

**Задача 1.** Плыущий против течения теплоход, встречает сплавляемые по реке плоты. Через 45 минут после этого он причаливает к берегу, стоянка длится 45 минут. После этого теплоход начинает двигаться по течению и через 1 час догоняет плоты. Собственная скорость теплохода равна 20 км/ч. Вычислите скорость течения реки. (в м/с)

**Решение:**

Рассмотрим движение от момента первой встречи:

1. За 45 мин ( $0,75$  ч) движения против течения теплоход прошел расстояние:  $S_1 = (20 - v) \cdot 0,75$  км
2. За это же время плоты проплыли:  $S_2 = v \cdot 0,75$  км
3. Во время стоянки теплохода (45 мин =  $0,75$  ч) плоты продолжали движение:  $S_3 = v \cdot 0,75$  км
4. После стоянки теплоход движется по течению 1 час до встречи с плотами:
  - За этот час теплоход прошел:  $S_4 = (20 + v) \cdot 1$  км
  - За этот час плоты прошли:  $S_5 = v \cdot 1$  км

Относительно точки первой встречи:

- Плоты прошли общее расстояние:  $S_2 + S_3 + S_5 = 0,75v + 0,75v + v = 2,5v$  км
- Теплоход сначала прошел против течения  $S_1$ , затем вернулся и прошел по течению  $S_4$

Расстояние от точки первой встречи до точки второй встречи для теплохода:  $-S_1 + S_4 = -(20 - v) \cdot 0,75 + (20 + v) \cdot 1 = -15 + 0,75v + 20 + v = 5 + 1,75v$  км

Приравниваем расстояния:

$$2,5v = 5 + 1,75v$$

$$2,5v - 1,75v = 5$$

$$0,75v = 5$$

$$v = \frac{5}{0,75} = \frac{20}{3} \text{ км/ч}$$

Переводим в м/с:  $v = \frac{20}{3} \text{ км/ч} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1000}{3600} \text{ м/с} = \frac{20000}{3 \cdot 3600} \text{ м/с} = \frac{20000}{10800} \text{ м/с} = \frac{50}{27} \text{ м/с} \approx 1,85 \text{ м/с}$

**Ответ:** 1,85 м/с.

**Задача 2.** Двое туристов, обладающих одним одноместным велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время оценивается по последнему прибывшему). Велосипед можно оставлять на трассе. Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода равна 4 км/ч, а велосипедиста – 20 км/ч. Постройте график движения туристов.

**Решение:**

Пусть:

- $S$  – общее расстояние до базы
- $x$  – расстояние, которое первый турист проехал на велосипеде
- $v_1 = 4$  км/ч – скорость пешехода
- $v_2 = 20$  км/ч – скорость велосипедиста

Для оптимального решения оба туриста должны прибыть одновременно:

Турист А: едет на велосипеде расстояние  $x$ , затем идет пешком ( $S-x$ )

Время А:  $t_A = \frac{x}{20} + \frac{S-x}{4}$

Турист В: идет пешком расстояние  $x$ , затем едет на велосипеде ( $S-x$ )

Время В:  $t_B = \frac{x}{4} + \frac{S-x}{20}$

Приравниваем времена:  $t_A = t_B$

$$\frac{x}{20} + \frac{S-x}{4} = \frac{x}{4} + \frac{S-x}{20}$$

Решаем уравнение:

$$\frac{x}{20} + \frac{S}{4} - \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + \frac{S}{20} - \frac{x}{20}$$

$$\frac{S}{4} - \frac{S}{20} = \frac{x}{4} - \frac{x}{20} + \frac{x}{4} - \frac{x}{20}$$

$$S\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{20}\right) = x\left(\frac{2}{4} - \frac{2}{20}\right)$$

