

$$\omega(f,E) = \sup_{x,y\in E} \left(f(x) - f(y)\right).$$

Понятно, что для колебания функции справедливо следующее соотношение:

$$\omega(f,E) = \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E} f(x).$$

Согласно введенным обозначениям и доказанному, критерий Дарбу в терминах колебаний может быть переписан следующим образом.

Следствие 26 (Критерий Дарбу в терминах колебаний).

$$f \in R[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta \quad \sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

§ 4. Классы интегрируемых функций

В данном разделе мы докажем несколько теорем о классах интегрируемых функций. Первый результат, скорее всего, не должен удивлять. Конечно, непрерывные функции оказываются интегрируемыми. Впрочем, сам факт оказывается вовсе не тривиальным.

Теорема 88 (Об интегрируемости непрерывной функции).

$$f \in C[a,b] \quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b].$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Кантора (47), непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем, а значит

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in [a,b] : \ |x_1 - x_2| < \delta \ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть τ — такое разбиение отрезка $[a,b]$, что $\lambda(\tau) < \delta$, тогда

$$\omega(f, \Delta_i) = \sup_{x,y \in \Delta_i} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Значит, по следствию из критерия Дарбу (26), $f \in R[a,b]$. □

Теперь мы знаем, что рассмотренные построения для нахождения площади под графиком функции x^2 по отрезку $[0,1]$ были совершенно законными: мы имели право выбирать любое оснащенное разбиение так как $x^2 \in C[0,1]$. Прежде чем расширить множество интегрируемых функций, докажем следующую вспомогательную теорему.

Теорема 89 (О невлиянии на интеграл значения функции в конкретной точке). Если значения интегрируемой функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. Пусть $f \in R[a,b]$, а функция $\widetilde{f}$ отличается от f в точках $x_1, x_2, ..., x_n$. Так как, согласно необходимому условию интегрируемости (86), $|f| \le C$, то

$$|\widetilde{f}| \le C_1, \quad C_1 = \max(C, |\widetilde{f}(x_1)|, \ \ldots, |\widetilde{f}(x_n)|).$$

Заметим, что интегральные суммы для f и $\widetilde{f}$ отличаются не больше, чем в $2n$ слагаемых, причем

$$\left|\sigma_\tau(f,\xi) - \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)\right| \le 2n(C + C_1)\lambda(\tau) \xrightarrow[\lambda(\tau)\to 0]{} 0,$$

что доказывает одновременное существование интегралов и их равенство между собой. □

Доказанная теорема позволяет определить интеграл от функции, заданной на всем отрезке $[a, b]$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Теперь докажем свойство, устанавливающее связь между интегрируемостью функции на множестве и на подмножестве.

Теорема 90 (Об интегрируемости функции и ее сужения).
Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $f \in R[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Тогда $f \in R[\alpha, \beta]$.
2. Пусть $f \in R[a, c]$ и $f \in R[c, b]$, $a < c < b$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Доказательство. 1. Воспользуемся критерием Дарбу (87) и, выбрав $\varepsilon > 0$, найдем δ, что выбрав разбиение τ отрезка $[a, b]$ мелкости меньшей, чем δ, будет выполняться

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Пусть теперь τ' – какое-то разбиение $[\alpha, \beta]$ мелкости меньшей δ. Дополним это разбиение, разбив отрезки $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$, до разбиения τ отрезка $[a, b]$ так, чтобы мелкость $\lambda(\tau)$ была меньше, чем δ. Тогда

$$0 \le S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) \le S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение (критерий Дарбу (87)).
2. Интегрируемость постоянной функции нам уже известна. Не нарушая общности будем считать, что f не постоянна, а значит $\omega(f, [a, b]) > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию интегрируемости найдем δ_1, δ_2, что для любых разбиений отрезка $[a, c]$ таких, что $\lambda(\tau_1) < \delta_1$, и для любых разбиений отрезка $[c, b]$ таких, что $\lambda(\tau_2) < \delta_2$, выполняется

$$S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_{\tau_2}(f) - s_{\tau_2}(f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \varepsilon/(3\omega(f, [a, b])))$ и τ – разбиение отрезка $[a, b]$, что $\lambda(\tau) < \delta$. Пусть точка c принадлежит какому-то промежутку $[x_{i-1}, x_i)$. Обозначим

$$\tau' = \tau \cup \{c\}, \quad \tau_1 = \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, b].$$

Тогда, согласно выбору δ,

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \le S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) + S_{\tau_2}(f) - s_{\tau_2}(f) + \omega(f, [a, b])\delta < \varepsilon,$$

что, согласно критерию Дарбу (87), влечет интегрируемость f на $[a, b]$. □

Теперь мы готовы доказать интегрируемость еще одного важного класса функций – кусочно-непрерывных.

Определение 99 (Понятие кусочно-непрерывной функции).
Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной, если ее множество точек разрыва конечно или пусто, и все разрывы – разрывы первого рода.

Теорема 91 (Об интегрируемости кусочно-непрерывной функции).
Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

Доказательство. Пусть $a_1 < \ldots < a_m$ – все точки разрыва функции f на (a, b). Функция f непрерывна во внутренних точках и имеет конечные односторонние пределы на концах отрезков $[a, a_1], [a_1, a_2], \ \ldots, [a_m, b]$, а значит интегрируема на каждом из них, отличаясь от непрерывной функции не более чем в двух точках, согласно теореме 89. Тогда, по только что доказанной теореме 90, она интегрируема на $[a, b]$. $\square$

Отметим следующее замечание.

Замечание 185.
Доказанные нами теоремы, дающие некоторые классы интегрируемых функций, не являются критериями, а значит не описывают всего множества интегрируемых функций. Так, интегрирумая функция может иметь разрывы второго рода. Описание класса интегрируемых функций требует привлечения понятия, связанные с мерой Лебега, что выходит за рамки нашего курса.

В то же время, дадим некоторое серьезное, но легко формулируемое усиление только что доказанной теоремы: если функция f ограничена на $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ конечное число точек разрыва, то f интегрируема на $[a, b]$. Доказывать мы этот факт не будем. Пользоваться им при построении формальной теории тоже.

§ 5. Арифметические свойства интегрируемых функций

В этом разделе мы (традиционно) рассмотрим арифметические свойства интегрируемых функций. Сформулируем основной результат в виде теоремы. Впрочем, ее утверждения вряд ли должны удивлять, ведь кажется совершенно естественным, что

1. Вместе с любыми двумя функциями интегрируема и их линейная комбинация. Иными словами, множество интегрируемых функций на отрезке $[a, b]$ образует линейное пространство.
2. Вместе с любыми двумя функциями интегрируемо и их произведение.
3. Если интегрируема функция, то интегрируем и ее модуль.
4. Если значения функции f «отделены» от нуля, то интегрируема функция $1/f$.

Теорема 92 (Арифметические свойства интегрируемых функций).
Пусть $f, g \in R[a, b]$. Тогда:

1. Линейная комбинация f и g интегрируема, то есть
$$\alpha f + \beta g \in R[a, b],\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
2. Прозведение f и g интегрируемо, то есть
$$fg \in R[a, b].$$
3. Модуль функции интегрируем, то есть
$$|f| \in R[a, b].$$
4. Если $|f| > C$ на $[a, b]$, $C > 0$, то
$$\frac{1}{f} \in R[a, b].$$

Доказательство. 1. Так как
$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \leq$$
$$\leq |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E),$$
то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:
$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E),$$
верное для произвольного множества E.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, то по следствию из критерия Дарбу (26) интегрируемости функции,
$$\exists \delta_1 :\ \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta_1\ \ \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}.$$

Аналогично, так как $g \in R[a, b]$, то по следствию из критерия Дарбу (26) интегрируемости функции,

$$\exists \delta_2 : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta_2 \quad \sum_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(\alpha f + \beta g, \Delta_i)\Delta x_i \leq |\alpha| \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i + |\beta| \sum_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i)\Delta x_i \leq$$

$$\leq \frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, по следствию из критерия Дарбу (26) интегрируемости функции, $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$.

2. Так как $f, g \in R[a, b]$, то по необходимому условию (86) они ограничены на $[a, b]$, то есть

$$\exists C : \ |f(x)| < C, \ |g(x)| < C \quad \forall x \in [a, b].$$

Кроме того, так как

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq$$

$$\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C(\omega(f, E) + \omega(g, E)),$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega(fg, E) \leq C(\omega(f, E) + \omega(g, E)),$$

верное для произвольного множества E. Дальнейшие обоснования проводятся тем же образом, что и в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

3. Так как

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega(f, E),$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega(|f|, E) \leq \omega(f, E),$$

верное для любого множества E. Дальнейшие обоснования проводятся тем же образом, что и в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

4. Так как

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \left| \frac{f(x) - f(y)}{f(x)f(y)} \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{C^2} \leq \frac{\omega(f, E)}{C^2},$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega\left(\frac{1}{f}, E\right) \leq \frac{\omega(f, E)}{C^2},$$

верное для любого множества E. Дальнейшие обоснования проводятся тем же образом, что и в пункте 1, и остаются в качестве упражнения. □

§ 6. Свойства интеграла

① Свойства линейности и аддитивности

Ожидаемо, что как и при рассмотрении неопределенного интеграла, справедливо свойство линейности интеграла Римана. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 93 (О линейности интеграла Римана).
Пусть $f, g \in R[a,b]$, тогда

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int\limits_a^b f\ dx + \beta \int\limits_a^b g\ dx.$$

Доказательство. То, что $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$, известно из теоремы об арифметических свойствах интегрируемых функций (92). Осталось лишь в равенстве

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))\, \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

перейти к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$, откуда и получим требуемое. □

Следующая теорема устанавливает свойство аддитивности интеграла по промежутку.

Теорема 94 (Об аддитивности по промежутку).
Пусть $f \in R[a,b]$, $c \in [a,b]$, тогда

$$\int\limits_a^b f\ dx = \int\limits_a^c f\ dx + \int\limits_c^b f\ dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на промежутках $[a,c]$ и $[c,b]$ известна из ранее доказанной теоремы (90). Значит, для вычисления интеграла мы можем брать удобное для нас разбиение. Пусть τ — разбиение отрезка $[a,b]$, содержащее точку c. Это разбиение порождает разбиения τ_1 отрезка $[a,c]$ и τ_2 отрезка $[c,b]$, причем $\lambda(\tau_1) \le \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \le \lambda(\tau)$. Так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

и при $\lambda(\tau) \to 0$ одновременно $\lambda(\tau_1) \to 0$ и $\lambda(\tau_2) \to 0$, то получаем требуемое. □

Отметим часто используемое на практике следствие из данной теоремы.

Следствие 27.

Пусть $f \in R[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f\ dx = \int\limits_a^c f\ dx + \int\limits_c^b f\ dx.$$

② Свойства, связанные с неравенствами

В этом пункте мы рассмотрим несколько утверждений о том, как операция интегрирования согласуется с неравенствами между подынтегральными функциями. Большинство утверждений интуитивно понятны, если, как обычно, подходить к интегралу от неотрицательной функции геометрически — как к площади.

Теорема 95 (О монотонности интеграла).
Пусть $f, g \in R[a,b]$, $a \le b$ и $f(x) \le g(x)$ при $x \in [a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f\ dx \le \int\limits_a^b g\ dx.$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$, получаем требуемое. □

Итак, неформально теорема говорит о том, что площадь под графиком большей функции не меньше, чем площадь под графиком меньшей.

Следствие 28.
Пусть $f \in R[a,b]$, $a \le b$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f\ dx \le M(b-a).$$

Сформулированное следствие не только понятно геометрически (и, конечно, следует из доказанной теоремы), но и было нами изучено давным-давно. Действительно, если τ – разбиение отрезка $[a,b]$, состоящее из двух точек a и b, то написанное неравенство следует из замечания 184. Следующая теорема устанавливает связь модуля интеграла и интеграла от модуля.

Теорема 96 (О связи модуля интеграла и интеграла от модуля).
Пусть $f \in R[a,b]$, тогда

$$\left|\int\limits_a^b f\ dx\right| \le \left|\int\limits_a^b |f|\ dx\right|.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна из теоремы об арифметических свойствах интегрируемых функций (92). Так как

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i\right|,$$

то при $\lambda(\tau) \to 0$ получается требуемое. □

3 Первая теорема о среднем

В данном разделе мы докажем так называемую первую теорему о среднем. Интересно, но вторую теорему о среднем мы обсуждать не будем.

Теорема 97 (Первая теорема о среднем).
Пусть $f, g \in R[a, b]$, g не меняет знак на $[a, b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
Тогда:

$$\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b fg\ dx = \mu \int_a^b g\ dx.$$

Кроме того, если $f \in C[a, b]$, то

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b fg\ dx = f(\xi) \int_a^b g\ dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \ge 0$ при $x \in [a, b]$, тогда

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x), \quad x \in [a, b]$$

и, по теореме о монотонности интеграла (95),

$$m\int_a^b g\ dx \le \int_a^b fg\ dx \le M\int_a^b g\ dx.$$

Если $\int\limits_a^b g\ dx = 0$, то, согласно неравенству выше,

$$\int_a^b fg\ dx = 0,$$

а значит равенство

$$\int_a^b fg\ dx = \mu \int_a^b g\ dx$$

верно при любом μ.

Если же $\int\limits_a^b g\ dx \ne 0$, то, так как $g \ge 0$, выполнено (теорема 95), что $\int\limits_a^b g\ dx > 0$.

Поделив все то же неравенство на этот интеграл, приходим к неравенству

$$m \le \frac{\int\limits_a^b fg\ dx}{\int\limits_a^b g\ dx} \le M.$$

Положив

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b fg\ dx}{\int\limits_a^b g\ dx},$$

приходим к первому утверждению теоремы.

Если предположить, что $f \in C[a, b]$, то по второй теореме Больцано-Коши (30) для каждого $\mu \in [m, M]$ существует $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$, что доказывает вторую часть теоремы. □

Отметим замечание.

Замечание 186.
Обсудим геометрический смысл доказанной теоремы. Пусть $f \ge 0$ и $g \equiv 1$ на $[a, b]$. Тогда, если $f \in C([a, b])$, то теорема утверждает, что

$$\int\limits_a^b f\ dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a, b].$$

Значит, если значение интеграла слева трактовать как площадь под графиком функции f на $[a, b]$, то из написанного соотношения получаем, что эта площадь численно равна площади прямоугольника со сторонами $(b-a)$ и $f(\xi)$.

§ 7. Интеграл с переменным верхним пределом

В этом разделе мы поговорим о так называемом интеграле с переменным верхним пределом, о его свойствах, а также придем к важному следствию из полученных свойств — к существованию первообразной у непрерывной функции.

Определение 100 (Понятие интеграла с переменным верхним пределом).
Пусть $f \in R[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Функция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f\ dx$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Снабдим вновь введенное определение замечанием.

Замечание 187.
Заметим, что в силу теоремы 90, определение корректно: функция $\Phi(x)$ определена при каждом $x \in [a,b]$.

Наверное, определение прозрачно и с точки зрения геометрии, особенно при $f \geq 0$: значение $\Phi(x)$ равно площади под графиком функции f на промежутке $[a,x]$.

Введя в рассмотрение некоторую функцию, нельзя не исследовать ее на важнейшие с точки зрения анализа свойства: на непрерывность и на дифференцируемость. Сформулируем результаты в виде теорем.

Теорема 98 (О непрерывности интеграла с переменным верхним пределом).

$$\Phi \in C[a,b].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Так как $f \in R[a,b]$, то она ограничена (теорема 86) на этом отрезке, то есть существует $C > 0$, что

$$|f(x)| \leq C,\ \ x \in [a,b].$$

Тогда, пользуясь следствием 27 из теоремы об аддитивности, а также теоремой о сравнении интеграла от функции и интеграла от модуля функции (96), получим:

$$|\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\ dx\right| \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f|\ dx\right| \leq C\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx\right| = C|\Delta x|.$$

Значит, при $\Delta x \to 0$ выполняется $\Phi(x_0+\Delta x) \to \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0. Так как x_0 — произвольная точка отрезка $[a,b]$, то утверждение доказано. □

Вопрос о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом так же «в лоб» не решается. Если бы он так решался, то мы бы легко могли указать первообразную для любой интегрируемой функции – функцию $\Phi(x)$

Пример 70.
Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ и функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_{-1}^{x} \operatorname{sign}(t)\, dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Исследуем Φ на дифференцируемость в точке $x = 0$. Пусть $\Delta x > 0$, тогда, пользуясь теоремой 89, получим, что

$$\Phi(\Delta x) - \Phi(0) = \int\limits_{0}^{\Delta x} \operatorname{sign}(t)\, dt = \int\limits_{0}^{\Delta x} 1\, dt = \Delta x,$$

откуда

$$\Phi'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Phi(\Delta x) - \Phi(0)}{\Delta x} = 1.$$

Рассуждая аналогичным образом при $\Delta x < 0$ приходим к тому, что

$$\Phi(\Delta x) - \Phi(0) = \int\limits_{0}^{\Delta x} \operatorname{sign}(t)\, dt = -\int\limits_{0}^{\Delta x} 1\, dt = -\Delta x,$$

откуда

$$\Phi'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Phi(\Delta x) - \Phi(0)}{\Delta x} = -1.$$

Значит, Φ недифференицруема в точке 0.

Несмотря на разобранный пример, мы все же можем сделать некоторые выводы о дифференцируемости Φ.

Теорема 99 (О дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом).
Φ дифференцируема в точках непрерывности функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, причем в этих точках

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть f непрерывна в точке x_0 и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Рассмотрим цепочку преобразований:

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\, dt - f(x_0)\Delta x}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\, dt}{\Delta x} \right|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу непрерывности функции f в точке x_0,

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in [a, b] : \ |t - x_0| < \delta \ \ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $|\Delta x| < \delta$, тогда

$$\left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\ dt}{\Delta x}\right| \leq \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\ dt}{\Delta x}\right| < \varepsilon \cdot \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt}{\Delta x}\right| = \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

□

Важным в теории интеграла оказывается следствие из только что доказанной теоремы. Выделим его в отдельный пункт.

Следствие 29.
Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f имеет на этом отрезке первообразную, причем любая ее первообразная имеет вид

$$F(x) = \int\limits_a^x f\ dt + C = \Phi(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. То, что Φ — первообразная для f на $[a, b]$ сразу следует из предыдущей теоремы. Далее следует воспользоваться теоремой 77 о множестве всех первообразных. □

Это следствие закрывает озвученный нами ранее, при изучении теории неопределенного интеграла, долг. Теперь мы с уверенностью можем сказать, что первообразная у непрерывной на промежутке функции всегда существует.

§ 8. Формулы Ньютона–Лейбница, замены переменной и интегрирования по частям

В этом разделе мы рассмотрим формулу Ньютона—Лейбница, выражающую интеграл Римана через значения первообразной подынтегральной функции. Эту формулу часто называют основной формулой (теоремой) интегрального исчисления. Кроме того, мы изучим то, как переносятся формулы замены переменной и интегрирования по частям на случай интеграла Римана.

1 Формула Ньютона–Лейбница

Сначала получим следующую «бесплатную» теорему, но лишь для непрерывных функций.

Теорема 100 (Формула Ньютона–Лейбница для непрерывных функций).
Пусть $f \in C[a,b]$ и F — ее первообразная. Тогда:

$$\int\limits_a^b f\ dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Согласно следствию 29 о существовании первообразной непрерывной функций, любая первообразная непрерывной функции имеет вид

$$F(x) = \int\limits_a^x f\ dt + C.$$

Подставим сначала $x = a$, получим

$$F(a) = \int\limits_a^a f\ dx + C \ \Rightarrow\ C = F(a) \ \Rightarrow\ F(x) = \int\limits_a^x f\ dt + F(a).$$

Теперь, подставив $x = b$, придем к требуемому соотношению:

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx + F(a) \ \Rightarrow\ \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Отметим несколько замечаний.

Замечание 188.
Формула Ньютона—Лейбница справедлива для любой первообразной подынтегральной функции, и что значение интеграла не зависит от выбора этой первообразной. Действительно, если выбрана первообразная $F(x) + C$, то

$$F(b) - F(a) = F(b) + C - F(a) - C.$$

Замечание 189.
Часто вводят следующее обозначение, называемое двойной подстановкой:

$$F\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Используя это соотношение, запись формулы Ньютона—Лейбница часто можно встретить в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f\ dx = F\Big|_a^b.$$

Приведем пример.

Пример 71.
Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 x^2\ dx.$$

Теперь, используя формулу Ньютона–Лейбница, снова получим

$$\int\limits_0^1 x^2\ dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Несколько ослабим условия в формуле Ньютона–Лейбница и сформулируем ее в часто удобном для практике виде.

Теорема 101 (Усиленная формула Ньютона–Лейбница).
Пусть $f \in R[a,b]$ и F — некоторая первообразная f на $[a,b]$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f\ dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Введем следующее разбиение отрезка $[a,b]$:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \{0, 1,\ \ldots, n\}.$$

Пусть F — какая-то первообразная f на $[a,b]$. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right).$$

Согласно теореме Лагранжа (56), существует $\xi_k^n \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1}),$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k,$$

и мы получаем интегральную сумму для функции f по отрезку $[a, b]$ с оснащенным разбиением (τ^n, ξ^n).

Так как $f \in R[a, b]$ и так как при $n \to \infty$ выполняется $\lambda(\tau^n) \to 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k = \int\limits_a^b f\ dx.$$

С другой стороны,

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k,$$

а значит

$$\int\limits_a^b f\ dx = F(b) - F(a).$$

□

Отметим и следующее идейное замечание.

Замечание 190.
Интегрируемость и наличие первообразной – вещи, вообще говоря, не связанные. Мы уже видели, что у функции $\operatorname{sign} x$ не существует первообразной ни на каком промежутке, содержащем 0, но эта функция, очевидно, интегрируема по любому отрезку вещественной оси, будучи ограниченной функцией с (максимум) одной точкой разрыва типа скачок.

Можно привести также пример функции, которая имеет первообразную, но не является интегрируемой. Такой функцией будет производная функции

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Интересующийся читатель может проверить, что $F' \notin R[-1, 1]$ из-за неограниченности.

② Формула интегрирования по частям

Рассмотрим теперь формулу интегрирования по частям.

Теорема 102 (Формула интегрирования по частям).
Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b]$, причем $u', v' \in R[a, b]$. Тогда:

$$\int\limits_a^b uv'\ dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'\ dx$$

или

$$\int_a^b u\ dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\ du.$$

Доказательство. Согласно свойствам интегрируемых функций, $uv' \in R[a,b]$ и $u'v \in R[a,b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + uv' \in R[a,b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона–Лейбница (101),

$$\int_a^b u'v\ dx + \int_a^b uv'\ dx = \int_a^b (u'v + uv')\ dx = \int_a^b (uv)'\ dx = uv\big|_a^b,$$

откуда и следует утверждение. □

Мы видим, что формула интегрирования по частям перенеслась со случая неопределенного интеграла на случай интеграла Римана весьма «естественным» образом.

3 Формула замены переменной

Аналогичным образом введем вариант формулы замены переменной.

Теорема 103 (Формула замены переменной).
Пусть $f \in C[a,b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R[\alpha,\beta]$. Тогда:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi'\ dt.$$

Доказательство. Ясно, что интеграл от правой функции определен, ведь $f \circ \varphi \in C[\alpha,\beta]$, а значит $f(\varphi) \in R[\alpha,\beta]$ и, по свойствам интегрируемых функций, $f(\varphi)\varphi' \in R[\alpha,\beta]$. Кроме того, если F — первообразная f на $[a,b]$, то $F(\varphi)$ — первообразная $f(\varphi)\varphi'$ на $[\alpha,\beta]$. Тогда, по усиленной формуле Ньютона–Лейбница (101),

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\ dx.$$

□

Итак, что прекрасно видно, так это то, что применение теоремы снова становится совершенно «механическим», почти как в неопределенном интеграле, разве что теперь нужно не забыть о том, чтобы, как говорят, «пересчитать» пределы интегрирования. Приведем пример.

Пример 72.

Вычислить при $a > 0$ интеграл

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Из геометрических соображений должно быть понятно, что интеграл равен $\pi a^2/4$ — площади четверти круга радиуса a. Проверим это.

Сделаем замену $x = a\sin t$. Тогда

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\,dt = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)\,dt = \frac{\pi}{4}a^2.$$

Глава 7
Приложения интеграла Римана. Введение в теорию несобственных интегралов

> В математике нет символов для неясных мыслей
>
> *Пуанкаре*

В этом разделе мы рассмотрим понятия площади и объема, а также обобщим введенный ранее интеграл Римана на случай, когда либо подынтегральная функция оказывается неограниченной, либо когда промежуток интегрирования оказывается неограниченным.

§ 1. Интеграл от четной, нечетной и периодической функций

В этом разделе мы обсудим полезные для практики и некоторой дальнейшей теории дополнительные свойства интеграла, впрочем, весьма специфические. Сначала обсудим свойство интеграла от четной функции по симметричному промежутку — он равен удвоенному интегралу по любой из половин данного промежутка, отложенной от центра. Геометрически все сказанное должно быть очевидно: в силу четности и, например, неотрицательности f, площадь под графиком функции слева на промежутке $[-a, 0]$ просто-напросто равна площади справа на промежутке $[0, a]$.

Теорема 104 (Об интеграле от четной функции по симметричному промежутку). Пусть $f \in R[0, a]$ и является четной. Тогда:

$$\int\limits_{-a}^{a} f\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f\,dx.$$

Доказательство. Так как $f(-x) = f(x)$, то, по теореме 90, $f \in R[-a, a]$. Пользуясь аддитивностью интеграла по промежутку (теорема 94), получим:

$$\int\limits_{-a}^{a} f\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f\,dx + \int\limits_{0}^{a} f\,dx.$$

В первом интеграле можно сделать замену $t = -x$, $dt = -dx$, откуда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

Значит,

$$\int\limits_{-a}^{a} f\,dx = \int\limits_{0}^{a} f\,dt + \int\limits_{0}^{a} f\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f\,dx.$$

□

Теперь поговорим про интеграл от нечетной функции. Здесь, очевидно, все должно быть наоборот: в силу нечетности, появляющиеся отрицательные «площади» должны уничтожать симметричные им «положительные», складываясь, в итоге, в ноль.

Теорема 105 (Об интеграле от нечетной функции по симметричному промежутку). Пусть $f \in R[0, a]$ и является нечетной. Тогда:

$$\int\limits_{-a}^{a} f\,dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей и остается в качестве упражнения. □

Разберемся, наконец, с интегралом от периодической функции. Интуиция должна подсказывать, что, в силу повторения, интеграл от периодической функции по любому периоду одинаков. Так оно и есть.

Теорема 106 (Об интеграле от периодической функции по периоду).
Пусть $f \in R[0, T]$ и является периодической с периодом T. Тогда:

$$\int\limits_a^{a+T} f \, dx = \int\limits_0^T f \, dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей и остается в качестве упражнения. □

§ 2. Приложения интеграла Римана к вычислению площадей и объемов

В этом разделе мы хоть и не строго, но достаточно подробно обсудим понятия площади и объема. Начнем же с понятия площади.

1 Понятие площади

Итак, мы все время говорим, что интеграл от неотрицательной функции — это площадь. А что такое площадь? Было ли дано хоть где-то строгое определение этому понятию? До сих пор мы действовали, да и все еще продолжаем действовать, на уровне интуиции. В этом разделе мы подойдем к понятию площади чуть более строго, но все равно не максимально доказательно.

Начнем с того, что «определим» понятие длины вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$ или, что то же самое, расстояния от произвольной точки в $\mathbb{R}^n$ до начала координат. Напомним, что под $\mathbb{R}^n$ мы понимаем следующее множество:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}.$$

Определение 101 (Понятие длины арифметического вектора).
Пусть $x = (x_1, \ \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Элемент x иногда называется вектором, а иногда — точкой. Под длиной вектора (или под расстоянием от x до начала координат) будем понимать следующую величину:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Ясно, что перед нами – многомерная теорема Пифагора. Теперь введем понятие движения – отображения, сохраняющего расстояния.

Определение 102 (Понятие движения).
Отображение $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется движением, если

$$|x - y| = |U(x) - U(y)|.$$

Отметим следующее замечание.

Замечание 191.
Без каких-то подробных пояснений отметим, что на прямой движение – это либо параллельный перенос «вдоль» прямой, либо отражение относительно какой-либо точки на этой прямой, либо их композиция. На плоскости движение – это либо параллеьный перенос, либо поворот, либо отражение относительно прямой, либо их композиция, и так далее.

Теперь мы готовы перейти к (нестрогому) определению того, что же такое площадь.

Определение 103 (Понятие площади).
Функция множеств (функционал) $S : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве

«квадрируемых» подмножеств плоскости, называется площадью, если

1. $S(A) \geq 0,\ A \in \mathfrak{U}$.
2. Если $A, B \in \mathfrak{U},\ A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B \in \mathfrak{U}$ и
$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$
3. Площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab.
4. Если $A \in \mathfrak{U}$, U — движение, то $U(A) \in \mathfrak{U}$ и
$$S(U(A)) = S(A).$$

Не обойтись здесь и без коментариев.

Замечание 192.
Итак, поясним только что введенное определение.

1. Во-первых, площадь — это, как мы и ожидаем, неотрицательная функция.
2. Во-вторых, площадь объединения непересекающихся множеств равна сумме площадей объединяемых множеств.
3. В-третьих, выполнено условие нормировки — привычная для нас площадь прямоугольника ей и остается.
4. В-четвертых, площадь не меняется при движении.

Укажем явно и на «дыру», присутствующую в определении, которую на данный момент мы закрывать не планируем.

Замечание 193.
Обратите внимание, что множество «квадрируемых» фигур мы не определяем. То, что некоторая фигура имеет площадь, здесь и далее принимается на веру. Впрочем, внося некоторую ясность, сразу скажем, что все привычные для нас фигуры: многоугольники, круги, их объединения и пересечения, конечно же квадрируемы, и это можно доказать. Для этого нужно строить теорию, часто называемую теорией меры (например, меры Жордана). Построение теории меры мы отложим до момента изучения кратных интегралов.

2 Вычисление площади

Теперь научимся вычислять площади некоторых фигур. Сначала формализуем известное из школы понятие криволинейной трапеции.

Определение 104 (Понятия подграфика и криволинейной трапеции).
Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$. Множество
$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$
называется подграфиком функции f.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то подграфик называется криволинейной трапецией.

Теперь сформулируем и докажем теорему о площади подграфика.

Теорема 107 (О вычислении площади подграфика).
Пусть $f \in R[a,b]$ и G_f — подграфик функции f. Если подграфик имеет площадь, то

$$S(G_f) = \int\limits_a^b f\ dx.$$

Доказательство. Пусть τ — разбиение отрезка $[a,b]$. Геометрически очевидно, что

$$s_\tau(f) \le S(G_f) \le S_\tau(f).$$

Поскольку $f \in R[a,b]$, то (следствие 25)

$$S_\tau(f) \xrightarrow[\lambda(\tau)\to 0]{} \int\limits_a^b f\ dx \xleftarrow[\lambda(\tau)\to 0]{} s_\tau(f).$$

Значит, по теореме о сжатой переменной,

$$S(G_f) = \int\limits_a^b f\ dx.$$

□

Данная формула допускает некоторое обобщение.

Теорема 108 (О площади фигуры между графиками функций).
Пусть $f, g \in R[a,b]$, $f \le g$. Тогда площадь фигуры $S(G_{f,g})$, где

$$G_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \ f(x) \le y \le g(x)\},$$

вычисляется по формуле

$$S(G_{f,g}) = \int\limits_a^b (g - f)\ dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перенести фигуру выше оси абсцисс, добавив к f и g такую постоянную c, чтобы $f+c \ge 0$. Тогда, пользуясь свойством сохранения площади при движении, а также предыдущей теоремой,

$$S(G_{f,g}) = S(G_{f+c,g+c}) = S(G_{g+c}) - S(G_{f+c}) =$$

$$= \int\limits_a^b (g+c)\ dx - \int\limits_a^b (f+c)\ dx = \int\limits_a^b (g-f)\ dx.$$

□

Выведем формулу для вычисления площади «под графиком функции» в полярных координатах. Для начала определим, что же означает «под графиком».

Определение 105 (Понятия подграфика и криволинейного сектора).
Пусть $0 < \beta - \alpha \le 2\pi,\ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ f \ge 0$. Множество

$$\widetilde{G_f} = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi \in [\alpha, \beta],\ 0 \le r \le f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f в полярных координатах. Если функция f непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то подграфик называется криволинейным сектором.

Сформулируем теорему о площади подграфика.

Теорема 109 (О площади подграфика в полярных координатах).
Пусть $f \in R[\alpha, \beta]$ и $\widetilde{G_f}$ — подграфик функции f. Если подграфик имеет площадь, то

$$S(\widetilde{G_f}) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2\, d\varphi.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi).$$

Воспользовавшись тем, что площадь сектора радиуса r с углом φ равна $r^2\varphi/2$, составим суммы

$$s_\tau(f) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S_\tau(f) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Геометрически очевидно, что

$$s_\tau(f) \le S(\widetilde{G_f}) \le S_\tau(f).$$

Кроме того, $s_\tau(f)$ и $S_\tau(f)$ — суммы Дарбу функции $f^2(\varphi)/2$. Поскольку $f^2 \in R[\alpha, \beta]$, то (следствие 25)

$$S_\tau(f) \xrightarrow[\lambda(\tau)\to 0]{} \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2\, d\varphi \xleftarrow[\lambda(\tau)\to 0]{} s_\tau(f).$$

Значит, по теореме о сжатой переменной,

$$S(\widetilde{G_f}) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2\, d\varphi.$$

□

3 Понятие объема

Аналогично тому, как было сделано в случае площади, введем понятие объема. Договоримся сразу, что под словом тело всюду далее понимается подмножество пространства $\mathbb{R}^3$. Введем основное определение.

Определение 106 (Понятие объема).
Функция множеств (функционал) $V : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве «кубируемых» подмножеств пространства $\mathbb{R}^3$, называется объемом, если

1. $V(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{U}$.
2. Если $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B \in \mathfrak{U}$ и
$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$
3. Объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c равен abc.
4. Если $A \in \mathfrak{U}$, U — движение, то $U(A) \in \mathfrak{U}$ и
$$V(U(A)) = V(A).$$

Не обойтись здесь и без коментариев.

Замечание 194.
Итак, поясним только что введенное определение.

1. Во-первых, объем — это, как мы и ожидаем, неотрицательная функция.
2. Во-вторых, объем объединения непересекающихся множеств равен сумме объемов объединяемых множеств.
3. В-третьих, выполнено условие нормировки — привычный для нас объем параллелепипеда им и остается.
4. В-четвертых, объем не меняется при движении.

Укажем явно и на «дыру», присутствующую в определении, которую на данный момент мы закрывать не планируем.

Замечание 195.
Обратите внимание, что множество «кубируемых» фигур мы не определяем. То, что некоторое тело имеет объем, здесь и далее принимается на веру. Детальные обсуждения оставим до разговоров о мере Жордана в теории кратных интегралов.

4 Свойства площади и объема

Говоря о площади, мы не стали формулировать и доказывать каких-то общих свойств. В случае объема нам этого уже не избежать. Давайте сформулируем некоторые полезные и геометрически очевидные свойства площади и объема в следующей лемме. Говорить, однако, будем про объем.

Лемма 73 (Свойства объема).
Пусть $V : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ — объем. Тогда:

1. Объем монотонен, то есть если $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \subset B$,
$$V(A) \leq V(B).$$

2. Пусть $A \in \mathfrak{U}$ содержится в некотором прямоугольнике. Тогда $V(A) = 0$.
3. Если множества $A, B \in \mathfrak{U}$ пересекаются по множеству нулевого объема, то

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

Доказательство. 1. Заметим, что $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Тогда, предполагая кубируемость $(B \setminus A)$, согласно второму свойству из определения объема,

$$V(A \cup (B \setminus A)) = V(A) + V(B \setminus A) \geq V(A),$$

где последнее неравенство справедливо в виду неотрицательности объема.
2. Выберем $\varepsilon > 0$, тогда найдется параллелепипед P_ε, что

$$A \subset P_\varepsilon \quad \text{и} \quad V(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Тогда, по доказанному в первом пункте,

$$0 \leq V(A) \leq V(P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

что, в силу произвольности ε, влечет равенство $V(A) = 0$.
3. Пусть $C = A \cap B$, причем $V(C) = 0$, тогда

$$V(A) = V(A \setminus C) + V(C) = V(A \setminus C),$$

откуда

$$V(A \cup B) = V(A \setminus C) + V(B) = V(A) + V(B).$$

□

Замечание 196.
Понятно, что такие же свойства с необходимыми изменениями присущи и площади. Их формулировку и доказательство мы оставляем читателю.

5 Вычисление объема

Рассмотрим теперь отличительную особенность фигур большей размерности (для нас – трехмерных фигур) — способность к сведению вопроса объема к вопросу площади. Для этого введем следующее определение.

Определение 107 (Понятие сечения).
Пусть T — тело, $x \in \mathbb{R}$. Множество

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$$

называется сечением тела T координатой x.

Понятно, что аналогичным образом определяются сечения тела и другими координатами. Прежде чем переходить к вычислению объема тела, сформулируем достаточно естественные, на наш взгляд, требования, позволяющие упростить дальнейшие рассуждения.

Замечание 197.
Далее будем полагать, что тело T удовлетворяет следующим требованиям:

1. $\exists [a,b]:\ T(x) = \varnothing,\ x \notin [a,b]$.
2. $\forall x \in [a,b]$ фигура $T(x)$ квадрируема и имеет площадь $S(x)$, причем $S \in C[a,b]$.
3. $\forall \Delta \subset [a,b]\ \exists\ \xi^*_\Delta, \xi^{**}_\Delta \in \Delta : T(\xi^*_\Delta) \subset T(x) \subset T(\xi^{**}_\Delta)\ \forall x \in \Delta$.

Вряд ли данное замечание можно оставить без комментариев.

Замечание 198.
Как обычно, поясним каждый предложенный в замечании пункт отдельно:

1. Первый пункт говорит о том, что тело T ограничено по x, или, иначе, заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$.
2. Второй пункт устанавливает возможность найти площадь сечения $S(x)$ при каждом x.
3. Третий пункт говорит о том, что на каждом сегменте Δ существуют «наибольшее» и «наименьшее» сечения.

Теперь поймем важный факт: если тело имеет объем, то он может быть выражен как «сумма» площадей сечений. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 110 (О вычислении объема через площади сечений).
Пусть тело T удовлетворяет требованиям, озвученным выше. В рамках введенных обозначений, если тело T имеет объем, то

$$V(T) = \int\limits_a^b S\ dx.$$

Доказательство. Пусть T имеет объем и τ — разбиение $[a,b]$. Пусть

$$m_k = \min_{\Delta_k} S(x),\ \ M_k = \max_{\Delta_k} S(x),$$

тогда

$$S(T(\xi^*_k)) = m_k, \quad S(T(\xi^{**}_k)) = M_k.$$

Пусть

$$q_k = \Delta_k \times T(\xi^*_k), \quad Q_k = \Delta_k \times T(\xi^{**}_k),$$

тогда

$$q_k \subset T_k \subset Q_k, \quad T_k = \{(x,y,z) \in T:\ x \in \Delta_k\}.$$

Но тогда

$$\bigcup_{k=1}^n q_k \subset T \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k.$$

По пункту 3 леммы 73 о свойствах объема,

$$V\left(\bigcup_{k=1}^n q_k\right) = \sum_{k=1}^n V(q_k) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = s_\tau,$$

$$V\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(Q_k) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S_\tau.$$

По монотонности объема,

$$s_\tau \le V(T) \le S_\tau.$$

Так как s_τ и S_τ — суммы Дарбу функции S, а последняя интегрируема, то (следствие 25)

$$V(T) = \int\limits_a^b S\, dx.$$

□

Выведем теперь формулу для вычисления объема тела вращения, предварительно определив последнее.

Определение 108 (Понятие тела вращения).
Пусть $f \in C[a,b]$, причем $f \ge 0$. Множество

$$T_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\right\}$$

называется телом вращения, полученным вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 111 (О вычислении объема тела вращения).
Пусть T — тело вращения, полученное вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox. Тогда

$$V(T_f) = \pi \int\limits_a^b f^2\, dx.$$

Доказательство. Ясно, что $S(x) = \pi f^2(x)$, все условия предыдущей теоремы выполнены, а значит

$$V(T_f) = \pi \int\limits_a^b f^2\, dx.$$

□

§ 3. Приложения интеграла Римана к вычислению длин

В этом разделе мы рассмотрим приложения интеграла Римана к вычислению длин.

1 Понятие пути, гладкость пути

Понятия пути, кривой, скорее всего являются интуитивно понятными. Достаточно вспомнить (или вообразить) траекторию движения материальной точки, траекторию падения камня, брошенного под углом к горизонту, и многое-многое другое. Этот пункт посвящен обсуждению важных для анализа и приложений объектов — пути и кривой. Начнем же мы с ключевого понятия — понятия пути.

Определение 109 (Понятие пути).
Путем в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, все координатные функции которого непрерывны на $[a, b]$.

Дадим некоторые комментарии к введенному определению.

Замечание 199.
Отметим отдельно, что γ — это так называемая вектор-функция скалярного аргумента: на вход этой функции подается одно число, а на выходе получаются n чисел. Такой тип отображения часто встречается, например, в физике. Скажем, отображение

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

можно трактовать как положение материальной точки на плоскости $\mathbb{R}^2$ в момент времени $t \in [t_0, t_1]$. Можно приводить и другие аналогии.

Как следует из определения, путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ задается n непрерывными функциями $x_i(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, а значит может быть (будучи вектор-функцией) записан как вектор

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

Дадим и следующее понятное определение.

Определение 110 (Понятия начала и конца пути, замкнутого пути).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Точка $\gamma(a)$ называется началом пути, а точка $\gamma(b)$ — концом пути γ. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то путь γ называется замкнутым.

Приведем примеры.

Пример 73.
Путь $\gamma(t) = t$, $t \in [0, 1]$ является незамкнутым путем, $\gamma(0) = 0$ — начало пути, $\gamma(1) = 1$ — конец пути. По сути, образ этого пути — отрезок $[0, 1]$.

Путь $\gamma(t) = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$ — опять же незамкнутый путь, $\gamma(0) = 1$ — начало пути, $\gamma(\pi/2) = 0$ — конец пути. Образ этого пути — снова отрезок $[0, 1]$.

Интересно отметить, что в этот раз путь обходится «справа-налево».

Путь $\gamma(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$ — замкнутый путь, $\gamma(0) = 0$ — начало пути, $\gamma(\pi) = 0$ — конец пути, каждая точка образа, кроме точки 1, проходится дважды (сначала «слева-направо», а потом «справа-налево»). Образ этого пути, однако, снова совпадает с отрезком $[0, 1]$.

Мы так часто говорим про образ пути, то есть про «геометрический след» нашего отображения, что резонно подумать о специальном термине для этого понятия. Что же, термин и правда существует.

Определение 111 (Понятие носителя пути).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Множество $\gamma([a, b])$ называется носителем пути γ.

Итак, носитель пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — это образ отрезка $[a, b]$ при отображении γ.

Замечание 200.
Разные пути могут иметь равные носители. В принципе, мы видели это во всех приведенных выше примерах. Приведем и «неодномерный» пример.

Верхняя полуокружность

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0,$$

является носителем как пути

$$\gamma_1(t) = (t, \ \sqrt{1 - t^2}), \quad t \in [-1, 1],$$

так и пути

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \ \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

Теперь введем понятие гладкого пути.

Определение 112 (Понятие гладкого пути).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, причем

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ \ldots, x_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

Говорят, что γ — путь гладкости $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, если $x_i \in C^m[a, b]$, $i \in \{1, \ \ldots, n\}$.

Если $m = 1$, то путь γ часто просто называют гладким.

Приведем пример.

Пример 74.
Почти все пути, рассмотренные ранее, являются бесконечно гладкими. Путь

$$\gamma(t) = (t, \ \sqrt{1 - t^2}), \quad t \in [-1, 1],$$

очевидно, гладким не является.

Часто оказывается, что путь может быть разбит на конечное число гладких путей. Конечно, для этого существует свое определение.

Определение 113 (Понятие кусочно-гладкого пути).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Если отрезок $[a, b]$ можно разбить точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$$

так, что сужение пути γ на каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, \ \ldots, n\}$ — гладкий путь, то путь γ называется кусочно-гладким.

Приведем пример.

Пример 75.
Путь $\gamma(t) = (t, \ |t|)$, $t \in [-1, 1]$, является кусочно-гладким. Он разбивается на два гладких (даже бесконечно гладких) пути точкой $t = 0$.

② Понятие кривой, гладкость кривой

Наверное, вы уже заметили, что, вроде бы, один и тот же путь (одинаковое направление обхода, один и тот же порядок прохождения точек, одинаковый носитель) может быть задан по-разному. Очевидно, это не случайное наблюдение.

Определение 114 (Понятие эквивалентных путей).
Путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называется эквивалентным пути $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, если существует строго возрастающая биекция $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \widetilde{\gamma}(u).$$

Итак, эквивалентные пути — это те пути, которые один в другой можно перевести строго возрастающей заменой параметра. На «бытовом» уровне эквивалентность путей нужно понимать следующим образом: носители эквивалентных путей совпадают, а точки носителей проходятся в «одном и том же» порядке.

Пример 76.
Пути $\gamma(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$ и $\widetilde{\gamma}(t) = t$, $t \in [0, 1]$ эквивалентны. Действительно, в качестве функции u можно взять

$$u(t) = \sin t : [0, \pi/2] \to [0, 1].$$

Пути $\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in [-1, 1]$, и $\widetilde{\gamma}(t) = (-\cos t, \ \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, тоже эквивалентны. В качестве функции u можно взять следующую функцию:

$$u(t) = \pi - \arccos t : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Наверное, после введенного выше определения становится понятно, что слова «эквивалентные» пути — не случайные слова. Это и правда так. Оказывается, что перед нами — отношение эквивалентности, то есть рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

Лемма 74.
Введенное понятие эквивалентности путей — отношение эквивалентности на множестве путей.

Доказательство. Проверим все три свойства отношения эквивалентности.
1. Симметричность. Пусть путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \widetilde{\gamma}(u).$$

По свойствам обратных функций, $u^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — возрастающая биекция, а значит

$$\gamma(u^{-1}) = \widetilde{\gamma}(u(u^{-1})) = \widetilde{\gamma},$$

и путь $\widetilde{\gamma}$ эквивалентен пути γ.
2. Рефлексивность. Каждый путь, конечно, эквивалентен сам себе. В качестве функции u достаточно взять тождественное отображение.
3. Транзитивность. Пусть путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \widetilde{\gamma}(u).$$

Пусть, кроме того, путь $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\widehat{\gamma} : [\varphi, \psi] \to \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $w : [\alpha, \beta] \to [\varphi, \psi]$, что

$$\widetilde{\gamma} = \widehat{\gamma}(w).$$

Тогда $w(u) : [a, b] \to [\varphi, \psi]$ — возрастающая биекция, причем

$$\gamma = \widetilde{\gamma}(u) = \widehat{\gamma}(w(u)).$$

$\square$

Теперь разумно ввести следующее определение.