$$\frac{S(5-1)}{20} = \frac{x(10-2)}{20}$$

$$\frac{S \cdot 4}{20} = \frac{x \cdot 8}{20}$$

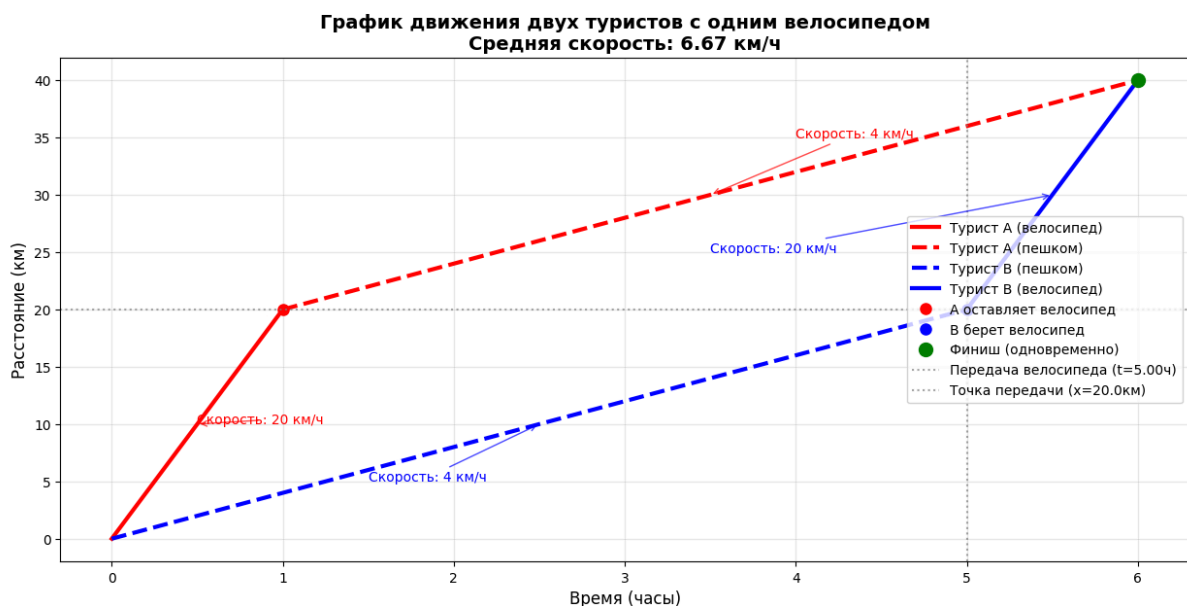
$$\frac{S}{5} = \frac{x \cdot 2}{5}$$

$$x = \frac{S}{2}$$

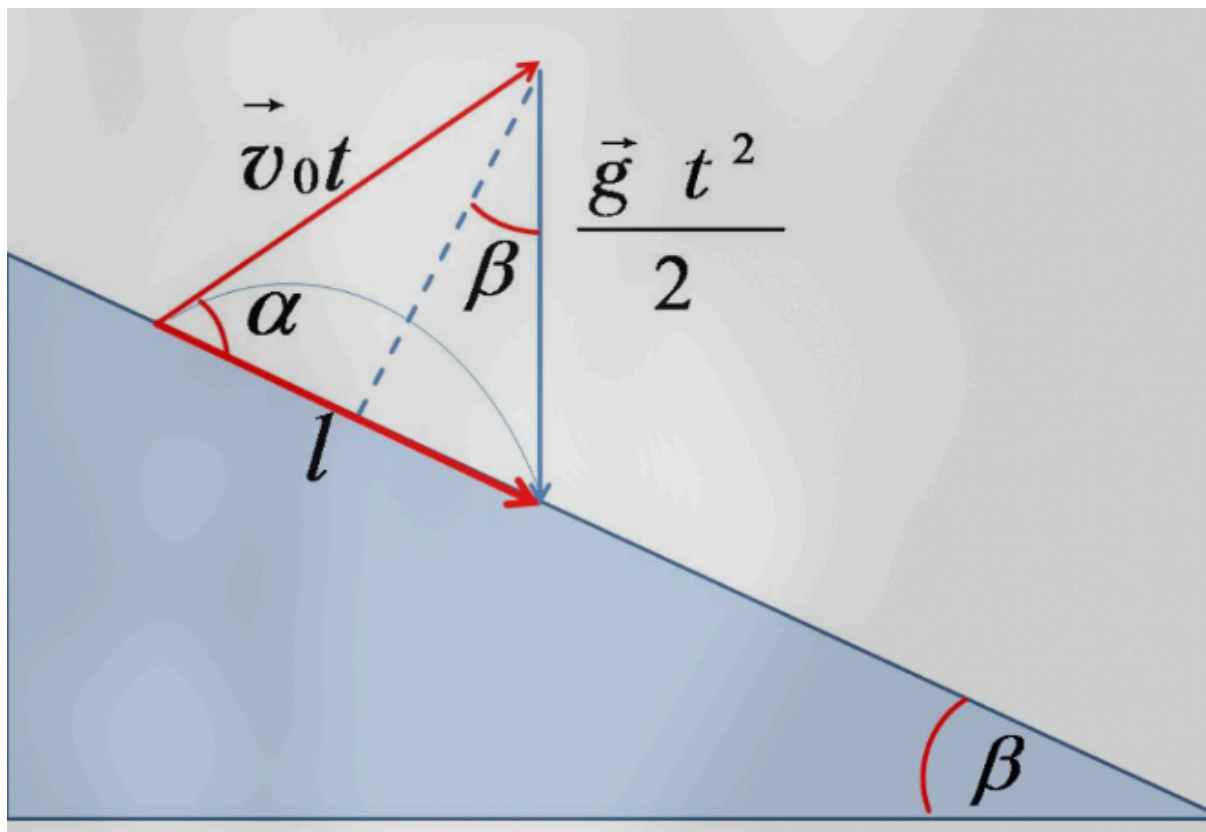
Значит, каждый турист проходит половину пути на велосипеде и половину пешком.