Определение 115 (Понятие кривой).
Класс эквивалентных путей называют кривой, а каждый представитель класса — параметризацией кривой. Кривую часто обозначают $\{\gamma\}$, где γ — какая-либо ее параметризация.

Введем понятие гладкости кривой.

Определение 116.
Кривая $\{\gamma\}$ называется гладкой (m-гладкой, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, кусочно-гладкой), если у нее существует гладкая (m-гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.

Отметим и несколько замечаний.

Замечание 201.
Заметим, что в определении выше требуется существование параметризации той или иной гладкости, и не запрещается существование негладких параметризаций. Например, кривая, имеющая негладкую параметризацию

$$\gamma(t) = (t,\ \sqrt{1 - t^2}), \quad t \in [-1, 1],$$

может быть задана и гладкой (даже бесконечно гладкой) параметризацией

$$\gamma(t) = (\cos t, \ -\sin t), \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

Согласно данному выше определению, кривая $\{\gamma\}$ — кривая бесконечной гладкости.

Замечание 202.
Отметим отдельно, что понятие гладкости кривой часто определяют и несколько иначе. Например, часто требуют, чтобы существовала параметризация, координатные функции x_i, $i \in \{1, \ \dots, n\}$, которой не просто непрерывно дифференцируемы, но и удовлетворяют условию

$$x_1'(t)^2 + \ldots + x_n'(t)^2 \neq 0, \quad t \in [a, b].$$

Последнее требование гарантирует существование в каждой точке так называемого касательного вектора к кривой. Мы сейчас не будем останавливаться на этом подробнее, так как на данный момент мы не будем пользоваться этими отличиями. Скажем только, что все нижеизложенное одинаково подходит для любого «разумного» определения гладкости кривой.

3 Понятия длины кривой и пути. Вычисление длины

В этом пункте мы дадим определение длины кривой (пути). Определение, которое мы введем, должно удовлетворять нескольким естественным требованиям:

1. Во-первых, длина пути должна быть аддитивной, то есть если путь разделен некоторой точкой, то длина должна складываться из длин составляющих.
2. Во-вторых, длина пути, соединяющего точки A и B, должна быть не меньше длины отрезка AB. По сути, это — неравенство треугольника.

Обсудим все вышеизложенное детальнее. Для простоты и геометрической наглядности изложения, будем рассматривать путь как отображение в $\mathbb{R}^2$. Пусть всюду в дальнейшем, где нам потребуется координатное представление, путь γ задается следующим образом:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2.$$

Пусть также τ — разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_0, t_1, \ \dots, t_n$.

Определение 117 (Понятие вписанной ломаной).
Множество отрезков, соединяющих точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, называется ломаной, вписанной в путь γ, отвечающей разбиению τ. Эту ломаную будем обозначать s_τ.

Замечание 203.
Мотивация написанного, наверное, понятна: длину кривой разумно приближать длиной вписанной ломаной по нескольким причинам:

1. Во-первых, длину ломаной мы умеем вычислять.
2. Во-вторых, старые понятия длины отрезка и ломаной совпадут с новым

понятием;

3. В третьих, на наш субъективный взгляд, такой подход моделирования более чем логичен.

Вычислим теперь длину вписанной ломаной.

Лемма 75 (О длине вписанной ломаной).
Длина $|s_\tau|$ ломаной s_τ, вписанной в путь γ, равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Доказательство. Длина отрезка, соединяющего точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, вычисляется по теореме Пифагора и равна, очевидно,

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Тогда длина $|s_\tau|$ ломаной s_τ равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

$\square$

Определение 118 (Понятие длины пути).
Длиной пути γ называется величина

$$l_\gamma = \sup_\tau |s_\tau|.$$

Итак, под длиной пути мы понимаем «максимальную» из длин вписанных ломаных в данную кривую.

Определение 119 (Понятие спрямляемого пути).
Если $l_\gamma < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Теперь озаботимся вопросом корректности введенного определения. Казалось бы, длины эквивалентных путей должны быть раны. Так ли это, если мы используем введенное выше определение?

Лемма 76 (О длинах эквивалентных путей).
Длины эквивалентных путей равны.

Доказательство. Пусть путь $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\widetilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$, $u : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ — возрастающая биекция. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^k$ — дробление $[a,b]$, тогда $\widetilde{t_k} = u(t_k)$ — дробление $[\alpha,\beta]$. Значит,

$$s_{\widetilde{\gamma}} = \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{\gamma}(\widetilde{t_k}) - \widetilde{\gamma}(\widetilde{t_{k-1}})| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = s_\gamma \le l_\gamma,$$

и, тем самым, $l_{\widetilde{\gamma}} \leq l_\gamma$. Меняя γ и $\widetilde{\gamma}$ местами, проводя аналогичные приведенным выше выкладки, придем к неравенству $l_\gamma \leq l_{\widetilde{\gamma}}$, откуда $l_\gamma = l_{\widetilde{\gamma}}$. □

В итоге, примем следующее определение.

Определение 120 (Понятие длины кривой).
Длиной кривой называют длину любой ее параметризации.

Покажем, что длина – аддитивная функция.

Лемма 77 (Об аддитивности длины).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, $c \in (a, b)$, γ^1, γ^2 — сужения пути γ на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$, соответственно. Путь γ спрямляем тогда и только тогда, когда спрямляемы пути γ^1 и γ^2, причем

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть путь γ спрямляем и пусть τ — разбиение $[a, b]$, содержащее точку c. Ясно, что $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 — разбиение $[a, c]$ и τ_2 — разбиение $[c, b]$. Тогда ломаная s_τ — объединение ломаных s_{τ_1} и s_{τ_2}, причем

$$|s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| = |s_\tau| \leq l_\gamma < +\infty.$$

Отсюда сразу следует, что каждый из путей γ^1 и γ^2 спрямляем. Переходя в предыдущем неравенстве сначала к супремуму по τ_1, а потом по τ_2, получим

$$l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} \leq l_\gamma.$$

Докажем достаточность и, заодно, противоположное неравенство. Пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$. Если оно не содержит точку c, то добавим ее, получив разбиение $\tau' = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 — разбиение $[a, c]$ и τ_2 — разбиение $[c, b]$. Пусть точка c попала в i-ый отрезок разбиения, то есть $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Длина ломаной, отвечающей разбиению τ', могла только увеличиться по сравнению с длиной ломаной, отвечающей разбиению τ, так как, согласно неравенству треугольника,

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \leq$$

$$\sqrt{(x(c) - x(t_{i-1}))^2 + (y(c) - y(t_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(t_i) - x(c))^2 + (y(t_i) - y(c))^2}.$$

Значит,

$$|s_\tau| \leq |s_{\tau'}| = |s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} < +\infty$$

и, тем самым, кривая γ спрямляема. Переходя к супремуму по τ в левой части неравенства, получим

$$l_\gamma \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Объединяя это неравенство и последнее неравенство, полученное в пункте необходимости, заключаем, что

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2},$$

и теорема полностью доказана. □

Заметим, что пока что нигде не требовалась непрерывность отображения γ. Теперь укажем важное достаточное условие спрямляемости пути.

Теорема 112 (Достаточное условие спрямляемости пути).
Пусть γ — гладкий путь, тогда он спрямляем.

Доказательство. Пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$. Длина ломаной, вписанной в путь γ, равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа (теорема 56), найдутся точки $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, что

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

откуда

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}\Delta t_i.$$

Пусть

$$M_x = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \quad M_y = \max_{t\in[a,b]} |y'(t)|,$$

$$m_x = \min_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \quad m_y = \min_{t\in[a,b]} |y'(t)|,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{m_x^2 + m_y^2}\Delta t_i \le |s_\tau| \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\Delta t_i,$$

откуда

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \le |s_\tau| \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a).$$

Переходя к супремуму по τ, имеем

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \le l_\gamma \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a).$$

и правое неравенство дает возможность заключить, что путь спрямляем. □

Замечание 204.
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемая кривая. Тогда, согласно теореме об аддитивности длины, для $t \in [a, b]$ определена функция $l_\gamma(t)$, равная длине участка пути γ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(t)$.

Определим важное свойство введенной функции.

Теорема 113 (О гладкости длины участка пути).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — гладкий путь. Тогда $l_\gamma \in C^1[a, b]$, причем

$$l'_\gamma(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$, причем t_0, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Согласно последнему неравенству в доказательстве предыдущей теоремы, сохраняя те же обозначения, на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ выполнено

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}\Delta t \leq l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0) \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\Delta t.$$

Поделив неравенство на $\Delta t > 0$, получим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \leq \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Так как $M_x = \max\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |x'(t)|$, и функция $x'(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{\Delta t \to 0+0} M_x = x'(t_0).$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta t \to 0+0} m_x = x'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \to 0+0} M_y = y'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \to 0+0} m_y = y'(t_0).$$

Значит,

$$\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} \leq \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \leq \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$$

и

$$l'_{\gamma+}(t_0) = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}.$$

Аналогично рассматривается случай $\Delta t < 0$. Значит, в силу произвольности t_0,

$$l'_\gamma(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

□

Осталось получить формулу для вычисления длины участка пути. Что же, она сразу получается, если вспомнить формулу Ньютона-Лейбница.

Теорема 114 (О вычислении длины пути).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — гладкий путь, тогда

$$l_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Доказательство. Так кака $l'_\gamma \in C[a, b]$ и $l_\gamma(a) = 0$, то, по формуле Ньютона–Лейбница (теорема 100),

$$l_\gamma(t) = l_\gamma(t) - l_\gamma(a) = \int\limits_a^t l'_\gamma\, dt.$$

Так как $l_\gamma = l_\gamma(b)$, то

$$l_\gamma = l_\gamma(b) = \int\limits_a^b l'_\gamma\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

□

Замечание 205.
Последние две теоремы с очевидными видоизменениями переносятся и на кусочно-гладкие пути.

Отметим некоторые важные формулы, являющиеся следствием из приведенных теорем.

Теорема 115 (О длине графика гладкой функции).
Пусть $f \in C^1[a,b]$ и

$$\Gamma_f = \{(x,y) : y = f(x),\ x \in [a,b]\}$$

— график функции f. Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx.$$

Доказательство. Действительно, график Γ_f может быть задан следующей параметризацией:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b].$$

Дальше остается сослаться на только что доказанную теорему. □

Теперь поговорим о вычислении длины графика функции, заданной в полярной системе координат.

Теорема 116 (О длине графика функции в полярной системе координат).
Пусть $f \in C^1[\varphi_0, \varphi_1]$, $f \geq 0$ и

$$\Gamma_f = \{(\varphi, r) : r = f(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$$

— график функции f в полярной системе координат. Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{f^2+(f')^2}\,d\varphi.$$

Доказательство. Действительно, график Γ_f может быть задан следующей параметризацией:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = f(\varphi)\cos\varphi \\ y = f(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1].$$

Дальше остается сослаться на только что доказанную теорему. □

В заключение, еще раз напомним о следующем замечании.

Замечание 206.
Еще раз отметим, что все вышеизложенное относится не только к путям в $\mathbb{R}^2$, но и к путям в $\mathbb{R}^n$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$, доказательства сохраняются.

§ 4. Несобственный интеграл и его свойства

В предыдущих разделах мы подробно обсудили интеграл Римана: и с точки зрения формального построения, и с точки зрения различных приложений. Однако оказывается, что как потребности самой математики, так и приложений, требуют расширения введенного понятия в двух направлениях:

1. Во-первых, хочется отказаться от необходимого условия интегрируемости — в случаях, когда это возможно, научиться определять интеграл от неограниченной функции, пусть и значением $+\infty$.
2. Во-вторых, хочется научиться распространять интеграл Римана с отрезка на неограниченный промежуток.

Разрешением этих вопросов мы и займемся в этом пункте.

(1) Понятие несобственного интеграла

Начнем с того, что введем то основное определение, от которого и будем отталкиваться при построении нового объекта.

Определение 121 (Понятие локальной интегрируемости).
Говорят, что функция f локально интегрируема на множестве E, и пишут $f \in R_{loc}(E)$, если $f \in R[a,b]$ для любого $[a,b] \subset E$.

Итак, локально интегрируемая функция интегрируема на любом отрезке, содержащемся в E. Теперь мы можем ввести основной объект, исследуемый далее.

Определение 122 (Понятие несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. Тогда символ

$$\int\limits_a^b f\ dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a,b)$.

Отметим следующее замечание.

Замечание 207.
Итак, пока что несобственный интеграл для нас — это просто некоторый символ. Попробуем придать этому символу разумное числовое значение. Сделать это можно, основываясь на следующих рассуждениях.

Посмотрим на то, что требуется в определении, — на локальную интегрируемость функции f. То, что функция f оказывается локально интегрируемой на $[a,b)$, позволяет нам рассматривать уже изученные (стандартные) интегралы Римана по множествам $[a,\omega]$, $\omega \in (a,b)$. Дальше же можно совершить стандартный для анализа предельный переход — для определения значения несобственного интеграла по $[a,b)$ можно устремить $\omega \to b-0$ и посмотреть, получится ли что-то разумное.

Сформулируем теперь формальное определение.

Определение 123 (Понятие значения несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$ и $\omega \in [a, b)$. Предел

$$\lim_{\omega \to b-0} \int\limits_a^\omega f\ dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла от функции f по множеству $[a, b)$.

Введем, аналогично тому, что было сделано в теории предела последовательности, понятие сходящегося несобственного интеграла.

Определение 124 (Понятие сходящегося несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$ и $\omega \in [a, b)$. Если предел

$$\lim_{\omega \to b-0} \int\limits_a^\omega f\ dx$$

существует в $\mathbb{R}$, то несобственный интеграл называется сходящимся. Иначе — расходящимся.

Отметим напрашивающееся замечание.

Замечание 208.
Понятно, что все определения, данные выше, и теоремы, доказанные ниже, симметричным образом переносятся на случай $f \in R_{loc}(a, b]$, $-\infty \le a < b < +\infty$. Мы оставляем формулировки и доказательства читателю в качестве упражнения.

Приведем два канонических примера.

Пример 77.
Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Согласно определению,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to +\infty} \int\limits_1^\omega \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to +\infty} \left(\left. \begin{cases} \ln x, & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{x^{\alpha-1}(1-\alpha)}, & \alpha \ne 1 \end{cases} \right) \right|_1^\omega = \begin{cases} +\infty, & \alpha \le 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \end{cases}.$$

Итак, рассматриваемый интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 78.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Согласно определению,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega\to 0+0} \int\limits_\omega^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega\to 0+0} \left(\begin{cases} \ln x, & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{x^{\alpha-1}(1-\alpha)}, & \alpha \neq 1 \end{cases} \right) \Bigg|_\omega^1 = \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases}.$$

Итак, рассматриваемый интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Отметим, что в примерах выше мы рассмотрели два анонсированных в начале этого раздела и качественно отличающихся друг от друга случая: случай интеграла по неограниченному промежутку и случай интеграла от неограниченной функции по промежутку конечной длины. Иногда эти случаи «называют» отдельно.

Определение 125 (Понятия интегралов первого и второго родов).
Несобственный интеграл по неограниченному промежутку часто называется несобственным интегралом первого рода.

Несобственный интеграл от неограниченной функции по промежутку конечной длины часто называется несобственным интегралом второго рода.

Отметим также, что введенное понятие несобственного интеграла и правда расширяет ранее введенное понятие интеграла Римана.

Лемма 78 (О совпадении несобственного интеграла и интеграла Римана).
Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда

$$\lim_{\omega\to b-0} \int\limits_a^\omega f\ dx = \int\limits_a^b f\ dx,$$

где справа стоит интеграл Римана от функции f по отрезку $[a,b]$.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из свойства непрерывности интеграла с переменным верхним пределом (теорема 98). □

Доказанную лемму снабдим следующим пояснением.

Замечание 209.
Итак, только что приведенная лемма утверждает, что в случае, когда функция интегрируема на отрезке $[a,b]$, понятия несобственного интеграла по $[a,b)$ и интеграла Римана по $[a,b]$ совпадают. Можно доказать даже более сильный результат, пары условий: $f \in R_{loc}[a,b)$ и f ограничена на $[a,b)$ достаточно для того, чтобы f была интегрируемой по $[a,b]$ (или чтобы f можно было сделать интегрируемой по $[a,b)$). В итоге, новая ситуация возникает лишь в случае неограниченности f на $[a,b)$.

Для случая неограниченного промежутка подобной аналогии, конечно же, не существует.

Перейдем к изучению свойств введенного объекта.

(2) Свойства несобственного интеграла

Свойства несобственного интеграла во многом аналогичны уже изученным свойствам интеграла Римана. Мы не будем перечислять все эти свойства, а ограничимся лишь теми, что потребуются нам в дальнейшем при изложении теории. Впрочем, как вы увидите, практически все теоремы, верные для интеграла Римана, переносятся на несобственный интеграл с естественными дополнениями и одинаковыми доказательствами, поэтому читатель может получить свое собственное удовольствие, подумав, какие теоремы-таки переносятся, а какие — нет, и «доработать» неозвученное. Итак, пойдем «прямо по пунктам».

Начнем со свойства линейности.

Теорема 117 (О линейности несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$. Если сходятся интегралы

$$\int\limits_a^b f\ dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g\ dx,$$

то

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int\limits_a^b f\ dx + \beta \int\limits_a^b g\ dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-0$ в равенстве, справедливом для интеграла Римана (теорема 93):

$$\int\limits_a^\omega (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int\limits_a^\omega f\ dx + \beta \int\limits_a^\omega g\ dx.$$

□

Отметим важное следствие из доказанной теоремы.

Следствие 30 (О расходимости суммы).
Пусть $f, g \in R_{loc}[a,b)$, причем интеграл от f по $[a,b)$ сходится, а интеграл от g по $[a,b)$ расходится. Тогда интеграл от $f+g$ по $[a,b)$ расходится.

Доказательство. Действительно, если бы сходился интеграл от $f+g$ по $[a,b)$, то по предыдущей теореме сходился бы интеграл от

$$g = (f+g) - f \quad \text{по} \quad [a,b),$$

что противоречит условию. □

Отметим следующее замечание, касаемое «суммы расходящихся интегралов».

Замечание 210.
Пусть $f, g \in R_{loc}[a,b)$, причем интегралы от f и g по $[a,b)$ расходятся. Тогда

интеграл от $f+g$ по $[a,b)$ может как сходиться, так и расходиться. Пусть, скажем,

$$f = g = \frac{1}{x}, \quad x \in [1,+\infty).$$

В этом случае, очевидно, интеграл от $f+g$ по $[1,+\infty)$ расходится, а интеграл от $f-g$ — сходится.

Ровно как и свойство линейности, на несобственные интегралы переносится и свойство аддитивности по промежутку.

Теорема 118 (Об аддитивности по промежутку).
Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$. Тогда для любого $c \in (a,b)$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f\ dx = \int\limits_a^c f\ dx + \int\limits_c^b f\ dx,$$

причем интегралы

$$\int\limits_a^b f\ dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f\ dx$$

сходятся или нет одновременно.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-0$ в равенстве, справедливом для интеграла Римана (теорема 94):

$$\int\limits_a^\omega f\ dx = \int\limits_a^c f\ dx + \int\limits_c^\omega f\ dx.$$

□

Данная теорема позволяет свести вопрос сходимости интеграла к вопросу стремления к нулю остатка или, как еще говорят, «хвоста» интеграла.

Определение 126 (Понятие остатка несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$, $c \in (a,b)$. Тогда

$$\int\limits_c^b f\ dx$$

называется остатком несобственного интеграла от f по $[a,b)$.

Понятно, что в случае сходимости интеграла, остаток должен стремиться к нулю. Оказывается, это является критерием.

Лемма 79.
Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$, $c \in (a,b)$. Тогда сходимость несобственного интеграла от f

по $[a, b)$ равносильна тому, что

$$\lim_{c \to b-0} \int\limits_c^b f\, dx = 0.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть несобственный интеграл от f по $[a, b)$ сходится. Тогда, по теореме об аддитивности по промежутку (теорема 94),

$$\int\limits_a^b f\, dx = \int\limits_a^c f\, dx + \int\limits_c^b f\, dx.$$

Пусть теперь $c \to b - 0$, тогда

$$\lim_{c \to b-0} \int\limits_a^c f\, dx = \int\limits_a^b f\, dx,$$

откуда и следует требуемое.

Докажем достаточность. Пусть остаток интеграла стремится к нулю. Значит, при некотором $c \in (a, b)$

$$\int\limits_c^b f\, dx \in \mathbb{R}.$$

Но тогда, при $\omega > c$ выполнено

$$\int\limits_a^\omega f\, dx = \int\limits_a^c f\, dx + \int\limits_c^\omega f\, dx$$

и при $\omega \to b - 0$ приходим к требуемому. □

Теперь обсудим свойство монотонности несобственного интеграла.

Теорема 119 (О монотонности несобственного интеграла).
Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$, причем

$$\int\limits_a^b f\, dx \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g\, dx \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Если $f \leq g$ на $[a, b)$, то

$$\int\limits_a^b f\, dx \leq \int\limits_a^b g\, dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b - 0$

в неравенстве, справедливом для интеграла Римана (теорема 95):

$$\int\limits_a^\omega f\ dx \le \int\limits_a^\omega g\ dx.$$

□

Теперь обсудим формулу интегрирования по частям

Теорема 120 (Формула интегрирования по частям).
Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b uv'\ dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'\ dx, \quad uv\Big|_a^b = \lim_{\omega \to b-0} u(\omega)v(\omega) - u(a)v(a),$$

или

$$\int\limits_a^b u\ dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\ du,$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует (в $\mathbb{R}$) хотя бы два предела из трех.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b - 0$ в верном для интеграле Римана (теорема 102) равенстве:

$$\int\limits_a^w uv'\ dx = uv\Big|_a^w - \int\limits_a^w vu'\ dx.$$

□

Перейдем теперь к важной для практике формуле замены переменной. Оказывается, с ней не все так гладко: в результате замены переменной из несобственного интеграла можно получать интеграл Римана, и наоборот. Давайте сначала разберемся с самой теоремой, а потом посмотрим примеры.

Теорема 121 (Формула замены переменной).
Пусть $f \in C[A, B)$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta) \to [A, B)$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$. Пусть, кроме того, существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f\ dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi'\ dt,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi)\varphi'\,dt, \quad F(C) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{C} f\,dx.$$

Согласно формуле замены переменной в интеграле Римана (теорема 103), $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$.
1. Пусть существует

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f\,dx = I \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Докажем, что второй интеграл тоже существует и равен I. Пусть $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$, причем $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \in [A, B)$ и $\varphi(\gamma_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\beta - 0)$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\gamma_n) = \lim_{n\to\infty} F(\varphi(\gamma_n)) = I.$$

В силу произвольности последовательности γ_n, приходим к требуемому.
2. Пусть теперь существует

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi'\,dt = I \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Докажем, что второй интеграл тоже существует. Тогда, по уже доказанному в первом пункте, он равен I. Если $\varphi(\beta - 0) \in [A, B)$, то интеграл существует в собственном смысле, и доказывать нечего. Пусть теперь $\varphi(\beta - 0) = B$. Пусть $C_n \in [A, B)$, $C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B$. Не нарушая общности можно считать, что $C_n \in [\varphi(\alpha), B)$. По теореме Больцано–Коши, найдутся точки $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$, что $\varphi(\gamma_n) = C_n$. Покажем, что $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$.

Если некоторая подпоследовательность $\gamma_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \tau \in [\alpha, \beta)$, то, по непрерывности φ, $\varphi(\gamma_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\tau) < B$, что неверно. Значит, $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$ и

$$\lim_{n\to\infty} F(C_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\gamma_n) = I.$$

$\square$

Приведем интересный пример.

Пример 79.
Вычислить (собственный) интеграл

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Воспользуемся подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Функция $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg} t$ — это функция, отображающая $[0, +\infty)$ на $[0, \pi)$. Так как

$$dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = \pi,$$

то

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Как видно в приведенном примере, после замены переменной собственный интеграл (интеграл Римана) был сведен к несобственному интегралу. В принципе, в доказанном равенстве возможны все варианты: два несобственных интеграла, два собственных интеграла, один собственный, а один — несобственный интегралы.

Приведем и одно удобное для дальнейшего замечание. Оказывается, интеграл второго рода (от неограниченной функции) может быть приведен к интегралу первого рода (по бесконечному промежутку). Это позволит нам рассматривать в качестве примеров лишь интегралы по бесконечному промежутку.

Замечание 211.
Доказанные теоремы о замене переменной позволяют свести интегралы по конечному промежутку $[a,b)$ к интегралам по бесконечному промежутку. Действительно, отображение

$$x = b - \frac{1}{t} : \left[\frac{1}{b-a}, +\infty\right) \to [a,b)$$

приводит интеграл второго рода к интегралу первого рода:

$$\int\limits_a^b f\, dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\, \frac{dt}{t^2}.$$

Значит, не нарушая общности, в дальнейшем можно исследовать интегралы лишь по бесконечному промежутку. Мы будем пользоваться этим соображением при рассмотрении примеров.

§ 5. Признаки сравнения. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости

1 Признаки сравнения

В приложениях часто оказывается важным не само значение несобственного интеграла, а вывод о его сходимости. Как показывает практика, часто этот вопрос оказывается совершенно нетривиальным. В этом разделе мы рассмотрим одну из наиболее простых ситуаций — ситуацию, когда подынтегральная функция не меняет знак. В этом случае вопрос (глобально) решается просто-напросто при помощи теоремы Вейерштрасса (теорема 22), а все рассуждения опираются на рассуждениях о площадях.

Теорема 122 (Критерий сходимости интеграла от знакопостоянной функции). Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$. Тогда функция

$$F(\omega) = \int\limits_a^\omega f\ dx, \quad \omega \in [a, b),$$

возрастает, а сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f\ dx$$

равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.

Доказательство. Ясно, что если $a \leq \omega_1 \leq \omega_2 < b$, то, так как $f \geq 0$, по свойству интеграла Римана (теорема 95),

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f\ dx \geq 0.$$

Но тогда

$$F(\omega_2) = \int\limits_a^{\omega_2} f\ dx = \int\limits_a^{\omega_1} f\ dx + \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f\ dx \geq \int\limits_a^{\omega_1} f\ dx = F(\omega_1),$$

откуда $F(\omega_2) \geq F(\omega_1)$, что и доказывает неубывание $F(\omega)$.

Значит, вопрос сходимости несобственного интеграла, то есть вопрос существования конечного предела $F(\omega)$ при $\omega \to b - 0$, сводится к теореме Вейерштрасса (теорема 22). Как мы знаем, конечность предела (или сходимость заявленного интеграла) в этом случае равносильна ограниченности $F(\omega)$. □

Теперь установим теорему, утверждения которой часто называют признаками сравнения.

Теорема 123 (Признаки сравнения). Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$ и $0 \leq f \leq g$ при $x \in [a, b)$. Тогда:

1. Сходимость интеграла от g по $[a,b)$ влечет сходимость интеграла от f по $[a,b)$, то есть
$$\int\limits_a^b g\ dx < +\infty \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b f\ dx < +\infty.$$
2. Расходимость интеграла от f по $[a,b)$ влечет расходимость интеграла от g по $[a,b)$, то есть
$$\int\limits_a^b f\ dx = +\infty \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b g\ dx = +\infty.$$
3. Если $f \sim g$ при $x \to b-0$, то интегралы от f и g по $[a,b)$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Согласно предыдущей теореме, функция
$$F(\omega) = \int\limits_a^\omega f\ dx$$
не убывает с ростом ω. Используя монотонность интеграла Римана, а также используя теорему Вейерштрасса (теорема 22), при каждом $\omega \in [a,b)$ справедлива цепочка неравенств:
$$F(\omega) = \int\limits_a^\omega f\ dx \le \int\limits_a^\omega g\ dx \le \sup_{\omega\in[a,b)} \int\limits_a^\omega g\ dx = \int\limits_a^b g\ dx < +\infty,$$
где последнее неравенство выполнено, согласно условию. Но тогда $F(\omega)$ ограничена, а значит, по предыдущей теореме, интеграл от f по $[a,b)$ сходится.
2. От противного. Пусть интеграл
$$\int\limits_a^b g\ dx$$
сходится. Тогда, по только что доказанному первому пункту, сходится и
$$\int\limits_a^b f\ dx,$$
что противоречит условию.
3. Согласно определению, эквивалентность f и g при $x \to b-0$ означает, что существует такая функция α, что
$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \text{при} \quad x \in U(b)\cap[a,b), \quad \text{причем} \quad \lim_{x\to b-0}\alpha(x) = 1.$$
Тогда существует $\Delta > a$, что при $x \in [\Delta, b)$ выполняется неравенство
$$\frac{1}{2} \le \alpha(x) \le \frac{3}{2},$$

откуда, при $x \in [\Delta, b)$,

$$\frac{1}{2}g(x) \le f(x) \le \frac{3}{2}g(x).$$

Кроме того, сходимость интегралов

$$\int\limits_a^b f\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g\,dx$$

равносильна (лемма 82) сходимости интегралов

$$\int\limits_\Delta^b f\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_\Delta^b g\,dx.$$

Для последних же рассуждения проводятся с использованием пунктов 1 и 2 данной теоремы, опираясь на приведенное выше неравенство.

Скажем, если сходится интеграл от g по $[\Delta, b)$, то, используя правую часть полученного неравенства, сходится и интеграл от f по $[\Delta, b)$. Если же расходится интеграл от f по $[\Delta, b)$, то, опять же, используя правую часть того же самого неравенства, расходится и интеграл от g по $[\Delta, b)$. Аналогичные рассуждения относительно левого неравенства завершают доказательство. □

Отметим и следующее напрашивающееся замечание.

Замечание 212.
Приведенная теорема имеет понятное геометрическое толкование:

1. Первый пункт утверждает, что если площадь под графиком большей (неотрицательной) функции конечна, то и площадь под графиком меньшей (неотрицательной) функции конечна.
2. Второй пункт, наоборот, из бесконечности площади под графиком меньшей (неотрицательной) функции делает заключение о бесконечности площади под графиком большей (неотрицательной) функции.
3. Третий пункт проиллюстрировать несколько сложнее: эквивалентность функций позволяет «зажать» снизу и сверху площадь под графиком одной из (неотрицательных) функций около «особой» точки площадью под графиком второй из (неотрицательных) функций, умноженной на некоторые константы. Это влечет одновременную конечность или бесконечность площадей. Впрочем, если проанализировать доказательство теоремы, то в нем ровно это и сказано, правда, не словами.

Приведем примеры.

Пример 80.
Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}}\,dx.$$

Ясно, что у этого интеграла особенность на верхнем пределе — это $+\infty$. Заметим, что функция под интегралом положительна и упростим подынтегральную функцию при $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{x}{x^{7/3}\sqrt[3]{1/x^7+1}} \sim \frac{x}{x^{7/3}} = \frac{1}{x^{4/3}}.$$

Так как интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$$

сходится, то, по 3 пункту теоремы о признаках сравнения (теорема 123), сходится и исходный интеграл.

Пример 81.
Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

На первый взгляд может показаться, что у данного интеграла две особенности: в точках 0 и $+\infty$. Однако, это не так. В окрестности нуля функция ограничена и интеграл имеет смысл рассматривать как собственный. Значит, осталось выяснить поведение интеграла на $+\infty$. Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

и исследуем на сходимость второй. Функция под интегралом неотрицательна, можно пользоваться признаками сравнения. Так как

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2},$$

а интеграл от последней функции по $[1, +\infty)$ сходится, то сходится и исходный интеграл.

② Критерий Коши

Так как значение несобственного интеграла — это значение некоторого предела, то, как обычно, справедлив так называемый критерий Коши.

Теорема 124 (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла).

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Для того чтобы интеграл

$$\int_a^b f\ dx$$

сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a, b):\ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \quad \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f\ dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \int_a^\omega f\ dx.$$

Согласно определению, сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(\omega)$ при $\omega \to b - 0$. Согласно критерию Коши существования предела функции (теорема 23), это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a, b):\ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \quad |F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon.$$

Последнее же неравенство, в силу свойств интеграла, переписывается как

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon\ \Leftrightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f\ dx \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. □

На «бытовом уровне» критерий Коши можно сформулировать так: интеграл сходится тогда и только тогда, когда для любого наперед заданного положительного числа ε, находясь достаточно близко к точке b любой «хвост» интеграла оказывается меньше, чем ε.

Критерием Коши, как нам уже известно, редко пользуются для доказательства сходимости интеграла, а вот для доказательства расходимости — постоянно. Перед тем как привести пример напомним, как выглядит отрицание критерия Коши.

Замечание 213.
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Для того чтобы интеграл

$$\int_a^b f\ dx$$

расходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall \Delta\ \exists \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b): \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f\ dx \right| \geq \varepsilon.$$

Приведем пример.

Пример 82.
Доказать расходимость интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx.$$

Возьмем $\delta_1^n = \pi n$, $\delta_2^n = 2\pi n$. Покажем, что интеграл по промежутку $[\delta_1^n, \delta_2^n]$ не стремится к нулю с ростом n. Действительно,

$$\int\limits_{\delta_1^n}^{\delta_2^n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x|\, dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |\sin x|\, dx = \frac{1}{\pi}.$$

Итак, согласно критерию Коши, интеграл расходится.

Прокомментируем то, что произошло.

Замечание 214.
В нашем примере в качестве ε из отрицания критерий Коши можно взять $1/\pi$. Так как $\delta_i^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, то условие

$$\forall \Delta\ \exists \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b)$$

обеспечено.

Итак, для выбранного $\varepsilon = 1/\pi$ мы «произвольно близко» к $+\infty$ нашли хвост интеграла, больший, чем ε. Это доказывает расходимость интеграла.

(3) Абсолютная и условная сходимости

Если функция не сохраняет знак вблизи особой точки, то выделяют дополнительный тип сходимости — абсолютную сходимость.

Определение 127 (Понятие абсолютной сходимости).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^b |f|\, dx.$$

Итак, абсолютная сходимость – это сходимость интеграла от модуля функции. Резонно задаться вопросом, как абсолютная сходимость связана со сходимостью. Справедлива следующая теорема.

Теорема 125 (О сходимости абсолютно сходящегося интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, то, согласно критерию Коши (теорема 124),

$$\exists \Delta : \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \quad \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f| \ dx \right| < \varepsilon.$$

Но, согласно свойствам интеграла,

$$\left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f \ dx \right| \leq \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f| \ dx \right| < \varepsilon,$$

а значит, по критерию Коши (теорема 124), интеграл от f по $[a, b)$ сходится. □

Приведем примеры.

Пример 83.
Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} \ dx.$$

Мы видели, что абсолютной сходимости у данного интеграла нет. В то же время, интегрируя по частям, получам

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} \ dx = -\frac{\cos x}{x^2} \Big|_1^{\infty} - \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} \ dx.$$

Внеинтегральная подстановка дает конечное значение $\cos 1$, а интеграл справа сходится абсолютно, ведь

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{и} \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{сходится},$$

а значит сходится. В итоге, исходный интеграл сходится.

Случай, когда интеграл сходится, но не сходится абсолютно, выделяют отдельно.

Определение 128.
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл от f по $[a, b)$ сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что интеграл сходится условно.

Так, мы видим, что интеграл в предыдущем примере сходится условно.

4 Случай нескольких особенностей

До сих пор мы рассматривали лишь те ситуации, где особенность у интеграла была на левом или правом конце промежутка интегрирования. Конечно, это далеко не общий и, что самое главное, далеко не самый часто встречающийся на практике случай. Однако, более общие случаи мы сможем свести к уже рассмотренному.

Для начала обобщим ранее введенное определение на случай, когда интеграл имеет особенности на обоих концах рассматриваемого промежутка.

Определение 129 (Понятие несобственного интеграла с двумя особенностями на концах).
Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Тогда символ

$$\int\limits_a^b f\ dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству (a, b).

Как и ранее, введем понятие значения несобственного интеграла.

Определение 130 (Понятие значения несобственного интеграла с двумя особенностями на концах).
Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Тогда величина

$$\lim_{\omega_1 \to a+0} \int\limits_{\omega_1}^{c} f\ dx + \lim_{\omega_2 \to b-0} \int\limits_{c}^{\omega_2} f\ dx,$$

если оба предела существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и не равны бесконечностям разных знаков, называется значением несобственного интеграла от функции f по множеству (a, b).

Итак, по сути дела мы определили значение несобственного интеграла с особенностями на обоих концах рассматриваемого промежутка как сумму значений несобственных интегралов, каждый из которых имеет ровно одну особенность, то есть свели вопрос к уже ранее изученному. Значение интеграла определено в том и только том случае, когда написанная сумма пределов определена в $\overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 215.
Хотя мы это вскользь и упомянули, все-таки отметим отдельно, что введенное определение не зависит от выбора точки c. Пусть, скажем, $c_1 < c_2$, $a < \omega_1 < c_1$, $c_2 < \omega_2 < b$. Тогда, по свойствам интеграла Римана,

$$\lim_{\omega_1 \to a+0} \int\limits_{\omega_1}^{c_1} f\ dx + \lim_{\omega_2 \to b-0} \int\limits_{c_1}^{\omega_2} f\ dx =$$

$$= \lim_{\omega_1 \to a+0} \left(\int\limits_{\omega_1}^{c_2} f\ dx + \int\limits_{c_2}^{c_1} f\ dx \right) + \lim_{\omega_2 \to b-0} \left(\int\limits_{c_1}^{c_2} f\ dx + \int\limits_{c_2}^{\omega_2} f\ dx \right) =$$

$$= \lim_{\omega_1 \to a+0} \int\limits_{\omega_1}^{c_2} f\ dx + \lim_{\omega_2 \to b-0} \int\limits_{c_2}^{\omega_2} f\ dx.$$

Детали остаются читателю.

Итак, после сделанного замечания мы вправе определить несобственный интеграл с особенностями на обоих концах рассматриваемого промежутка (или, точнее, его значение) как сумму несобственных интегралов следующим образом:

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx,$$

если выражение справа определено в $\overline{\mathbb{R}}$. В частности, все ранее изученные свойства переносятся на новый объект с естественными изменениями.

Определение 131.
Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и $f \in R_{loc}(a,b)$. Если

$$\left(\lim_{\omega_1 \to a+0} \int_{\omega_1}^{c} f\,dx + \lim_{\omega_2 \to b-0} \int_{c}^{\omega_2} f\,dx\right) \in \mathbb{R}$$

то несобственный интеграл от функции f по (a,b) называется сходящимся, иначе — расходящимся.

Не вдаваясь в детали отметим, что похожим образом можно определить интеграл с большим (конечным) числом особенностей. Все результаты, как и результаты о типах сходимостей, переносятся. Расшифровку мы оставляем заинтересованному читателю.

5 Интеграл Эйлера–Пуассона

В данном разделе мы приведем пример, касающийся, скорее, очень заинтересованных читателей, но незаменимый в дальнейшем в теории вероятностей. Покажем, что

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Написанный интеграл часто называют интегралом Эйлера–Пуассона.

Замечание 216.
Как мы выяснили ранее, раз данный интеграл имеет две особенности, то его следует понимать как сумму двух интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{c} e^{-x^2}\,dx + \int_{c}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Начнем с одной технической леммы.

Лемма 80.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases}, \quad n,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Легко проверить, что $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$. Пусть $n > 1$, тогда

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+(n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

где последнее равенство верно в силу того, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. В итоге,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

откуда легко получается требуемое. □

Вычислению интеграла Эйлера–Пуассона предпошлем формулу Валлиса – исторически первую формулу, представляющую (иррациональное) число π в виде последовательности рациональных чисел.

Лемма 81 (Формула Валлиса).

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Доказательство. Ясно, что при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Обозначив

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx,$$

получим $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, откуда, по предыдущей лемме,

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Пусть

$$x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2,$$

тогда

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi,$$

откуда, по теореме о сжатой переменной (теорема 10), получается требуемое. □

Теперь мы готовы доказать основную теорему данного пункта.

Теорема 126 (Интеграл Эйлера–Пуассона).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Легко проверить, что при $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$e^x \geq 1 + x.$$

Тогда

$$(1-x^2) \leq e^{-x^2} = (e^{x^2})^{-1} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Будем рассматривать левое неравенство при $x \in [-1,1]$, а правое — при $x \in \mathbb{R}$, тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$(1-x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^k},$$

а значит, в силу неотрицательности интеграла от неотрицательной функции и монотонности интеграла,

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^k\,dx \leq \int\limits_{-1}^{1} e^{-kx^2}\,dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}\,dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^k}.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = \sin t$, а в последнем замену $x = \operatorname{tg} t$. Тогда, согласно формуле замены переменной, придем к неравенству

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2k+1} t\,dt \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}\,dx \leq \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2k-2} t\,dt,$$

откуда, в силу четности косинуса,

$$2\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^{2k+1} t\,dt \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}\,dx \leq 2\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^{2k-2} t\,dt.$$

Так как, как было показано ранее,

$$\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n = 2k\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1\end{cases}, \quad n,k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

то приходим к цепочке неравенств

$$2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}\ dx \leq 2\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Сделаем в интеграле замену $t=\sqrt{k}x$ и придем к неравенству

$$2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \pi\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

или

$$2\sqrt{k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \pi\sqrt{k}\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}.$$

По формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}.$$

Тогда

$$2\sqrt{k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sqrt{\pi}$$

и

$$\pi\sqrt{k}\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^{-1}\frac{2k}{2k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sqrt{\pi}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы о сжатой переменной (теорема 10).

□

Глава 8
Числовые ряды

Математика – это доказательство самых очевидных вещей наименее очевидным способом.

Пойа

До сих пор понятие суммы имело место лишь для конечного числа слагаемых. Теория рядов – в частности, числовых – это формализация наивного представления о том, что должно получиться, если «сложить бесконечно много чисел одно за другим».

§ 1. Введение в теорию числовых рядов

Прежде чем вводить какое-либо понятие, его (понятие) бывает очень полезно тщательно мотивировать. Ниже мы обсудим несколько «якорей» — моментов, в которых возникает вопрос о поведении неограниченного числа слагаемых, а также о возможных операциях с ними. Мы коснемся как чисто «анализных» вопросов, так и вопросов элементарной физики (читай — задачи на равномерное движение), и даже вопросов геометрии.

1 Наводящие соображения

Сразу начнем с некоторых, на наш взгляд, мотивирующих примеров.

Пример 84 (Вопросы анализа).
Теорема об арифметических свойствах пределов последовательностей решает вопрос о пределе суммы в случае, когда количество слагаемых конечно (и, скажем, все эти слагаемые имеют предел, теорема 7). Но что, если количество слагаемых неограниченно растет с ростом n? Например, рассмотрим уже знакомую нам (пример 17), и играющую ключевую роль в теории рядов, последовательность

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Какой у нее предел? Если попробовать воспользоваться теоремой о пределе суммы, то, так как предел каждого слагаемого равен нулю, хочется сказать, что и предел последовательности x_n равен 0. Но это предположение очень легко разрушить, ведь легко проверить, что

$$x_n \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2},$$

что никак не может быть в случае, если x_n стремится к нулю. Проблема, как вы, наверное, догадываетесь, заключается в том, что с ростом числа n растет (причем неограниченно!) и число слагаемых последовательности x_n. Что такое сумма неограниченного числа слагаемых – это вопрос, подлежащий отдельному обсуждению.

Теперь обсудим «физический» пример.

Пример 85 (Вопросы физики).
На ту же тему существует и одна из апорий древнегреческого философа Зенона, известная под названием «Ахиллес и черепаха». Сформулировать ее можно, допустим, следующим образом. «Предположим, что Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху».

Что же, посмотрим, в чем же здесь камень преткновения. Давайте обозначим изначальное расстояние между Ахиллесом и черепахой за S, пусть v — скорость черепахи, тогда $10v$ — скорость Ахиллеса. Будем рассуждать как Зенон, но в математических обозначениях. Расстояние S Ахиллес пробежит за время

$$t_1 = \frac{S}{10v}.$$

За это же время черепаха удалится от начальной позиции на расстояние, равное

$$S_1 = vt_1 = \frac{S}{10}.$$

Расстояние S_1 Ахиллес преодолеет за время

$$t_2 = \frac{S_1}{10v} = \frac{S}{10^2 v},$$

а черепаха за время t_2 переместится на расстояние

$$S_2 = vt_2 = \frac{S}{10^2}.$$

Понятно, что таким образом описанный процесс погони не будет иметь конца, а значит разумно (?) утверждать, что Ахиллес никогда не догонит черепаху, ведь она всегда будет хоть и не намного, но впереди него. Так ли это?

Для ответа на поставленный вопрос выясним, чему же равно суммарное время погони T Ахиллеса за черепахой. Ясно, что это время равно

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n + \ldots,$$

и перед нами снова сумма бесконечного числа слагаемых. Ошибка рассуждений в Древней Греции заключалась в следующем: люди считали, что сумма бесконечного числа положительных слагаемых всегда равна бесконечности. Но, как оказывается, это не всегда так. Давайте запишем нашу «сумму» через данные нам величины:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n + \ldots = \frac{S}{10v} + \frac{S}{10^2 v} + \frac{S}{10^3 v} + \ldots + \frac{S}{10^n v} + \ldots =$$

$$= \frac{S}{v}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots\right).$$

Сумма, написанная в скобках, — это хорошо известная из школы сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому мы приходим к тому, что

$$T = \frac{S}{v} \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{S}{9v}$$

— вполне себе конечная величина при известных S и v.

Обсудим и весьма наглядную геометрическую иллюстрацию.

Пример 86 (Вопросы геометрии).
Еще одной иллюстрацией того, что сумме бесконечного числа слагаемых имеет смысл придать какой-то смысл, можно считать следующее наблюдение. Предположим, что перед нами имеется квадрат размера 1×1. Понятно, что его площадь

равна 1. Давайте теперь «замостим» квадрат следующим образом: сначала отсечем от него прямоугольник с ребрами 1 и 0.5 площади 0.5. Далее, от оставшегося прямоугольника отсечем прямоугольник с ребрами 0.5 и 0.5 площади 0.5^2. От оставшегося прямоугольника отсечем прямоугольник с ребрами 0.5 и 0.5^2 площади 0.5^3, и так далее.

Геометрически очевидно, что суммарная площадь замощения должна в итоге составить площадь исходного квадрата. И чему же равна суммарная площадь замощения? Опять-таки, она равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а именно:

$$0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + \ldots + 0.5^n + \ldots = \frac{0.5}{1 - 0.5} = 1.$$

② Понятие ряда и его суммы

Как мы уже отмечали, до настоящего момента мы, если и рассматривали, то сумму конечного числа слагаемых. Примеры выше показывают, что такой подход не может в полной мере считаться удовлетворительным. Сродни тому, как мы вводили несобственные интегралы, введем понятие ряда.

Определение 132 (Понятие ряда).
Пусть дана последовательность a_k. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

называется числовым рядом с общим членом a_k.

Теперь введем подготовительно понятие — понятие частичной суммы ряда.

Определение 133 (Понятие частичной суммы ряда).
n-ой частичной суммой ряда с общим членом a_k называется величина

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Итак, частичная сумма – это сумма некоторого конечного количества слагаемых, взятых «от начала» ряда.

Замечание 217.
Отметим, что таким образом введенная последовательность S_n определена корректно: каждый ее член — это сумма конечного числа элементов последовательности a_k.

Теперь введем напрашивающееся понятие суммы ряда.

Определение 134 (Понятие суммы ряда).

Суммой ряда с общим членом a_k называют предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Отметим и следующее замечание.

Замечание 218.
Заинтересованный читатель может отметить явное сходство того, что мы проделали несколькими определениями выше, и того, что происходило в теории несобственного интеграла. Там, для существования «частичной суммы», мы требовали локальную интегрируемость функции. В остальном же все было сделано ровно аналогичным образом.

Как и в теории несобственных интегралов, разумным оказывается введение следующего определения.

Определение 135 (Понятие сходящегося ряда).
Ряд с общим членом a_k называется сходящимся, если его сумма существует в $\mathbb{R}$. Иначе ряд называется расходящимся.

Понятно, что ряд оказывается сходящимся в том и только том случае, когда последовательность его частичных сумм сходится, и расходящимся, когда она расходится. Приведем примеры, иллюстрирующие введенные понятия. Начнем с самых, на наш взгляд, тривиальных.

Пример 87.
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 0$ сходится, а его сумма, как легко понять, равна 0.

Теперь приведем пример расходящегося ряда.

Пример 88.
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, так как

$$S_n = n, \quad S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Сумма написанного ряда, как видно, равна $+\infty$.

Теперь рассмотрим расходящийся ряд, не имеющий суммы.

Пример 89.
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ расходится, так как последовательность его частичных сумм, задаваемая следующим образом:

$$S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$$

не имеет предела.

Приведем теперь более содержательный пример, а заодно поймем, почему существует сумма у бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 90 (Геометрический ряд).
Пусть $a \in \mathbb{R}$. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k,$$

называемый в дальнейшем геометрическим рядом.

Ясно, что согласно (или по аналогии) примерам, приведенным выше, при $a = \pm 1$ он расходится. Если же $a \neq \pm 1$, то

$$S_n = a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a(1-a^n)}{1-a}.$$

Эта последовательность имеет конечный предел лишь когда $|a| < 1$. В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-a}.$$

Иначе ряд расходится.

Итак, как показано, «бесконечная сумма» геометрической прогрессии определена в том и только том случае, когда модуль знаменателя прогрессии меньше 1. Это и есть ситуация, в которой прогрессия называется «бесконечно убывающей». Приведем еще один пример.

Пример 91 (Телескопическая сумма).
Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Ясно, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Значит, ряд сходится к сумме 1.

Отметим одно важное замечание.

Замечание 219.
Нумерация общего члена ряда может начинаться не только с 1, но и с любого $m \in \mathbb{Z}$. Определение ряда

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots$$

с общим членом a_k, $k \geq m$, дается аналогичным образом.

Пусть $n \geq m$, тогда частичные суммы ряда разумно определить равенством

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Остальные определения остаются неизменными.

§ 2. Критерий Коши сходимости ряда

(1) Критерий Коши

Так как сходимость ряда эквивалентна конечности предела последовательности частичных сумм, то понятно, что возникает издавна нам известный критерий Коши. Сформулируем основную теорему данного пункта.

Теорема 127 (Критерий Коши).
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно определению, сходимость ряда — это сходимость последовательности его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

По критерию Коши (теорема 16) эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно тому, что $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$ □

Итак, перед нами снова весьма известное утверждение, которое коротко, но не очень точно, по отношению к рядам может быть сформулировано следующим образом: ряд сходится тогда и только тогда, когда для любого наперед заданного порога ε, начиная с некоторого момента любой «хвост» ряда будет меньше, чем ε.

Как обычно, критерий Коши чаще используется для доказательства расходимости ряда.

Замечание 220.
Запишем отрицание критерия Коши.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n > n_0, \ \exists p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \geq \varepsilon.$$

Теперь применим введенный критерий к исследованию важного ряда — гармонического.

(2) Исследование гармонического ряда

Используя сформулированное отрицание критерия Коши, докажем расходимость так называемого гармонического ряда.

Пример 92 (Гармонический ряд).
Исследовать на сходимость (гармонический) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Положим в критерии Коши $p = n$ и рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Итак, взяв $\varepsilon = 0.5$, для любого наперед заданного n_0 достаточно взять $n > n_0$ и $p = n$, чтобы сумма

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

была больше, чем 0.5. Тем самым, мы попадаем в рамки отрицания критерия Коши, и рассматриваемый ряд расходится.

§ 3. Свойства сходящихся рядов

В этом разделе мы обсудим простейшие свойства сходящихся рядов. По своей сути, все они вытекают из вполне аналогичных свойств сходящихся последовательностей.

① Необходимое условие сходимости ряда

В этом пункте мы установим, вроде как, интуитивно понятный факт: общий член сходящегося ряда на бесконечности стремится к нулю. Ну правда же, если общий член ряда не стремится к нулю, то как же «хвост» ряда может быть сколь угодно мал? Отметим это соображение в виде теоремы.

Теорема 128 (Необходимое условие сходимости ряда).
Пусть ряд с общим членом a_k сходится. Тогда

$$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Так как ряд сходится, то, так как S_{n-1} – подпоследовательность S_n, то (теорема 27)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}.$$

Но тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0.$$

□

Отметим несколько важных замечаний.

Замечание 221.
Обратное утверждение к утверждению, сформулированному в теореме, вообще говоря неверно. Общий член расходящегося ряда может стремиться к нулю на бесконечности, что мы видели на примере гармонического ряда (пример 92).

Замечание 222.
Отметим отдельно, что аналогичного доказанному утверждению факта в теории несобственного интеграла не было. Пояснять это можно по-разному. Мы ограничимся следующим примером. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Легко понять, что (теорема 89)

$$\int\limits_0^{\infty} f\, dx = 0,$$

но на бесконечности не существует предела функции f. Без дополнительных пояснений отметим, что f в примере можно сделать и непрерывной на $[0, +\infty)$, и даже непрерывной и положительной.

(2) Сходимость ряда в терминах остатков

Теперь обратимся к еще одному объекту, ассоциируемому с рядами — к остатку ряда.

Определение 136.
Пусть дан ряд с общим членом a_k. Тогда

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

называется m-ым остатком ряда.

Мотивировка введенного понятия должна быть прозрачна, ведь для любого $m \in \mathbb{N}$ хочется записать

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_m + R_m,$$

где S_m — m-ая частичная сумма ряда, R_m — m-ый остаток. Конечно, существование сумм написанных объектов нуждается в некотором пояснении, чем мы сейчас и займемся.

Итак, сформулируем теорему о сходимости ряда в терминах остатков этого ряда.

Лемма 82 (О сходимости ряда в терминах остатков).
Для сходимости ряда с общим членом a_k необходимо и достаточно, чтобы сходился любой его остаток R_m. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + R_m = S_m + R_m.$$

Доказательство. Ясно, что при $n > m$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Так как первое слагаемое после знака равенства — число, не зависящее от n, то сходимость исходного ряда равносильна сходимости R_m. Заявленное равенство получается предельным переходом. □

Отметим и следующее очевидное замечание.

Замечание 223.
На самом деле, в плане достаточности предыдущее утверждение можно ослабить: для сходимости исходного ряда достаточно, чтобы сходился какой-то из остатков R_m. Впрочем, из этого сразу следует и сходимость любого остатка.

Отметим еще одно полезное утверждение.

Лемма 83 (О стремлении остатка к нулю).
Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m\to\infty} R_m = 0.$$

Доказательство. 1. Докажем необходимость. Пусть ряд сходится. Тогда, по предыдущей лемме,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_m + R_m.$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$, то $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$.
2. Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$. Тогда для всех номеров m определен и конечен R_m, а значит, например, сходится R_1. Но тогда, по замечанию выше, сходится и ряд. □

Эта теорема интуитивно должна быть очень хорошо понятна, она в какой-то степени вторит критерию Коши: чем «короче хвост» ряда мы берем, тем он меньше.

③ Линейность и монотонность суммирования

В этом пункте мы обсудим некоторые арифметические операции над сходящимися рядами. Отметим, однако, что на данный момент список освещаемых нами операций будет весьма скуден: мы поговорим лишь о линейности и монотонности. Остальные свойства вроде ассоциативности или коммутативности оказываются весьма «хитрыми», к ним мы вернемся несколько позже.

Начнем со свойства линейности.

Лемма 84 (О линейности суммирования).
Пусть сходятся ряды с общими членами a_k и b_k. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд с общим членом $\alpha a_k + \beta b_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S^B \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение. □

Теперь рассмотрим свойство монотонности суммирования.

Лемма 85 (О монотонности суммирования).
Пусть $a_k \le b_k$ и ряды с общими членами a_k и b_k имеют суммы в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \le S_n^B \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} S_n^A \le \lim_{n\to\infty} S_n^B \;\Rightarrow\; S^A \le S^B.$$

□

§ 4. Признаки сравнения. Обобщенный гармонический ряд

(1) Признаки сравнения

Как и в случае с несобственными интегралами, при рассмотрении сходимости рядов очень редко удается сделать это, как говорится, по определению. Все потому, что частичные суммы ряда редко удается «схлопнуть» в некоторую компактную форму, из которой сразу очевидны сходимость или расходимость. В то же время, для применения численных методов суммирования рядов важно знать: сходится ряд или нет. Поэтому здесь и в последующих пунктах мы займемся изучением признаков сходимости рядов. Сначала — признаков сходимости рядов с неотрицательными членами.

Как и в случае несобственных интегралов, признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами опираются на следующую адаптацию теоремы Вейерштрасса — критерия сходимости монотонной последовательности.

Теорема 129 (Критерий сходимости ряда с положительными членами).
Пусть $a_k \geq 0$. Тогда последовательность частичных сумм ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

возрастает и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм.

Доказательство. Так как $a_k \geq 0$, то

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n.$$

Тем самым, вопрос о наличии (и конечности) предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n (теорема Вейерштрасса (теорема 11)). □

Теперь, аналогично тому как было сделано в несобственных интегралах, докажем так называемые признаки сравнения.

Теорема 130 (Признаки сравнения).
Пусть $0 \leq a_k \leq b_k$. Тогда:

1. Сходимость ряда с общим членом b_k влечет сходимость ряда с общим членом a_k, то есть
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$
2. Расходимость ряда с общим членом a_k влечет расходимость ряда с общим

членом b_k, то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty.$$

3. Если $a_k \sim b_k$ при $k \to +\infty$, то ряды с общими членами a_k и b_k сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Обозначим

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A, согласно предыдущей теореме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.
2. Докажем второй пункт. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k, то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k. Это противоречит условию.
3. Докажем третий пункт. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \; \forall k > k_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2} b_k.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичным рассуждениям в соответствующей теореме 123 про интегралы, и остаются в качестве упражнения. □

Прокомментируем полученные результаты.

Замечание 224.
Приведенная теорема, как нам кажется, должна быть интуитивно понятна:

1. Первый пункт утверждает, что если сходится ряд, слагаемые в котором больше, то сходится и ряд, слагаемые в котором меньше.
2. Второй пункт утверждает, что если расходится ряд с меньшими слагаемыми, то расходится и ряд с большими слагаемыми.
3. Третий пункт говорит о том, что если общие члены при больших k ведут себя «похожим образом», то и ряды с этими общими членами ведут себя одинаково: либо оба ряда сходятся, либо оба ряда расходятся.

Применим теперь доказанную теорему к исследованию одного «эталонного» ряда – обобщенного гармонического ряда или ряда Дирихле.

2 Обобщенный гармонический ряд

В случае рассмотрения несобственных интегралов, особая роль отводилась интегралу от функции $1/x^\alpha$ (что по конечному, что по бесконечному промежутку). В теории рядов есть естественный аналог – ряд с общим членом $1/k^\alpha$. Исследуем вопрос о его сходимости.

Пример 93 (Обобщенный гармонический ряд или ряд Дирихле).
Исследовать на сходимость ряд (обобщенный гармонический ряд, ряд Дирихле):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Как мы уже знаем, при $\alpha = 1$ рассматриваемый ряд является гармоническим (пример 92), а значит он расходится. Так как при $\alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k},$$

то, согласно теореме 130 о признаках сравнения, при $\alpha < 1$ рассматриваемый ряд расходится.

Пусть $\alpha > 1$, на отрезке $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим функцию $x^{1-\alpha}$. По теореме Лагранжа (56),

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{\xi^\alpha}, \quad \xi \in (n, n+1).$$

Но тогда

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\xi^\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}.$$

Суммируя неравенства по $n \in \{1, \ldots, k\}$, получим

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

то, согласно теореме 130 о признаках сравнения заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

сходится, а значит сходится и исследуемый нами ряд. Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \longleftrightarrow \begin{cases} \text{сходится}, & \alpha > 1 \\ \text{расходится}, & \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

§ 5. Признаки Коши и Даламбера

Признаки сравнения, изученные нами ранее, удобны в случае, когда мы понимаем что и с чем сравнивать. В то же время на практике такого понимания зачастую нет. Обсуждаемые в этом разделе специальные признаки – признаки Коши и Даламбера – позволяют проводить сравнение рассматриваемого ряда с геометрическим рядом (пример 90), не используя само по себе сравнение непосредственно.

1 Радикальный признак Коши

Начнем с рассмотрения радикального (ибо с корнем) признака Коши. Его идеология достаточно проста: если при больших n общий член ряда $a_n \geq 0$ ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем q, то

$$\sqrt[n]{a_n} \sim q, \quad n \to \infty.$$

Это наблюдение, правда чуть в более хитрой форме, мы и докажем.

Теорема 131 (Радикальный признак Коши).
Пусть $a_k > 0$ и

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. В силу того, что верхний предел – это частичный предел (лемма 29), найдется подпоследовательность a_{k_n} такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{a_{k_n}} = l.$$

Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого номера n_0, выполняется

$$\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > 1 \;\Rightarrow\; a_{k_n} > 1.$$

Отсюда следует, что a_{k_n} не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости ряда (теорема 128), и ряд с общим членом a_k расходится.
2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = (1-l)/2$. По свойству верхнего предела,

$$\exists k_0: \; \forall k > k_0 \;\; \sqrt[k]{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1.$$

Действительно, иначе мы могли бы из последовательности $\sqrt[k]{a_k}$ выделить подпоследовательность, все члены которой больше, чем $(l+1)/2$, а значит ее верхний предел был бы не меньше, чем $(l+1)/2 > l$, что противоречит условию. Из полученного неравенства приходим к тому, что при $k > k_0$ выполняется

$$a_k < \left(\frac{l+1}{2}\right)^k.$$

Так как ряд

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^k$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы (пример 90), то по признаку сравнения (теорема 130) сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит (теорема 82) сходится и исходный ряд. □

Еще раз заметим, что, как видно из доказательства, признак Коши – завуалированный признак сравнения с геометрической прогрессией. Теперь выделим отдельно несколько важных замечаний.

Замечание 225.
В случае, когда

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1,$$

вопрос о сходимости ряда остается открытым. Действительно, для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

соответствующий предел равен единице (теорема 14), однако первый ряд расходится, а второй — сходится (пример 93). Данный результат не должен удивлять, ведь степенная функция растет медленнее, чем любая показательная, и сравнение с геометрической прогрессией возможно лишь при $q = 1$.

Замечание 226.
Как было показано в доказательстве первого пункта радикального признака Коши, в случае $l > 1$ общий член a_k ряда не стремится к нулю, то есть не выполнено даже необходимое условие сходимости ряда (теорема 128). Более того, если известно, что

$$1 < l = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k},$$

то легко показать (основываясь на том же доказательстве), что $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$.

② Признак Даламбера

Еще одна характеристика геометрической прогрессии заключается в том, что отношение ее соседних членов равно знаменателю прогрессии. Именно это соображение и использует признак Даламбера.

Теорема 132 (Признак Даламбера).
Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Так как $l > 1$, то при $k > k_0$ оказывается справедливым неравенство

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \;\Rightarrow\; a_k \geq a_{k_0+1} > 0,$$

откуда следует, что a_k не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (теорема 128).
2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = (1-l)/2$. Согласно определению предела, найдется k_0, что при $k > k_0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1,$$

а значит

$$a_{k+1} < \left(\frac{l+1}{2}\right) a_k.$$

По индукции, при $k > k_0$ имеем

$$a_k \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1} a_{k_0+1}.$$

Так как ряд

$$a_{k_0+1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-k_0-1}$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы (пример 90), то по признаку сравнения (теорема 130) сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит (теорема 82) сходится и исходный ряд. □

Еще раз заметим, что, как видно из доказательства, признак Коши – завуалированный признак сравнения с геометрической прогрессией. Теперь выделим отдельно несколько важных замечаний.

Замечание 227.
В случае, когда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1,$$

вопрос о сходимости ряда остается открытым. Действительно, для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

рассматриваемый предел равен единице, однако первый ряд расходится, а второй — сходится (пример 93). Опять-таки, данный результат не должен вас удивлять.

Замечание 228.
Как было показано в доказательстве первого пункта признака Даламбера, в случае $l > 1$ общий член a_k ряда не стремится к нулю, то есть не выполнено даже необходимое условие сходимости ряда (теорема 128). Опять-таки, в этом случае легко показать, что $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$.

③ Некоторые дальнейшие рассуждения и обобщения

Данный раздел предназначен, скорее, для заинтересованных читателей, и вряд ли войдет в основную программу курса. Впрочем, лишить читателей возможности хотя бы по верхам ознакомиться с некоторыми, на наш взгляд, естественно возникающими вопросами, было бы неверным.

Понятно, что признаки, обсужденные нами ранее, позволяют завуалированно сравнивать поведение рассматриваемого ряда и геометрической прогрессии. Естественно, возникает следующий вопрос: а как, например, также завуалированно сравнивать поведение рассматриваемого ряда и обобщенного гармонического ряда? Для этого есть, например, признак Раабе.

Теорема 133 (Признак Раабе).
Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.

Доказательство этого признака мало отличается от доказательства признака Даламбера. Более того, что признак Даламбера, что признак Раабе напрямую следуют из следующей схемы, позволяющей «плодить» бесчисленное множество признаком сходимости числовых рядов.

Теорема 134 (Схема Куммера).
Пусть $a_k, b_k > 0$, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$$

расходится. Пусть, кроме того,

$$\lim_{k\to\infty} \left(b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1}\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда:

1. Если $l > 0$, то ряд с общим членом a_k сходится.
2. Если $l < 0$, то ряд с общим членом a_k расходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Так как $l > 0$, то существует k_0, что при $k > k_0$ выполнено

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} > \frac{l}{2} > 0 \;\Rightarrow\; a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} > \frac{l}{2} a_{k+1} > 0.$$

В частности, $a_k b_k > a_{k+1} b_{k+1}$, а значит последовательность $a_k b_k$ убывает при $k > k_0$. Кроме того, она ограничена снизу, например, нулем, а значит имеет предел (теорема Вейерштрасса (теорема 11)), например, равный A. Но тогда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{k} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (a_{k_0+1} b_{k_0+1} - a_{k+1} b_{k+1}) = a_{k_0+1} b_{k_0+1} - A < +\infty.$$

Значит (теорема 130), сходится и $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n+1}$, но тогда (теорема 82) сходится и ряд с общим членом a_n.

2. Докажем второй пункт. Пусть $l < 0$. Тогда существует k_0, что при $k > k_0$

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} < 0 \;\Rightarrow\; b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1} < 0.$$

Отсюда получаем, что $b_{k+1} a_{k+1} > b_k a_k$ и последовательность $b_k a_k$ монотонно возрастает при $k > k_0$. Значит,

$$a_k b_k \geq a_{k_0+1} b_{k_0+1} \;\Rightarrow\; a_k \geq \frac{a_{k_0+1} b_{k_0+1}}{b_k}$$

и ряд $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$ расходится согласно признакам сравнения (теорема 130). □

Отметим следующее замечание.

Замечание 229.
Признаки Даламбера и Раабе получаются из схемы Куммера, если положить $b_k = 1$ и $b_k = k$, соответственно. Это и есть ровно «пограничные» ситуации для ряда геометрической прогрессии ($a_k = 1^k$) и для обобщенного гармонического ряда ($a_k = 1/k$).

Полезно также заметить, что расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$$

использовалась только при доказательстве второго пункта соответствующей теоремы — пункта, в котором устанавливается расходимость ряда с общим членом a_k.

Раз уж мы заговорили про «пограничные» ситуации и «эталонные» для сравнения ряды, полезно задаться вопросом: нет ли какого-то ряда, сравнения с которым было бы достаточно для исследования любого ряда с положительными членами? Ответ дает следующее интересное наблюдение. Оказывается, общий член сходящегося ряда можно увеличить, не потеряв в сходимости, а общий член расходящегося – уменьшить, не потеряв в расходимости. Причем увеличение и уменьшение идет качественное, по скорости сходимости. Формулируется это так.

Теорема 135.
Пусть $a_k > 0$, $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

1. Если ряд с общим членом a_k расходится, то существует последовательность b_k, что $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и что ряд с общим членом a_kb_k расходится.
2. Если ряд с общим членом a_k сходится, то существует последовательность b_k, что $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ и что ряд с общим членом a_kb_k сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Положим

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}}, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad S_0 = 0.$$

Тогда

$$a_kb_k = \frac{a_k}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \frac{S_k - S_{k-1}}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}.$$

Ясно, что ряд с таким общим членом расходится, так как

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}\right) = \sqrt{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

2. Докажем второй пункт. Положим

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{R_{k-1}}}, \quad R_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i.$$

Тогда

$$a_kb_k = \frac{a_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{R_{k-1} - R_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})(\sqrt{R_{k-1}} + \sqrt{R_k})}{\sqrt{R_{k-1}}} \leq$$
$$\leq 2(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}).$$

Понятно, что ряд с общим членом $\left(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}\right)$ сходится, ведь

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}\right) = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{R_0},$$

а значит, по признаку сравнения (теорема 130), сходится и требуемый ряд. □

§ 6. Интегральный признак Коши

В этом разделе мы изучим еще один признак сходимости рядов со знакопостоянными членами — интегральный признак сходимости, а также узнаем некоторые способы исследования асимптотик при помощи этого признака.

1 Интегральный признак Коши

Приведем сразу формулировку соответствующей теоремы.

Теорема 136 (Интегральный признак Коши).
Пусть $f \in R_{loc}[1, \infty)$ и монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд с общим членом $f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f\ dx.$$

Доказательство. Пусть, скажем, f убывает. Тогда, если $f(x_0) < 0$, в силу монотонности, неравенство $f(x) \le f(x_0) < 0$ выполняется при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \to \infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится. Кроме того (следствие 28),

$$\int\limits_{x_0}^{A} f\ dx \le f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow[A \to +\infty]{} -\infty,$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \ge 0$.

В этом случае, вспоминая, что f убывает, очевидно следующее неравенство:

$$f(k+1) \le \int\limits_k^{k+1} f\ dx \le f(k),$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \int\limits_1^{n+1} f\ dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Учитывая, что функция

$$F(\omega) = \int\limits_1^{\omega} f\ dx$$

возрастает, для существования предела $\lim\limits_{\omega \to +\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim\limits_{n \to \infty} F(n+1)$ (докажите это!). Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \to \infty$ и рассуждениями, аналогичными приводимым в доказательстве третьего пункта признаков сравнения (теорема 130). $\square$

Замечание 230.
Требование, что $f \in R_{loc}[1, \infty)$ в случае, когда f монотонна – избыточное. Впрочем, мы его приводим, так как такой теоремы нами доказано не было.

Покажем применение признака. Например, исследуем на сходимость (снова) обобщенный гармонический ряд.

Пример 94.
Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Используя только что доказанный признак, можно сделать вывод, что сходимость написанного ряда равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Теперь без труда можно прийти к уже известному выводу: обобщенный гармонический ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

2 Асимптотика гармонического ряда

Одна из основных задач анализа — это задача исследования асимптотического поведения той или иной величины. Идея, использованная при доказательстве интегрального признака Коши, часто помогает в исследовании асимптотики различных сумм, в частности, в оценке скорости их роста (изменения).

Лемма 86.
Пусть f неотрицательна, убывает на $[1, +\infty)$ и $f \in R_{loc}[1, +\infty)$. Тогда последовательность

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_{1}^{n+1} f\ dx$$

имеет предел.

Доказательство. Докажем, что A_n возрастает. Действительно,

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int\limits_{n+1}^{n+2} f\ dx \geq 0.$$

Покажем, что A_n ограничена сверху. Для этого проведем следующее преобразование:

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_{1}^{n+1} f\ dx.$$

Так как
$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$
то, согласно полученному в доказательстве интегрального признака Коши неравенству,
$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f\ dx \le 0,$$
откуда
$$A_n \le f(1) - f(n+1) \le f(1).$$
Далее остается сослаться на теорему Вейерштрасса (11) □

Отметим следующее замечание.

Замечание 231.
Применительно к поиску асимптотик, доказанная лемма может быть использована следующим образом. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, тогда
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f\ dx = A + \alpha_n \ \Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int\limits_1^{n+1} f\ dx + A + \alpha_n,$$
где $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Особо интересны случаи, когда ряд, стоящий слева, расходится. Тогда (при $n \to \infty$)
$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\ \sim\ \int\limits_1^{n+1} f\ dx.$$

Приведем пример.

Пример 95.
Рассмотрим гармонический ряд и найдем асимптотику его частичных сумм. Ясно, что
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$
Тем самым,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ \sim\ \ln(n+1) \sim \ln n.$$

Замечание 232.
Итак, мы видим, что «отловить» расходимость гармонического ряда численно — очень сложная задача. Например, если взять 10^6 (миллион) слагаемых, то частичная сумма будет примерно равна всего-навсего
$$S_{10^6} \approx \ln 10^6 = 6 \ln 10 \approx 13.8.$$

Взяв 10^9 (миллиард) слагаемых, увеличение частичный суммы будет куда менее значительным по сравнению с количеством слагаемых:

$$S_{10^9} \approx \ln 10^9 = 9 \ln 10 \approx 20.7.$$

Этот пример еще раз показывает важность аналитического ответа на вопрос о сходимости того или иного ряда.

Постоянная A в равенстве

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n$$

называется постоянной Эйлера и часто обозначается γ. Равна она, примерно, 0.577.

§ 7. Абсолютная и условная сходимости

Аналогично тому, как мы поступали в теории несобственных интегралов, рассмотрим ряды с членами произвольного знака, а также новые типы сходимости, которые в этом случае возникают.

1 Понятия абсолютной и условной сходимостей

Сразу начнем с уже, в общем-то, знакомых нам определений.

Определение 137 (Понятие абсолютной сходимости).
Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.

Как и в случае с несобственными интегралами, справедлива следующая теорема.

Теорема 137 (О сходимости абсолютно сходящегося ряда).
Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши (теорема 127). Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда, согласно тому же критерию Коши (теорема 127) получаем, что ряд с общим членом a_k сходится. □

Понятно, что при исследовании ряда на абсолютную сходимость можно пользоваться ранее изученными признаками.

Пример 96.
Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}.$$

Так как

$$\left| \frac{\sin k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2},$$

и ряд с общим членом $1/k^2$ сходится (пример 93), то, согласно признакам сравнения (теорема 130) и только что доказанной теореме 137, исходный ряд сходится абсолютно.

Теперь введем понятие условной сходимости.

Определение 138 (Понятие условной сходимости).
Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).

Исследование на сходимость рядов обычно значительно сложнее, чем исследование на сходимость интегралов. Обусловлено это тем, что мы очень редко умеем «удобным образом» представлять ту или иную сумму. Именно поэтому прежде чем привести пример условно сходящегося ряда, сначала докажем признак Лейбница – признак сходимости знакочередующегося ряда.

Теорема 138 (Признак Лейбница).
Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю, сходится.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность S_{2n} последовательности частичных сумм данного ряда. Группируя, получим, что

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2},$$

где неравенство верно ввиду неотрицательности скобок (в силу убывания a_n). Тем самым, последовательность S_{2n} возрастает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, по теореме Вейерштрасса (теорема 11), последовательность S_{2n} имеет предел, например S. Но тогда

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S,$$

так как общий член стремится к нулю. Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Тогда, по доказанному,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ |S_{2n} - S| < \varepsilon,$$

$$\exists n_1 : \ \forall n > n_1 \ \ |S_{2n-1} - S| < \varepsilon.$$

Но тогда, если $k > \max(2n_0, 2n_1 - 1)$, то либо $k = 2n$ и $n > n_0$, либо $k = 2n - 1$ и $n > n_1$, а значит

$$|S_k - S| < \varepsilon,$$

что доказывает сходимость рассматриваемого ряда. □

Ряд, общий вид которого зафиксирован в условии признака Лейбница, часто называют рядом лейбницевского типа.

Теперь мы готовы привести пример условно сходящегося ряда.

Пример 97.

Исследуем на сходимость и найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Понятно, что данный ряд не сходится абсолютно. В то же время, согласно признаку Лейбница (теорема 138), он сходится, а значит сходится условно. Найдем его сумму. Для этого рассмотрим четную частичную сумму

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n,$$

где

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

— n-ая частичная сумма гармонического ряда. Так как (пример 95)

$$H_n = \ln(n+1) + \gamma + \alpha_n = \ln n + \gamma + \widetilde{\alpha}_n, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \widetilde{\alpha}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + \widetilde{\alpha}_{2n} - \ln n - \gamma - \widetilde{\alpha}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2.$$

Так как общий член рассматриваемого ряда стремится к нулю, то легко понять, что $S_{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$. Рассуждениями, аналогичными тем, что приведены в доказательстве признака Лейбница (теорема 138), приходим к тому, что рассматриваемый ряд сходится (условно) к сумме $\ln 2$.

Следующее замечание помогает оценить сумму ряда лейбницевского типа.

Замечание 233.
Как показано в доказательстве признака Лейбница,

$$0 \le S_{2n} \le a_1.$$

Это значит, что $0 \le S \le a_1$.

Предыдущее замечание можно полезным образом обобщить.

Лемма 87 (Об остатке ряда лейбницевского типа).
Пусть рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \ge 0$ и a_k монотонно стремится к нулю. Тогда

$$|R_n| \le a_{n+1}, \quad R_n(-1)^n \ge 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что остаток ряда лейбницевского типа – с точностью до знака ряд лейбницевского типа и применить к нему сформулированное выше замечание. □

Итак, лемма утверждает, что модуль остатка ряда лейбницевского типа не превосходит модуля первого отброшенного члена. Кроме того, остаток совпадает по знаку со знаком первого отброшенного члена.

2 Немного о свойствах абсолютно и условно сходящихся рядов

В этом пункте мы покажем, что операции, которые мы проводим с числами, далеко не всегда можно проводить с рядами. Обойдемся же мы лишь примерами и общими замечаниями.

Начнем со следующего примера. Понятно, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$

расходится. С другой стороны, если расставить скобки вот так:

$$(-1+1)+(-1+1)+\ldots,$$

то полученная «группировка» ряда сходится к сумме 0. Если же расставить скобки вот так:

$$-1+(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

то полученная «группировка» ряда сходится к сумме -1. Понятно, что можно добиться и других результатов. Рассмотрим следующий шуточный пример.

Пример 98.
«Докажем», что

$$1+2+\ldots+n+\ldots=-\frac{1}{12}.$$

Пусть искомая сумма равна $S\in\mathbb{R}$. Тогда

$$-3S=S-4S=(1+2+3+\ldots)-4(1+2+3+\ldots)=(1+2+3+\ldots)-2(2+4+6+\ldots)=$$

$$=1-2+3-4+\ldots=1-(2-3+4-\ldots)=1-(1-2+3-4+\ldots)-((1-1)+(1-1)+\ldots).$$

Так как (пример 90)

$$1-a+a^2-a^3+\ldots=\frac{1}{1+a},$$

то, (незаконно) подставив $a=1$, получим, что

$$(1-1)+(1-1)+\ldots=\frac{1}{2},$$

откуда

$$-3S=1+3S-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ S=-\frac{1}{12}.$$

Оказывается, даже над сходящимися рядами далеко не всегда можно проводить привычные нам операции. Рассмотрим следующий пример.

Пример 99.
Рассмотрим ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
Сумма этого ряда нам уже известна (пример 97), она равна $\ln 2$. Переставим члены ряда местами и рассмотрим следующий ряд
$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots$$
Рассмотрим частичную сумму нового ряда с номером $3n$:
$$\widetilde{S}_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2n},$$
где
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
В силу того, что
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\ln 2,$$
получаем, что
$$\widetilde{S}_{3n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\ln 2}{2}.$$
Легко понять, что $\widetilde{S}_{3n+1}$ и $\widetilde{S}_{3n+2}$ имеют тот же самый предел, а значит можно утверждать (рассуждения аналогичны рассуждениям в доказательстве признака Лейбница (138)), что сумма рассматриваемой перестановки исходного ряда равна $0.5\ln 2$. Итого, при перестановке членов сумма ряда изменилась.

Проблема, возникшая в примере, основана на том, что рассматриваемый ряд сходится лишь условно. Не перегружая изложение более хитрыми фактами, отметим конспективно некоторые свойства абсолютно и условно сходящихся рядов. Пользоваться ими в дальнейшем мы не будем.

1. Если ряд имеет сумму в $\overline{\mathbb{R}}$, то группировать (расставлять скобки) члены ряда можно любым способом. Сумма ряда, как и тип сходимости (если она есть), при этом не изменятся.
2. Если ряд сходится абсолютно, то члены ряда можно, к тому же, переставлять как угодно. Сумма ряда, как и тип сходимости, при этом не изменятся.
3. Если ряд сходится условно, то перестановкой его членов можно получить любую наперед заданную в $\overline{\mathbb{R}}$ сумму. Кроме того, можно переставить члены ряда так, что суммы не будет даже в $\overline{\mathbb{R}}$. Это – так называемая теорема Римана.

Отметим и следующее замечание.

Замечание 234.
Можно доказать, что абсолютная сходимость ряда с общим членом a_k характе-

ризуется тем, что сходятся ряды, составленные только из положительных членов a_k^+ и только из отрицательных членов a_k^-, соответственно, где

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k \geq 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}, \quad a_k^- = \begin{cases} a_k, & a_k \leq 0 \\ 0, & a_k > 0 \end{cases}.$$

В случае условной сходимости оба ряда обязательно расходятся. Итого, абсолютная сходимость – это сходимость за счет достаточно быстрого убывание общего члена ряда к нулю, условная сходимость – сходимость за счет «удачной» компенсации положительных членов ряда отрицательными. Именно поэтому с перестановкой членов ряда сумма ряда может вести себя совершенно по-разному.

Глава 9
Функциональные ряды

> Именно математика дает надежнейшие правила: кто им следует – тому не опасен обман чувств.
>
> *Эйлер*

До сих пор нами рассматривались числовые ряды. В то же время, наша цель — научиться представлять конкретную функцию тем или иным рядом. Конечно, раз значение функции, вообще говоря, меняется от точки к точке, в общем случае не может существовать единого числового ряда, представляющего функцию. Тем самым, разумно ввести в рассмотрение так называемые функциональные ряды. Этим мы и займемся, и обобщим понятие многочлена Тейлора.

§ 1. Функциональные последовательности и ряды

В этом разделе мы рассмотрим понятия поточечной и равномерной сходимостей функциональных последовательностей и рядов.

1 Понятия функциональной последовательности и функционального ряда

Понятие функционального ряда тесно связано с понятием функциональной последовательности, с определения которой мы и начнем.

Определение 139 (Понятие функциональной последовательности).
Последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, называется функциональной последовательностью.

Подчеркнем, что теперь каждый элемент последовательности — это функция, заданная на некотором множестве X.

Пример 100.
Рассмотрим функциональную последовательность $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ясно, что

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3,$$

и так далее.

Имея функциональную последовательность, наверное, понятно, как определить функциональный ряд.

Определение 140 (Понятие функционального ряда).
Пусть дана функциональная последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k + \ldots$$

называется функциональным рядом с общим членом f_k.

Приведем пример.

Пример 101.
Рассмотрим функциональную последовательность $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда функциональный ряд с общим членом f_k — это символ вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + \ldots$$

Полезно узнать в последнем ряде что-то вроде суммы геометрической прогрессии (пример 90). Подумайте, как можно было бы определить сумму этого ряда, и что вообще такое сумма функционального ряда. Мы как раз-таки переходим к изложению этого понятия.

2 Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Введем как будто бы напрашивающееся понятие сходимости функциональной последовательности.

Определение 141 (Понятие поточечной сходимости функциональной последовательности).
Говорят, что функциональная последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \ \ \exists \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функциональной последовательности f_k.

Итак, определение-таки естественное: берется точка, подставляется в (функциональную) последовательность, и дальше одно из двух: либо полученная (числовая) последовательность сходится, либо нет. Понятно, что от точки к точке написанный предел, вообще говоря, может меняться. Подчеркнем это в следующем замечании.

Замечание 235.
На множестве (поточечной) сходимости D возникает функция

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in D.$$

Эта функция называется пределом функциональной последовательности (или поточечным пределом) f_k на множестве D.

Сразу приведем пример.

Пример 102.
Рассмотрим уже знакомую нам функциональную последовательность $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ясно, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases},$$

и в остальных случаях сходимости нет.

Теперь, по аналогии с тем, что мы делали в теории числовых рядов, введем понятия частичной суммы и суммы функционального ряда.

Определение 142 (Понятие частичной суммы функционального ряда).
n-ой частичной суммой функционального ряда с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

Наконец, введем понятие сходимости функционального ряда.

Определение 143 (Понятие сходимости функционального ряда).
Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{сходится.}$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функционального ряда с общим членом f_k.

И снова отметим естественность введенного определения. По сути, мы просто подставляем каждую рассматриваемую точку x в функциональную последовательность f_k и рассматриваем (числовой) ряд с общим членом $f_k(x)$. Функциональный ряд при этом называется сходящимся в точке x в том и только том случае, когда сходится ряд с общим членом $f_k(x)$. Теперь сформулируем следующее очевидное замечание, связывающее сходимость функционального ряда и сходимость функциональной последовательности.

Замечание 236.
Сходимость функционального ряда с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ на множестве $D \subset X$ означает сходимость функциональной последовательности S_n частичных сумм этого ряда на этом множестве, то есть

$$\forall x \in D \ \ \exists \lim_{n\to\infty} S_n(x) \in \mathbb{R}.$$

Приведем пример.

Пример 103.
Пусть $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Легко понять, что множество сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

— это множество $(-1, 1)$. На нем рассматриваемый ряд сходится абсолютно.

Определив предел функциональной последовательности (сумму функционального ряда), в анализе естественным образом возникают вопросы о таких свойствах предельной функции (суммы функционального ряда) как: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Примеры ниже показывают, что поточечная сходимость, введенная нами в данном пункте, вообще говоря не сохраняет озвученные свойства.

Пример 104.
Пусть $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Несмотря на то, что $f_k \in C(\mathbb{R})$, рассматриваемая последовательность сходится (лишь) при $x \in (-1, 1]$, причем к разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Пусть
$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Данная последовательность сходится к функции $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. В то же время производная, равная
$$f_k'(x) = \cos kx, \quad x \in \mathbb{R},$$
к нулю не сходится никогда.

Пусть теперь
$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + \frac{1}{k}}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$
Легко понять (теорема 91), что все члены последовательности интегрируемы на $[0, 1]$, однако предельная функция
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$
в виду неограниченности, не интегрируема на $[0, 1]$.

Итак, введем более обременительный тип сходимости, который, однако, позволит распространить свойства членов последовательности и на предельную функцию — равномерную сходимость.

3 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Сразу же начнем с определения.

Определение 144 (Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности).
Говорят, что последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится к функции f на множестве $D \subset X$ равномерно, если
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \; \forall k > k_0 \; \forall x \in D \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Обозначают это так:
$$f_k \overset{D}{\underset{k\to\infty}{\rightrightarrows}} f.$$

Полезно сравнить это определение с ранее введенным определением (поточечной) сходимости.

Замечание 237.
Выпишем определения поточечной и равномерной сходимостей последовательности f_k к f на множестве D и выясним отличия введенных определений. Итак, определение поточечной сходимости записывается следующим образом:
$$\forall x \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \; \forall k > k_0 \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение равномерной сходимости записывается так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}:\ \forall k > k_0\ \forall x \in D\ \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Видно, что определения отличаются тем, что в случае поточечной сходимости найденный номер n_0, вообще говоря, зависит от x, чего нет в равномерной сходимости: там номер одинаков сразу для всех x. Это отличие должно быть уже знакомо: оно идеологически совпадает с отличием непрерывности от равномерной непрерывности.

Отметим следующее очевидное замечание.

Замечание 238.
Из сказанного ясно, что если функциональная последовательность f_k сходится к f равномерно на D, то она сходится на D и поточечно. Тем самым предельную функцию имеет смысл искать как поточечный предел функциональной последовательности, а затем уже проводить исследование полученной сходимости на равномерность.

Приведем несколько примеров. Начнем с примера равномерно сходящейся последовательности.

Пример 105.
Знакомая нам последовательность

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}, \qquad D = \mathbb{R},$$

сходится на множестве D равномерно (к нулю). Докажем это. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\left|\frac{\sin kx}{k}\right| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon \ \Rightarrow\ k > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Положив

$$k_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

приходим к определению равномерной сходимости.

Теперь рассмотрим пример неравномерно сходящейся последовательности.

Пример 106.
Покажем, что последовательность $f_k(x) = x^k$ не сходится равномерно на $[0, 1]$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Напишем отрицание того факта, что последовательность сходится равномерно:

$$\exists\varepsilon_0 > 0:\ \forall k_0 \in \mathbb{N}\ \exists k > k_0\ \exists x \in D:\ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, положим

$$x_k = 1 - \frac{1}{k}.$$

Легко понять, что $f(x_k) = 0$. В то же время,

$$f_k(x_k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-1},$$

а значит равномерной сходимости нет. Итак, из поточечной сходимости равномерная, вообще говоря, не вытекает.

Теперь перенесем понятие равномерной сходимости на ряды.

Определение 145 (Понятие равномерно сходящегося ряда).
Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на множестве $D \subset X$, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на D.

Приведем и следующее эквивалентное определение равномерной сходимости функционального ряда.

Замечание 239.
На языке ε-n последнее утверждение может быть записано так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N} :\ \forall k > k_0\ \forall x \in D\ \ |S_k(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство может быть переписано, как

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Величина

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k,$$

как и ранее, называется n-ым остатком (функционального) ряда. Итого, равномерная сходимость ряда на D равносильна тому, что

$$R_n \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} 0.$$

«Непосредственная» проверка ряда на равномерную сходимость возможна, но представляет немалые технические трудности. Мы оставим примеры до следующего раздела, где получим мало-мальски удобные признаки равномерной сходимости, которые могут облегчить нам задачу.

§ 2. Критерий Коши и признак Вейерштрасса

В этом разделе мы обсудим естественным образом возникающие критерии и признаки равномерной сходимости. Начнем, однако, с критерия Коши.

(1) Критерий Коши

Итак, начнем с критерия Коши.

Теорема 139 (Критерий Коши равномерной сходимости ф.п.).
Для того чтобы функциональная последовательность $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходилась равномерно на $D \subset X$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \; \forall k > k_0 \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \quad |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости f_k к некоторой функции f,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \; \forall k > k_0 \quad |f_k - f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $k + p > k_0$ и, по неравенству треугольника,

$$|f_{k+p} - f_k| \le |f_{k+p} - f| + |f - f_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Условие

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \; \forall k > k_0 \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \quad |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

гарантирует, что при каждом $x \in D$ числовая последовательность фундаментальна, значит (теорема 16) сходится. Положим

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x), \qquad x \in D.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдем k_0, что при $k > k_0$ и $p \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in D \quad |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\forall x \in D \quad |f(x) - f_k(x)| \le \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. □

Полезно заметить, что критерий Коши, в общем-то, стандартен: равномерная сходимость означает сколь угодную близость (причем сразу при всех x) любых двух достаточно далеких членов последовательности f_k, и наоборот.

Так как равномерная сходимость ряда — суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм, то справедлива следующая теорема.

Теорема 140 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда).
Ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, так как равномерная сходимость ряда — суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм. □

Из критерия Коши мы легко получаем так называемое необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Теорема 141 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда).
Если ряд с общим членом $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$, то

$$f_k \underset{k\to\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} 0.$$

Доказательство. Доказательство получается сразу, если положить в критерии Коши 140 $p = 1$. □

Полезно ответить, что необходимое условие равномерной сходимости ряда «вторит» необходимому условию сходимости ряда с естественным отличием — равномерной сходимостью (к нулю) общего члена ряда.

Пример 107.
Ряд с общим членом $f_k(x) = x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сходится неравномерно на $[0, 1)$, так как f_k не стремится равномерно к нулю на $[0, 1)$, ведь, как мы уже видели (пример 106),

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-1} \neq 0.$$

② Признак Вейерштрасса

Сформулируем признак Вейерштрасса – признак равномерной сходимости.

Теорема 142 (Признак Вейерштрасса).
Пусть $f_k : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. Если существует последовательность a_k, что

$$|f_k(x)| \leq a_k, \quad x \in D,$$

и ряд с общим членом a_k сходится, то функциональный ряд с общим членом f_k сходится равномерно (и абсолютно) на D.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Используя критерий Коши (теорема 127) и учитывая неотрицательность a_k, имеем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

что верно сразу для всех $x \in D$. Значит, используя критерий Коши равномерной сходимости ряда (теорема 140), а также определение абсолютной сходимости, получаем требуемое. □

Рассмотрим пример.

Пример 108.
Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}, \quad D = \mathbb{R}.$$

Так как для $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \le \frac{1}{k^2},$$

а ряд с общим членом $1/k^2$ сходится, то, на основании признака Вейерштрасса (теорема 142) можно заключить, что рассматриваемый ряд сходится на $\mathbb{R}$ равномерно (и абсолютно).

Чтобы не создавалось каких-то иллюзий связи абсолютной и равномерной сходимостей, приведем следующее замечание.

Замечание 240.
Существуют ряды, которые сходятся абсолютно, но неравномерно и равномерно, но неабсолютно. Примером абсолютно, но неравномерно (пример 107) сходящегося ряда служит ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in [0, 1).$$

Примером равномерно, но неабсолютно сходящегося ряда (пример 99), служит, например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Понятно, что числовой ряд, если он сходится, сходится равномерно на любом множестве $D \subset \mathbb{R}$.

Более того, существуют абсолютно и равномерно сходящиеся ряды, для которых ряд из модулей не сходится равномерно (то есть те, для которых не применим признак Вейерштрасса). Мы не будем приводить примеры таких рядов.

§ 3. Свойства равномерной сходимости

Напомним, что при обсуждении поточечной сходимости мы столкнулись с рядом проблем, которые, грубо говоря, заключаются в следующем: поточечная сходимость, вообще говоря, не сохраняет привычные для нас свойства функций — непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. В попытках решить возникшие проблемы мы ввели новый тип сходимости — равномерную. В то же время, мы до сих пор так и не выяснили, стало ли «легче жить».

1 Перестановка двух предельных переходов

Полезно отметить, что на самом деле все вопросы, которые мы подняли, сводятся к одному вопросу: вопросу законности изменения порядка предельных переходов. С решения этого вопроса мы и начнем.

Теорема 143 (О перестановке предельных переходов).
Пусть $f, f_k : D \to \mathbb{R}$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f.
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел
$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$
где x_0 — предельная для D.

Тогда пределы
$$\lim_{k \to \infty} a_k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} f(x)$$
существуют (в $\mathbb{R}$) и совпадают, то есть
$$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши 139,
$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \quad |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$
Перейдя к пределу при $x \to x_0$, получим
$$|a_{k+p} - a_k| \leq \varepsilon,$$
что влечет фундаментальность и, как следствие, сходимость последовательности a_k. Пусть ее предел равен A. Осталось показать, что
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу равномерной сходимости на D,
$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \forall x \in D \quad |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу сходимости последовательности a_k к числу A,

$$\exists k_1 : \ \forall k > k_1 \ \ |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $m = 1 + \max(k_0, k_1)$, тогда одновременно, причем $\forall x \in D$,

$$|a_m - A| < \varepsilon \ \text{ и } \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Согласно определению предела функции,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D \ \ |f_m(x) - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Значит, при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D$, имеем

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

Итак, оказывается, что равномерная сходимость позволяет менять два предельных перехода местами.

Пример 109.
Как уже вскользь отмечалось ранее, одной лишь поточечной сходимости недостаточно для перестановки предельных переходов. Действительно, пусть $D = [0, 1]$, тогда:

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases},$$

но при этом

$$\lim_{x\to 1-0} \lim_{k\to\infty} x^k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \lim_{x\to 1-0} x^k = 1.$$

Впрочем, равномерная сходимость не является необходимым условием для изменения порядка предельных переходов.

Аналогичный результат справедлив и для рядов.

Теорема 144 (О почленном переходе к пределу).
Пусть $f_k : D \to \mathbb{R}$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S.
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 — предельная для D.

Тогда ряд с общим членом a_k сходится к сумме A, причем $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = A$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда. □

(2) Непрерывность предельной функции и суммы ряда

Доказанные выше теоремы решают и вопрос о непрерывности предельной функции.

Теорема 145 (О непрерывности предельной функции).
Пусть $f, f_k : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f.
2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0.

Тогда f непрерывна в x_0. В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D, то и f непрерывна на D.

Доказательство. Если x_0 — изолированная точка, то, так как любая функция непрерывна в изолированной точке своей области определения (теорема 33), утверждение доказано. Если x_0 — предельная, то выполнены условия теоремы о перестановке предельных переходов (143), где $a_k = f_k(x_0)$. Поэтому,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x_0) = f(x_0),$$

что и завершает доказательство (теорема 33). □

Аналогичная теорема верна и для рядов.

Теорема 146 (О непрерывности суммы ряда).
Пусть $f_k : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S.
2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0.

Тогда сумма ряда S непрерывна в x_0. В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D, то и сумма ряда непрерывна на D.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда. □

Отметим стандартное замечание.

Замечание 241.
В плане непрерывности предельной функции справедливы те же замечания, что и замечания о перестановке предельных переходов: поточечной сходимости в общем случае не достаточно для сохранения непрерывности, равномерная сходимость не является необходимым условием сохранения непрерывности.

(3) Интегрирование и предельный переход

Теперь поговорим о перестановочности операции интегрирования и предельного перехода.

Теорема 147 (Интегрирование и предельный переход).
Пусть $f_k, f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_k \in C[a,b]$, и

$$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{[a,b]} f.$$

Тогда $f \in C[a,b]$ и

$$\int\limits_a^x f_k \, dx \xrightarrow[k\to\infty]{[a,b]} \int\limits_a^x f \, dx.$$

Доказательство. То, что $f \in C[a,b]$ следует из теоремы о непрерывности предельной функции (145). Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \forall x \in [a,b] \ \ |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть $k > k_0$, тогда

$$\left| \int\limits_a^x f_k \, dx - \int\limits_a^x f \, dx \right| \leq \int\limits_a^x |f_k - f| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon,$$

причем последняя оценка справедлива при всех $x \in [a,b]$. Это и доказывает равномерную сходимость. □

Естественно, аналогичная теорема справедлива и для рядов.

Теорема 148 (О почленном интегрировании ряда).
Пусть $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k \in C[a,b]$. Если ряд с общим членом f_k сходится равномерно к функции S на $[a,b]$, то $S \in C[a,b]$, причем

$$\int\limits_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^x f_k \, dx \right) \quad x \in [a,b].$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к частичным суммам рассматриваемого ряда. □

Итак, равномерная сходимость дает возможность менять местами предел и интеграл или, в случае рядов, интегрировать ряд почленно.

4 Дифференцирование и предельный переход

Осталось решить вопрос о дифференцируемости предельной функции. В простейшем случае он решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 149 (Дифференцирование и предельный переход).
Пусть $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a,b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a,b]$, что последовательность $f_k(x_0)$ сходится.

2. Последовательность производных f'_k сходится на $[a, b]$ равномерно к функции g.

то

$$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{[a,b]} f,$$

причем $f' = g$ на $[a, b]$. В частности, $f \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Сперва заметим (теорема 145), что $g \in C[a, b]$. По теореме об интегрировании и предельном переходе (147),

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f'_k \, dx = \int\limits_{x_0}^{x} g \, dx,$$

где последняя сходимость равномерна по $x \in [a, b]$. В то же время (теорема 100),

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f'_k \, dx = \lim_{k\to\infty} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x} g \, dx.$$

Так как, согласно условию, существует предел

$$C = \lim_{k\to\infty} f_k(x_0),$$

то

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = C + \int\limits_{x_0}^{x} g \, dx,$$

где последняя сходимость, опять-таки, равномерна на $[a, b]$. Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом (99), получим

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

что и завершает доказательство. □

Аналогичная теорема справедлива и для рядов.

Теорема 150 (О почленном дифференцировании ряда).
Пусть $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что ряд с общим членом $f_k(x_0)$ сходится.
2. Ряд с общим членом f'_k сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме $\widetilde{S}$,

то ряд с общим членом f_k сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме S, причем $S' = \widetilde{S}$ на $[a, b]$. В частности, $S \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда. □

Стоит заметить, что при рассмотрении дифференцирования, условия теоремы оказываются более обременительными: требуется равномерная сходимость производных (ряда из производных). Это объясняется тем, что, в отличие от интегрирования, которое улучшает свойства функций, дифференцирование эти свойства, вообще говоря, портит.

§ 4. Степенные ряды и их свойства

Изучив общие свойства функциональных рядов, мы наконец-то переходим к рассмотрению наиболее интересных для нас (на данный момент) типов рядов — степенных.

① Понятие степенного ряда

Начнем изложение с основного определения.

Определение 146.
Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $a_k \in \mathbb{R}$.

Понятно, что такое название функционального ряда мотивировано тем, что в качестве членов ряда присутствуют лишь только степени x (иначе — степени $(x - x_0)$). Впрочем, иногда написанный ряд называют (уточняя) степенным по степеням $(x - x_0)$, или степенным с центром в точке x_0, или степенным в окрестности x_0.

Замечание 242.
Ясно, что множество сходимости любого степенного ряда не пусто – он сходится хотя бы в точке $x = x_0$.

Замечание 243.
Отметим и следующий важный (для краткости изложения) и весьма, вроде бы, очевидный момент. Линейной заменой $t = x - x_0$ произвольный степенной ряд сводится к ряду вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

– степенному ряду с центром в нуле. Не нарушая общности, в дальнейшем мы будем рассматривать именно такие ряды — ряды в окрестности нуля при $x_0 = 0$.

Согласно введенному нами ранее, получив некоторый функциональный ряд, в нашем случае — степенной, естественным образом возникают следующие вопросы:

1. Каково множество сходимости степенного ряда?
2. Каковы свойства суммы степенного ряда?
3. Можно ли данную функцию представить степенным рядом?

Каждый из озвученных вопросов важен по-своему. Впрочем, без ответа на первый вопрос изучение остальных вопросов оказывается бессмысленным. Итак, опишем вид множества сходимости произвольного степенного ряда.

(2) Первая теорема Абеля. Описание множества сходимости степенного ряда. Формула Коши–Адамара

Начнем сразу со следующей теоремы, которую принято называть первой теоремой Абеля.

Теорема 151 (Первая теорема Абеля).
Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$.

1. Если существует x_1, что ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{сходится,}$$
то ряд с общим членом $a_k x^k$ сходится абсолютно при всех x таких, что $|x| < |x_1|$.
2. Если существует x_1, что ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{расходится,}$$
то ряд с общим членом $a_k x^k$ расходится при всех x таких, что $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Ясно, что имеет смысл рассматривать случай $x_1 \neq 0$, ведь иначе множество x таких, что $|x| < |x_1|$, пусто. Пусть $x_1 \neq 0$ и $|x| < |x_1|$, тогда
$$\left|a_k x^k\right| = \left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$
Так как ряд с общим членом $a_k x_1^k$ сходится, то его общий член стремится (теорема 128) к нулю, а значит ограничен. Тем самым, $|a_k x_1^k| \leq C$, а тогда
$$\left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k \leq C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$
Заметим, что
$$0 \leq \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1,$$
а значит ряд с общим членом
$$C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k$$
сходится как геометричсекая прогрессия (пример 90). Отсюда, согласно признакам сравнения (теорема 130), сходится, причем абсолютно, исходный ряд.
2. Докажем второй пункт. От противного. Если бы при x таком, что $|x| > |x_1|$, ряд сходился, то по только что доказанному, он бы сходился и при $x = x_1$, что противоречит условию. $\square$

Из этой теоремы сразу вытекает вид множества сходимости степенного ряда.

Следствие 31 (О виде множества сходимости степенного ряда).
Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$. Тогда существует $R \in [0, +\infty]$, что при $x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -R); (R, +\infty)$ ряд расходится.

Отметим следующее направшивающееся замечание-уточнение.

Замечание 244.
Итак, множество сходимости степенного ряда с общим членом $a_k x^k$ — это симметричный относительно нуля промежуток. Конечно, для ряда с общим членом $a_k(x - x_0)^k$ — это симметричный относительно точки x_0 промежуток — промежуток $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Зафиксируем и следующее определение.

Определение 147.
Число R, существование которого доказано в предыдущем следствии, называется радиусом сходимости степенного ряда с общим членом $a_k x^k$, а множество $(-R, R)$ — интервалом сходимости соответствующего степенного ряда.

На концах интервала сходимости ряд может вести себя по-разному. Отметим это в отдельном замечании.

Замечание 245.
При $x = \pm R$ ситуация может быть разной. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

имеет радиус сходимости $R = 1$ и сходится лишь при $x \in (-1, 1)$. В то же время ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

тоже имеет радиус сходимости, равный 1, но сходится при $x \in [-1, 1]$, причем абсолютно. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

снова имеет радиус сходимости $R = 1$, но сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, при $x = -1$ сходится условно, а при $x = 1$ расходится. Может также возникнуть ситуация, когда в обеих точках $x = \pm R$ ряд сходится условно.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда удобно пользоваться признаками Даламбера, радикальным признаком Коши, и проч. С теоретической же точки зрения оказывается важной следующая теорема.

Теорема 152 (Формула Коши–Адамара).

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$ Тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши (131). Найдем

$$l = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, причем абсолютно. Если $l > 1$, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Если договориться, что $1/0 = +\infty$, $1/(+\infty) = 0$, то последнее равносильно неравенствам

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} \text{ и } |x| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

соответственно, что и доказывает теорему. □

③ Равномерная сходимость степенного ряда. Вторая теорема Абеля

Для того чтобы ответить на вопросы о свойствах суммы степенного ряда, решим вопрос о равномерной сходимости степенного ряда. Решать поставленный вопрос будем «в два прыжка». Первый такой: степенной ряд сходится на любом отрезке внутри интервала сходимости.

Теорема 153 (О равномерной сходимости степенного ряда).
Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ рассматриваемый ряд сходится равномерно на $[-r, r]$.

Доказательство. Для общего члена ряда при $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$\left|a_k x^k\right| \le a_k r^k.$$

Но, так как $r \in (0, R)$, то ряд с общим членом $a_k r^k$ сходится. Значит, утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса (142). □

Доказанная теорема в общем случае не позволяет сделать вывод о поведении ряда в точках $\pm R$. Точнее, она не позволит решить вопрос о включении этих точек в множество равномерной сходимости. Для этого есть более тонкий результат.

Теорема 154 (Вторая теорема Абеля).
Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Если сходится ряд с общим членом $a_k R^k$, то исходный ряд сходится равномерно на $[0, R]$.

Доказательство. Так как ряд с общим членом $a_k R^k$ сходится, то, согласно критерию

Коши 127, по $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \right| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_0$, $m > n$. Обозначим

$$A_m = \sum_{k=n+1}^{m} a_k R^k, \quad A_n = 0$$

и заметим, что

$$|A_m| < \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) \left(\frac{x}{R}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + A_{n+p} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}.$$

Так как $x \in [0, R]$, то

$$\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \geq 0, \quad \left(\frac{x}{R}\right)^k \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + |A_{n+p}| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} <$$

$$< \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \right) = \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leq \varepsilon,$$

откуда, согласно критерию Коши равномерной сходимости 140 и следует утверждение. □

Итак, доказанная теорема позволяет нам сформулировать следующий результат: степенной ряд сходится на любом отрезке внутри множества сходимости.

4 Свойства суммы степенного ряда

Теперь мы готовы применить доказанные факты о равномерной сходимости степенного ряда к исследованию вопросов свойств суммы степенного ряда. Первый вопрос – вопрос о непрерывности суммы ряда – решается моментально.

Теорема 155 (О непрерывности суммы степенного ряда).
Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Тогда сумма ряда непрерывна на множестве сходимости $\langle -R, R \rangle$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ и

$$\delta = \min \left(\frac{R - x_0}{2}, \frac{x_0 + R}{2} \right).$$

Тогда $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset (-R, R)$ и, по теореме о равномерной сходимости степенного ряда (153), на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ ряд сходится равномерно. Так как члены рассматриваемого ряда непрерывны на этом отрезке, то по теореме о непрерывности суммы ряда (146), сумма рассматриваемого ряда тоже непрерывна на этом отрезке. В частности, она непрерывна при $x = x_0$.

Допустим теперь, что $x_0 = R$, $R \in \langle -R, R\rangle$. Тогда, согласно второй теореме Абеля (154), рассматриваемый ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$. Аналогичные приведенным ранее рассуждения показывают, что сумма рассматриваемого ряда непрерывна при $x = R$. Аналогичным образом рассматривается случай $x_0 = -R$, $-R \in \langle -R, R\rangle$. □

Теперь обратимся к вопросу интегрирования степенных рядов.

Теорема 156 (Об интегрировании степенного ряда).
Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R — его радиус сходимости. Тогда сумма ряда интегрируема по любому отрезку $[a, b]$ внутри множества сходимости $\langle -R, R\rangle$, причем

$$\int\limits_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_a^b x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Доказательство. Опираясь на теоремы (153) и (154) данная теорема – прямое следствие теоремы об интегрировании равномерно сходящегося ряда (148). □

Перед тем как решить вопрос о дифференцировании степенных рядов, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 88.
Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

совпадают.

Доказательство. Докажем, например, что радиусы сходимости первого и второго рядов совпадают. Так как $1 \le \sqrt[k]{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, то по $\varepsilon > 0$ найдется k_0, что $\forall k > k_0$ выполняется

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le \sqrt[k]{k|a_k|} < (1+\varepsilon)\sqrt[k]{|a_k|}.$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \le \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} \le (1+\varepsilon)\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

В силу произвольности ε,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

а значит, по теореме Коши–Адамара (152), радиусы сходимости одинаковы. Аналогично доказывается, что радиус сходимости третьего ряда такой же. □

Заметьте, что ряды, приведенные в лемме, получены формальным интегрированием и дифференцированием ряда с общим членом $a_k x^k$. Теперь мы готовы подробно осветить вопрос дифференцирования степенных рядов.

Теорема 157 (О дифференцировании степенного ряда).
Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$, R — его радиус сходимости, S – его сумма. Тогда $S \in C^\infty(-R, R)$, причем

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)a_k x^{k-m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как было доказано в предыдущей лемме, ряд, полученный формальным дифференцированием, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Тогда, выбрав

$$\delta = \frac{1}{2}\min(R - x_0, x_0 + R),$$

получим, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in (-R, R),$$

а значит (теорема 153) ряд, полученный формальным дифференцированием, сходится на этом отрезке равномерно. Так как исходный ряд сходится (хотя бы в точке $x_0 \in (-R, R)$), то по теореме о дифференцировании функционального ряда (150) заключаем, что

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k.$$

Так как x_0 — произвольная точка из интервала сходимости, то доказано, что S дифференцируема на $(-R, R)$ и

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

Из теоремы о непрерывности суммы степенного ряда (155) заключаем, что $S \in C^1(-R, R)$. Дальнейшее доказательство проводится по индукции. □

Отметим и следующее замечание.

Замечание 246.
Вопрос о дифференцируемости суммы степенного ряда на границе множества сходимости, то есть в точках $\pm R$, может решаться снова с использованием второй теоремы Абеля (154) и соответствующей теоремы о дифференцировании рядов (150). Чтобы не загромождать формулировку теоремы, предлагаем проверять соответствующие условия каждый раз непосредственно.

§ 5. Ряды Тейлора

В этом разделе мы обсудим важное обобщение ранее изученной формулы Тейлора – способа приближения функции многочленом – на ряды Тейлора – способа представления функции степенным рядом.

① Интегральная форма остаточного члена в формуле Тейлора

В разделе, касающемся формулы Тейлора, мы уже обсуждали вид остаточного члена r_n в представлении

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x, x_0),$$

причем достаточно общо (теорема 65). Впрочем, чуть ли не там же было сказано, что предложенный способ получения семейства остаточных членов оказывается весьма искусственным. Теперь же, изучив теорию интеграла, мы можем предложить намного более естественный способ получения, опять-таки, целого семейства остаточных членов, причем при практически тех же самых предположениях.

Теорема 158 (Интегральная форма остаточного члена).
Пусть функция f непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке с концами x_0 и x. Тогда

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница (100) и проинтегрируем по частям (теорема 102). Тогда,

$$f(x) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t) \, dt = -\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)(x - t)' \, dt =$$

$$= f'(x_0)(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x - t) \, dt = f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f''(t) \left((x - t)^2\right)' \, dt.$$

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt,$$

□

Теперь, используя первую теорему о среднем (97), мы без труда получим остаток в форме Лагранжа (20):

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0.

Аналогичным образом можно получить и остаток в форме Коши (21):

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\int\limits_{x_0}^{x}dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0),$$

где ξ лежит между x и x_0.

(2) Ряды Тейлора и Маклорена

Теперь обратимся к формальным определениям.

Определение 148 (Понятие ряда Тейлора).
Пусть функция f бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется рядом Тейлора, порожденным в точке x_0 функцией f. В случае $x_0 = 0$ ряд Тейлора часто называется рядом Маклорена.

Понятно, что после введения данного определения чуть ли не сразу возникает несколько вопросов. Один из ключевых такой: а сходится ли ряд Тейлора к породившей его функции, и если сходится, то на каком множестве? Ответ на этот вопрос дадим в следующем замечании.

Замечание 247.
Отметим, что ряд Тейлора всегда сходится к породившей его функции хотя бы в одной точке — в точке x_0.

Впрочем, может оказаться так, что ряд Тейлора сходится вообще при любых $x \in \mathbb{R}$, но к породившей его функции лишь в одной точке. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Нетрудно показать, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, и что, кроме того,

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

а значит ряд Маклорена, порожденный функцией f, – это ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0.$$

Написанный ряд сходится всюду к своей сумме – к нулю, и лишь в одной точке к породившей его функции – в нуле. Такая особенность возникает по причине так называемой неаналитичности функции f в нуле.

Понятно, что справедлива следующая теорема.

Теорема 159 (Критерий представимости функции своим рядом Тейлора).
Для того чтобы ряд Тейлора, построенный по функции f, сходился к этой функции в точке x необходимо и достаточно, чтобы

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из представления

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0).$$

□

Отметим и следующее достаточное условие сходимости ряда Тейлора к породившей его функции.

Теорема 160 (Достаточное условие представимости функции своим рядом Тейлора).
Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке I с концами x_0 и x. Если на этом отрезке производные функции f равномерно ограничены, то есть

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \le M, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ t \in I,$$

то

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то есть ряд Тейлора, построенный по функции f, сходится к этой функции в точке x.

Доказательство. Рассмотрим остаток в форме Лагранжа (20). Согласно условию,

$$|r_n(x, x_0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \le M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где последнее утверждение верно в силу леммы 23. Последнее утверждение теоремы следует из (предыдущей) теоремы 159. □

Нетрудно понять, что в рамках условий теоремы справедливо и более общее высказывание, а именно

$$r_n(t, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad t \in I.$$

Тем самым, гарантируется сходимость ряда Тейлора к породившей его функции на всем отрезке с концами x_0 и x.

Конечно, справедлива следующая теорема единственности: если функция раскладывается в некоторый степенной ряд, то этот ряд – ее ряд Тейлора.

Теорема 161 (Теорема единственности).
Пусть при $|x - x_0| < R$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Согласно теореме о дифференцировании суммы степенного ряда (157),

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(x - x_0)^{k-m}.$$

Подставив $x = x_0$, получаем, что

$$f^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_m,$$

откуда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

□

3 Разложение некоторых простейших функций в ряд Маклорена

В этом разделе мы во многом повторим то, что было изучено в параграфе, касающемся формулы Тейлора. Основные результаты оформим в виде теорем.

Показательная функция

Данный результат нам, в целом, полностью известен.

Теорема 162 (Ряд Маклорена для показательной функции).

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = e^x$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \le e^{|x|},$$

а значит утверждение следует из теоремы 160.
Для доказательства второго соотношения заметим, что

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Так как $x \ln a \in \mathbb{R}$, то утверждение следует из доказанного для экспоненты. □

Синус и косинус

Теперь обсудим разложения синуса и косинуса.

Теорема 163 (Ряд Маклорена для синуса и косинуса).

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = \sin x$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \le 1,$$

а значит утверждение следует из теоремы 160. Второе соотношение доказывается аналогичным образом. □

Логарифм

В этом разделе мы обсудим разложение логарифма.

Теорема 164 (Ряд Маклорена для логарифма).

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Так как

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n},$$

то ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^{(n)}(x)$ на множестве $(-1, 1]$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши (21), получим

$$|r_n(x, 0)| = \left| \frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \right| |x| = \frac{|x|}{1+\xi} \left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right|^n.$$

Так как при $x \in (-1, 1)$

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{|x|-|\xi|}{1+\xi} \leq \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 + \frac{|x|-1}{1-|\xi|} \leq 1 + |x| - 1 = |x|,$$

то мы приходим к тому, что

$$|r_n(x, 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|\xi|} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow[n\to\infty]{(-1,1)} 0.$$

Наконец, так как при $x = 1$ по признаку Лейбница (138) заявленный ряд сходится, то его сумма непрерывна (теорема 155) не только на $(-1, 1)$, но и на $(-1, 1]$, а значит заявленное разложение справедливо и при $x = 1$. □

Кстати говоря, мы сново получили уже известное нам равенство

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Приведем и другой способ рассуждений, полезный, в первую очередь, на практике, хотя бы для вспоминания «правильных» соотношений.

Замечание 248.
Мы знаем (пример 90), что

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1).$$

Заменой x на $-x$ придем к тому, что

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad x \in (-1, 1).$$

Теперь, интегрируя написанный ряд (теорема 156) по отрезку с концами 0 и x при $x \in (-1, 1)$ приходим к тому, что

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1).$$

Рассуждения про точку $x = 1$ остаются прежними. Заметьте, что в приведенном подходе мы нигде не пользовались каким-либо остаточным членом.

Арктангенс

В этом разделе мы обсудим разложение арктангенса. Воспользуемся тем же соображением, что в замечании к разложению логарифма.

Теорема 165 (Ряд Маклорена для арктангенса).

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Доказательство. В верном равенстве (пример 90)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

заменим x на $-x^2$, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1).$$

Теперь, интегрируя написанный ряд (теорема 156) по отрезку с концами 0 и x при $x \in (-1, 1)$ приходим к тому, что

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

По признаку Лейбница (138), ряд, написанный справа, сходится при $x = \pm 1$, а значит, его сумма непрерывна (теорема 155) не только на $(-1, 1)$, но и на $[-1, 1]$. Тем самым, заявленное разложение справедливо и при $x = \pm 1$. □

Бином

В этом разделе мы обсудим разложение бинома.

Теорема 166 (Ряд Маклорена для бинома).

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1, 1), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

то при $\alpha - n < 0$ ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^{(n)}(x)$ на множестве $(-1, 1)$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши (21), получим

$$|r_n(x, 0)| = \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!} (1+\xi)^{\alpha-1} |x| \left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right|^n.$$

Тогда, при $x \in (-1, 1)$, так как $(1+\xi) < 2$, аналогично доказанному при рассмотрении логарифма,

$$|r_n(x, 0)| \le 2^{\alpha-1} |x|^{n+1} \left| \alpha \left(\frac{\alpha}{1} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \ldots \left(\frac{\alpha}{n} - 1 \right) \right|.$$

Так как при достаточно больших n (момент зависит от α и x) при увеличении n на единицу правая часть полученного неравенства умножается на

$$\left|\frac{\alpha}{n+1}-1\right||x|<q<1,$$

то $r_n(x,0)$ с ростом n стремится к нулю, что и доказывает утверждение. □

Отметим без доказательства следующее замечание, касающееся поведения написанного ряда при $x=\pm 1$ и иногда при $x\in\mathbb{R}$.

Замечание 249.
Понятно, что если $\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, то заявленное равенство верно при всех $x\in\mathbb{R}$, ведь $(1+x)^\alpha$ в этом случае – это просто многочлен.

Если же $\alpha\notin\mathbb{N}$, то заявленное равенство не может выполняться при $x\notin[-1,1]$, ведь при достаточно большом n производная $f^{(n)}(x)$ будет бесконечна при $x=-1$, что противоречит бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда внутри интервала сходимости. В случае, если рассматриваемый ряд сходится либо при $x=-1$, либо при $x=1$, вопрос все так же решается с использованием теоремы 155. Отметим результаты, касающиеся сходимости:

1. Если $\alpha\geq 0$, то рассматриваемый ряд сходится абсолютно при $x=\pm 1$.
2. Если $\alpha\in(-1,0)$, то рассматриваемый ряд сходится условно при $x=-1$ и расходится при $x=1$.
3. Если $\alpha\leq -1$, то рассматриваемый ряд расходится при $x=\pm 1$.

Выводы о значении суммы ряда во всех этих случаях остаются читателю в качестве упражнения.

Отметим и еще один способ получения заявленного разложения.

Замечание 250.
Легко проверить, например, используя признак Даламбера, что при $\alpha\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$ радиус сходимости ряда

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

равен 1. Пусть S – его сумма. Покажем, что $S(x)=(1+x)^\alpha$. Дифференцируя ряд почленно (теорема 157) при $x\in(-1,1)$, имеем

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}kx^{k-1}.$$

Сдвинем индекс суммирования, получим

$$S'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!}x^k.$$

Домножив исходное представление $S'(x)$ на x и добавив (нулевое) слагаемое при

$k=0$, имеем
$$xS'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}kx^k.$$
Складывая два последних представления, получаем
$$(1+x)S'(x)=\alpha S(x).$$
Положим
$$g(x)=\frac{S(x)}{(1+x)^\alpha},$$
тогда
$$g'(x)=\frac{(1+x)S'(x)-\alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}=0,$$
откуда (теорема 58) $g\equiv C$, $C\in\mathbb{R}$. Так как $g(0)=S(0)=1$, то $g\equiv 1$, откуда
$$S(x)=(1+x)^\alpha,\quad x\in(-1,1).$$

Арксинус

В этом разделе мы обсудим разложение арксинуса.

Теорема 167 (Ряд Маклорена для арксинуса).
$$\arcsin x=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad x\in[-1,1].$$

Доказательство. Доказательство можно провести с использованием разложения бинома для функции $(1-x^2)^{-1/2}$ и последующим интегрированием полученного равенства. Остальные детали остаются читателю в качестве упражнения. $\square$

§ 6. Тригонометрические ряды Фурье

(1) Понятие тригонометрического ряда Фурье

Перейдем к рассмотрению еще одного специального функционального ряда — тригонометрического.

Определение 149 (Понятие тригонометрического ряда).
Ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется тригонометрическим рядом, построенным по функциям

$$\{1, \cos kx, \sin kx,\ \ k\in\mathbb{N}\}.$$

Сходимость ряда, как обычно, – это сходимость последовательности его частичных сумм. Отсюда вытекает следующее замечание.

Замечание 251.
Частичные суммы тригонометрического ряда — это тригонометрические многочлены вида

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Естественным образом возникает вопрос о том, а как по данной функции f определить коэффициенты a_k, b_k введенного тригонометрического ряда. Отвечать на этот вопрос начнем с рассмотрения следующей технической леммы.

Лемма 89 (Об ортогональности системы тригонометрических функций).
Пусть $k, m\in\mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mx\ dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos kx\ dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin kx\ dx=0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mx\ dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx\ dx=0,\quad k\neq m,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\ dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\ dx=\pi,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}1^2\ dx=2\pi.$$

Доказательство. Доказательство проводится прямым вычислением и остается в качестве упражнения. □

Замечание 252.
Полезно снабдить данную лемму следующим важным пояснением. В линейной

алгебре обычно вводят понятие скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ и, как следствие, угла между двумя элементами векторного пространства. Элементы, скалярное произведение которых равно нулю при этом называются ортогональными. В только что приведенной лемме как раз-таки утверждается ортогональность функций $\sin kx$ и $\cos mx$, а также функций $\sin kx$, $\sin mx$ и $\cos kx$, $\cos mx$ при $k \neq m$ относительно предскалярного произведения на вещественном линейном пространстве $R[-\pi, \pi]$, задаваемого как

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\, dx.$$

Отличие введенного предскалярного произведения от скалярного заключается в том, что равенство $(f, f) = 0$ возможно не только при $f = 0$. Мы не будем исправлять это «недоразумение».

Напомним также, что имея скалярное произведение, можно ввести так называемую норму (в нашем случае – преднорму) элемента (аналог длины) согласно соотношению

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Последняя линия утверждений предыдущей леммы ровно-таки говорит нам о преднормах элементов 1, $\sin kx$, $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}$, относительно введенного выше предскалярного произведения.

Теперь предположим, что при каких-то $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx.$$

Легко понять, что справедливы следующие наблюдения (частично — утверждения):

1. Коэффициенты ряда должны зависеть от функции.
2. Если написанное равенство справедливо на $\mathbb{R}$, то f — периодическая функция с периодом 2π. В частности, f полностью определяется заданием ее значений на произвольном промежутке длины 2π.
3. Обратно, логично предположить, что имея 2π-периодическую функцию, ее можно разложить в написанный ряд. Это, конечно, не всегда так.

Пусть написанный ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$, тогда $f \in C[-\pi, \pi]$ и рассматриваемый ряд можно интегрировать почленно (теорема 148). Это дает вполне естественный способ определения коэффициентов a_k и b_k. Домножим рассматриваемое равенство на $\cos mx$ и проинтегрируем, получим:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f \cos mx\, dx = \frac{a_0(f)}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\, dx + b_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx\, dx.$$

Используя лемму об ортогональности системы тригонометрических функций (89), получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f \cos mx\, dx = a_m(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi a_m(f),$$

откуда
$$a_m(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\cos mx\;dx.$$
Для определения $a_0(f)$ домножим все на единицу и проинтегрируем. Пользуясь все той же леммой 89, получим
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\;dx=\frac{a_0(f)}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\;dx=\pi a_0(f),$$
откуда
$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\;dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\cos 0x\;dx.$$
Значит,
$$a_m(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\cos mx\;dx,\quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$
Аналогично,
$$b_m(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\sin mx\;dx,\quad m\in\mathbb{N}.$$
Теперь мы готовы ввести ключевое определение этого пункта.

Определение 150.
Если для функции f существуют числа $a_m(f)$ и $b_m(f)$, введенные выше, то ряд
$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx$$
называется тригонометрическим рядом Фурье функции f, а числа $a_m(f)$ и $b_m(f)$ – коэффициентами Фурье функции f относительно системы функций
$$\{1,\cos kx,\sin kx,\;\; k\in\mathbb{N}\}.$$

Зафиксируем и следующее замечание.

Замечание 253.
Обратите внимание, что манипуляции, проводимые для вычисления коэффициентов Фурье – это обобщение приемов линейной алгебры на бесконечномерные пространства со скалярным произведением. Если e_k, $k\in\{1,\;\ldots,n\}$ – ортогональный базис в некотором n-мерном пространстве X, то любой его элемент $x\in X$ может быть представлен единственным образом как линейная комбинация базисных элементов:
$$x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k.$$
Из этого представления рассуждениями, аналогичными тем, что были выше, мы

сразу получаем, что

$$\alpha_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Проблема нашей, бесконечномерной ситуации, заключается в том, что мы не знаем, можем ли мы обобщить равенство

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

на бесконечное число слагаемых, и даже если можем, то в каком смысле это равенство мы должны понимать?

Далее мы будем изучать поточечную сходимость написанного ряда.

2 Ряд Фурье в комплексной форме и ядро Дирихле

Для удобства дальнейшего изложения, перепишем рассматриваемый нами ряд, используя формулу Эйлера:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из нее моментально получается, что

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Подставляя эти соотношения в ряд Фурье, получаем

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k(f) \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikx} \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} + e^{-ikx} \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx},$$

где

$$c_k(f) = \begin{cases} \dfrac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}, & k > 0 \\ \dfrac{a_0(f)}{2}, & k = 0 \\ \dfrac{a_{-k}(f) + ib_{-k}(f)}{2}, & k < 0 \end{cases},$$

а под сходимостью полученного ряда (вообще-то с комплексными членами!) понимается сходимость последовательности «симметричных» частичных сумм (вообще-то вещественных)

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подставив вместо $a_k(f)$ и $b_k(f)$ ранее выведенные соотношения, получаем выражение для $c_k(f)$ вида

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 151 (Ряд Фурье в комплексной форме).
Если для функции f существуют числа $c_k(f)$, введенные выше, то ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

называется рядом Фурье в комплексной форме функции f, а числа $c_k(f)$ – коэффициентами Фурье функции f относительно системы функций

$$\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Отметим следующее замечание.

Замечание 254.
В соотношении для $c_k(f)$ присутствует интеграл от комплекснозначной функции – функции вида

$$w(t) = u(t) + iv(t),$$

где u, v – вещественнозначные функции вещественного аргумента. Под интегралом от такой функции мы понимаем следующее комплексное число, если оно существует:

$$\int\limits_a^b w\, dt = \int\limits_a^b u\, dt + i \int\limits_a^b v\, dt.$$

Понятно, что $w \in R[a,b]$ тогда и только тогда, когда $u, v \in R[a,b]$. Используемые в дальнейшем свойства написанного интеграла вытекают из свойств интеграла Римана и остаются читателю в качестве упражнения.

Обратите внимание, что введенный интеграл сохраняет не все свойства интеграла Римана. Так, ему чужды свойства, связанные с неравенствами, за исключением свойства из теоремы 96, ведь на множестве комплексных чисел нет упорядоченности. Теорема о среднем (97) для такого интеграла тоже оказывается неверной, ведь

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{it}\, dt = 0,$$

но $e^{it} \neq 0$ ни при каком $t \in \mathbb{R}$.

Преобразуем частичную сумму ряда Фурье в комплексной форме к более удобному виду.

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f e^{-ikt}\, dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\, dt.$$

Отдельно рассмотрим сумму (при $e^{ip} \neq 1 \;\Leftrightarrow\; p \neq 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z}$):

$$D_n(p) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikp} = \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{ip}\right)^k = \frac{e^{-ipn}\left(1 - e^{ip(2n+1)}\right)}{1 - e^{ip}} = \frac{e^{-ipn} - e^{ip(n+1)}}{1 - e^{ip}}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $e^{ip/2}$, получим

$$D_n(p) = \frac{e^{-ip(n+1/2)} - e^{ip(n+1/2)}}{e^{-ip/2} - e^{ip/2}} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)p}{\sin\frac{p}{2}}.$$

При $e^{ip} = 1$, очевидно, $D_n(p) = 2n + 1$. Итого,

$$D_n(p) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)p}{\sin\dfrac{p}{2}}, & p \neq 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z} \\ 2n + 1, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Введем следующее определение.

Определение 152 (Ядро Дирихле).
Функция $D_n(p)$ называется ядром Дирихле.

Отметим простейшие свойства ядра Дирихле.

Лемма 90 (Свойства ядра Дирихле).
Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:

1. $D_n(p)$ — 2π периодическая функция.
2. $D_n(p)$ — четная функция.
3. Выполнено условие нормировки:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n \, dp = 1.$$

Доказательство. Все эти свойства моментально следуют из исходного представления ядра Дирихле:

$$D_n(p) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikp}.$$

Детали остаются в качестве упражнения. □

Итак, для частичной суммы ряда Фурье оказывается справедливым следующее представление:

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) \, dt.$$

Для исследования последнего интеграла нам будет полезна так называемая лемма Римана.

3 Лемма Римана

В этом пункте мы обсудим важную техническую лемму – лемму Римана.

Лемма 91 (Лемма Римана).
Пусть $f \in R_{loc}(a, b)$ и

$$\int\limits_a^b |f|\, dx < +\infty.$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}\, dx \xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Прежде чем перейти к доказательству написанного утверждения, отметим следующее замечание.

Замечание 255.
Заявленный в утверждении предел – это предел функции вида

$$w(t) = u(t) + iv(t),$$

где u, v – вещественнозначные функции вещественного аргумента. Под пределом такой функции мы понимаем следующее комплексное число, если оно существует:

$$\lim_{t\to t_0} w(t) = \lim_{t\to t_0} u(t) + i \lim_{t\to t_0} v(t).$$

Детали, касающиеся свойств введенного понятия, остаются читателю.

Теперь приступим к доказательству.

Доказательство. Для начала заметим, что если $f(x) = c$ — некоторая константа и (a, b) — ограниченный промежуток, то

$$\int\limits_a^b ce^{i\lambda x}\, dx = c\left(\int\limits_a^b \cos\lambda x\, dx + i\int\limits_a^b \sin\lambda x\, dx\right) =$$

$$= c\left(\frac{\sin\lambda b - \sin\lambda a}{\lambda} - i\frac{\cos\lambda b - \cos\lambda a}{\lambda}\right) \xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0,$$

и утверждение теоремы выполнено. Сведем общий случай к данному.

Для начала покажем, что $\forall\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[\delta_1, \delta_2] \subset [a, b]$, что

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}\, dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\, dx\right| < \varepsilon \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Согласно условию (об абсолютной сходимости интеграла), можно найти числа δ_1 и

δ_2, что $\delta_1 < \delta_2$ и

$$\int\limits_a^{\delta_1} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int\limits_{\delta_2}^{b} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

Далее, для найденных δ_1 и δ_2,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| = \left|\int\limits_a^{\delta_1} f(x)e^{i\lambda x}\,dx + \int\limits_{\delta_2}^{b} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_a^{\delta_1} |f(x)||e^{i\lambda x}|\,dx + \int\limits_{\delta_2}^{b} |f(x)||e^{i\lambda x}|\,dx = \int\limits_a^{\delta_1} |f(x)|\,dx + \int\limits_{\delta_2}^{b} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $f \in R[\delta_1, \delta_2]$, то существует разбиение τ отрезка $[\delta_1, \delta_2]$ на отрезки Δ_i, $i \in \{1, \ \dots, n\}$, что

$$0 \le \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f\,dx - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

где

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

— нижняя сумма Дарбу. Пусть $g(x) = m_i$ при $x \in \Delta_i$ (на общих концах отрезков значения g можно брать любыми), тогда

$$0 \le \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| = \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x))e^{i\lambda x}\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x) - g(x)||e^{i\lambda x}|\,dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} (f - g)\,dx,$$

так как $f(x) \ge g(x)$. Последний интеграл, в свою очередь, может быть переписан так:

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x))\,dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)\,dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)\,dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)\,dx - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Итого,

$$0 \le \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < \varepsilon.$$

Осталось заметить, что

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)e^{i\lambda x}\,dx = \lim_{|\lambda| \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} m_i e^{i\lambda x}\,dx = 0,$$

где последнее равенство верно в силу того, что слагаемых конечное число, и каждое слагаемое стремится к нулю по доказанному в самом начале. В силу произвольности ε, лемма Римана полностью доказана. □

Отметим следующее замечание.

Замечание 256.
В рамках условий леммы Римана получаем, что

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

В частности,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Итак, для ряда Фурье функции f выполнено необходимое условие сходимости (теорема 128).

④ Условия Дини. Достаточное условие сходимости ряда Фурье

В этом разделе мы обсудим достаточные условия сходимости ряда Фурье к породившей его функции. Начнем со следующей леммы.

Лемма 92.
Пусть функция f является 2π-периодической на $\mathbb{R}$. Тогда

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \left(f(x-t)+f(x+t)\right) D_n(t)\,dt.$$

Доказательство. Вспомним, что

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Сделаем замену переменной $p = x - t$ и учтем, что, согласно условию и свойствам ядра Дирихле (90), подынтегральная функция является 2π-периодической. Тогда

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-p)D_n(p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-p)D_n(p)\,dp.$$

Так как ядро Дирихле является четным (лемма (90)), то

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \left(f(x-p) + f(x+p)\right) D_n(p)\, dp,$$

что и доказывает лемму. □

Сформулируем теперь так называемые условия Дини, которые помогут нам в дальнейшем установить достаточные условия сходимости ряда Фурье.

Определение 153 (Условия Дини).
Говорят, что функция $f : \overset{o}{U}(x) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, если:

1. Существуют односторонние пределы $f(x \pm 0)$ функции f в точке x.
2. Интегралы

$$\int\limits_0^\delta \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt, \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt$$

сходятся при некотором $\delta > 0$.

Теперь можно сформулировать и основное (для нас) достаточное условие сходимости ряда Фурье.

Теорема 168 (Достаточное условие сходимости ряда Фурье).
Пусть f – 2π-периодическая на $\mathbb{R}$ функция, причем $|f| \in R[-\pi, \pi]$. Если функция f удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Так как (лемма 92)

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \left(f(x-t) + f(x+t)\right) D_n(t)\, dt,$$

и так как (лемма 90)

$$\int\limits_0^\pi D_n(t)\, dt = \pi,$$

то

$$T_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \left(f(x-t) + f(x+t)\right) D_n(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \left(f(x+0) + f(x-0)\right) D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{f(x-t)-f(x-0)+f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt.$$

Так как $\sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}$ при $t \to 0+$, то, согласно условиям Дини, интегралы

$$\int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt$$

сходятся, а значит мы попадаем в условия леммы Римана (91). Тем самым,

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

$\square$

Напомним встречавшееся нам определение (99) кусочно-непрерывной функции, правда, несколько в другом варианте.

Замечание 257 (Понятие кусочно-непрерывной функции).
Говорят, что f кусочно-непрерывна на $[a,b]$, если существует разбиение $[a,b]$ такое, что

$$f \in C(x_{i-1}, x_i), \quad i \in \{1, \ \ldots, n\},$$

и существуют (в $\mathbb{R}$) односторонние пределы $f(x_i \pm 0)$, $i \in \{1, \ \ldots, n-1\}$, $f(x_0+0)$ и $f(x_n-0)$.

Определение 154 (Понятие кусочно-непрерывно дифференцируемой функции).
Функцию f, имеющую на отрезке $[a,b]$ кусочно-непрерывную производную, назовем кусочно-непрерывно дифференцируемой.

Следствие 32.
Кусочно-непрерывно дифференцируемая функция удовлетворяет условиям Дини.

5 Некоторые примеры и приложения

В этом разделе мы обсудим некоторые приложения рядов Фурье, а также посмотрим примеры разложения функции в ряд Фурье.

Ряд из обратных квадратов

Пусть функция $f(x) = x^2$ задана на $[-\pi,\pi]$, а дальше периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Ясно, что согласно доказанной теореме 168, ее ряд Фурье сходится к ней поточечно при $x \in \mathbb{R}$. Вычислим коэффициенты разложения.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Далее, пусть $k \geq 1$, тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cos kx\ dx,$$

где последнее равенство верно в силу четности подынтегральной функции и симметричности промежутка (теорема 104). Интегрируя два раза по частям и учитывая, что $\cos \pi k = (-1)^k$, получим

$$a_k(f) = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad k \geq 1.$$

Далее,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx\ dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток интегрирования симметричен (теорема 105). Итого, на $[-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx.$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Бесконечное произведение для синуса

Рассмотрим функцию $\cos \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, заданную на $[-\pi, \pi]$ и периодически продолженную на $\mathbb{R}$. Ясно, что построенный по ней ряд Фурье сходится к значению данной функции во всех точках $x \in \mathbb{R}$ (теорема 168). Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} (\cos(\alpha - k)x + \cos(\alpha + k)x)\ dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha - k)\pi}{\alpha - k} + \frac{\sin(\alpha + k)\pi}{\alpha + k}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi}\left(\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha - k} + \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha + k}\right) = \frac{(-1)^k}{\pi} 2\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

Далее,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin kx\ dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток симметричен (теорема 105). Тогда на $\mathbb{R}$, в силу непрерывности периодического продолжения,

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx \right).$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\cos \pi\alpha = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

и

$$\operatorname{ctg} \pi\alpha = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

или

$$\operatorname{ctg} \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

При $|\alpha| \le \alpha_0 < 1$ написанный ряд сходится равномерно, а значит его можно интегрировать почленно. Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда

$$\int\limits_0^x \left(\operatorname{ctg} \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} \right) \, d\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^x \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} \, d\alpha,$$

откуда

$$\ln \left| \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} \right| \Bigg|_0^x = \sum k = 1^\infty \ln |\alpha^2 - k^2| \Big|_0^x$$

или

$$\ln \left| \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{k^2} \right|.$$

Избавляясь от логарифмом, получаем, что

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right), \quad |x| < 1.$$

Итак, мы получили бесконечный аналоги теоремы Безу, но для синуса, а не для многочлена.

6 Ряд Фурье по произвольному промежутку длины $2l$

До сих пор мы рассматривали 2π-периодические функции, заданные на отрезке $[-\pi, \pi]$. Но что, если период у функции другой? Предположим, что функция f задана на промежутке $[-l, l]$ и периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Легко понять, что если $x \in [-l, l]$, то

$$y = \frac{\pi}{l} x \in [-\pi, \pi].$$

Значит, функции f можно сопоставить ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k(f) \sin \frac{\pi k x}{l},$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \, dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k(f) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Все сформулированные ранее результаты сохраняются с точностью до замены отрезка (или интервала) с концами $\pm\pi$ на отрезок (или интервал) с концами $\pm l$.