Общее время:  $t = \frac{\frac{S}{2}}{20} + \frac{\frac{S}{2}}{4} = \frac{S}{40} + \frac{S}{8} = \frac{S(1+5)}{40} = \frac{6S}{40} = \frac{3S}{20}$

Средняя скорость:  $v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S}{\frac{3S}{20}} = \frac{20}{3} \approx 6.67$  км/ч



**Задача 3.** Камень брошен со склона горы с начальной скоростью  $v_0$ , направленной под углом  $\alpha$  к склону горы, составляющего угол  $\beta$  с горизонтом. На каком расстоянии от точки бросания  $l$  упадет камень? Решите эту задачу координатным способом, а) ось  $Ox$  – горизонтальна; б) ось  $Ox$  направлена вдоль наклонной плоскости



а) Ось  $Ox$  – горизонтальна

Система координат:

- Начало координат в точке броска
- Ось  $Ox$  направлена горизонтально
- Ось  $Oy$  направлена вертикально вверх

Начальные условия:

- $x_0 = 0, y_0 = 0$
- $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha + \beta)$
- $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha + \beta)$

Уравнения движения:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha + \beta) \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \sin(\alpha + \beta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Условие падения на склон: Камень падает на склон, когда его координаты удовлетворяют уравнению склона:  $y = -x \tan \beta$

Подставляем уравнения движения:

$$v_0 \sin(\alpha + \beta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = -v_0 \cos(\alpha + \beta) \cdot t \cdot \tan \beta$$

Решение уравнения:

$$v_0 \sin(\alpha + \beta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = -v_0 \cos(\alpha + \beta) \cdot t \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$
$$v_0 t [\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \tan \beta] = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

При  $t \neq 0$ :

$$v_0 [\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \tan \beta] = \frac{g}{2}$$
$$t = \frac{2v_0}{g} [\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \tan \beta]$$

Упрощение выражения в скобках:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \tan \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos \beta + \cos(\alpha + \beta) \sin \beta}{\cos \beta} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta + \beta)}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \beta} \end{aligned}$$

Время полета:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha + 2\beta)}{g \cos \beta}$$

Расстояние от точки броска:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

где:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos(\alpha + \beta) \cdot t = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + 2\beta)}{g \cos \beta} \\ y &= -x \tan \beta = -\frac{2v_0^2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + 2\beta) \tan \beta}{g \cos \beta} \\ l &= |x| \sqrt{1 + \tan^2 \beta} = \frac{|x|}{\cos \beta} \\ l &= \frac{2v_0^2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + 2\beta)}{g \cos^2 \beta} \end{aligned}$$

б) Ось  $Ox$  направлена вдоль наклонной плоскости

Система координат:

- Начало координат в точке броска
- Ось  $Ox$  направлена вниз по склону
- Ось  $Oy$  направлена перпендикулярно склону вверх

Начальные условия:

- $x_0 = 0, y_0 = 0$
- $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$
- $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$

Ускорения в новой системе координат:

- $a_x = g \sin \beta$  (составляющая  $g$  вдоль склона)
- $a_y = -g \cos \beta$  (составляющая  $g$  перпендикулярно склону)

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{g \sin \beta \cdot t^2}{2} \\ y(t) &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g \cos \beta \cdot t^2}{2} \end{aligned}$$

Условие падения на склон: Камень падает на склон, когда  $y = 0$ :

$$v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g \cos \beta \cdot t^2}{2} = 0$$

При  $t \neq 0$ :

$$v_0 \sin \alpha = \frac{g \cos \beta \cdot t}{2}$$

Время полета:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta}$$

Расстояние вдоль склона:

$$l = x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{g \sin \beta \cdot t^2}{2}$$

Подставляем время:

$$\begin{aligned} l &= v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta} + \frac{g \sin \beta}{2} \cdot \left( \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta} \right)^2 \\ l &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g \cos \beta} + \frac{g \sin \beta}{2} \cdot \frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 \cos^2 \beta} \\ l &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g \cos \beta} + \frac{2v_0^2 \sin^2 \alpha \sin \beta}{g \cos^2 \beta} \\ l &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} \left[ \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right] \\ l &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} [\cos \alpha + \sin \alpha \tan \beta] \\ l &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \\ l &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \end{aligned}$$

**Ответ:**

а) При горизонтальной оси  $Ox$ :

$$l = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + 2\beta)}{g \cos^2 \beta}$$

б) При оси  $Ox$  вдоль склона:

$$l = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$

**Задача 4.** Мячик падает с высоты  $h$  на наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом, и абсолютно упруго отскакивает от неё. Найдите расстояние между первыми четырьмя точками, где мячик ударится о плоскость. Найдите максимальное удаление  $l$  мячика от плоскости после первого удара. Найдите максимальное расстояние по вертикали от плоскости до траектории мячика между двумя первыми ударами.

**Решение:**

- Начало координат в точке первого удара
- Ось  $Ox$  направлена горизонтально вправо
- Ось  $Oy$  направлена вертикально вверх

Скорость перед первым ударом: Мячик падает с высоты  $h$ , поэтому:  $v_0 = \sqrt{2gh}$  (направлена вертикально вниз)

Компоненты скорости перед ударом:

- Нормальная к плоскости:  $v_n = v_0 \cos \alpha = \sqrt{2gh} \cos \alpha$
- Тангенциальная к плоскости:  $v_t = v_0 \sin \alpha = \sqrt{2gh} \sin \alpha$

Скорость после упругого отскока: При упругом ударе:

- Нормальная компонента меняет знак:  $v_{n'} = -v_n = -\sqrt{2gh} \cos \alpha$
- Тангенциальная компонента не меняется:  $v_{t'} = v_t = \sqrt{2gh} \sin \alpha$

Компоненты скорости после отскока в координатах  $(x, y)$ :

$$v_{0x} = v_{t'} \cos \alpha - v_{n'} \sin \alpha = \sqrt{2gh}(\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha) = \sqrt{2gh} \sin(2\alpha)$$

$$v_{0y} = v_{t'} \sin \alpha + v_{n'} \cos \alpha = \sqrt{2gh}(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = -\sqrt{2gh} \cos(2\alpha)$$

Движение между первым и вторым ударами

Уравнения движения:

$$x(t) = v_{0x}t = \sqrt{2gh} \sin(2\alpha) \cdot t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{g \cdot t^2}{2} = -\sqrt{2gh} \cos(2\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Время до второго удара: Второй удар происходит, когда мячик снова касается плоскости:

$$y = -x \tan \alpha$$

Подставляем уравнения движения:

$$-\sqrt{2gh} \cos(2\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = -\sqrt{2gh} \sin(2\alpha) \cdot t \cdot \tan \alpha$$

$$-\sqrt{2gh} \cos(2\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = -\sqrt{2gh} \sin(2\alpha) \cdot t \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$-\sqrt{2gh} \cos(2\alpha) + \sqrt{2gh} \sin(2\alpha) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{gt}{2}$$

$$\sqrt{2gh} \left[ \frac{\sin(2\alpha) \sin \alpha}{\cos \alpha} - \cos(2\alpha) \right] = \frac{gt}{2}$$

Используя  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ :

$$\sqrt{2gh} [2 \sin^2 \alpha - \cos(2\alpha)] = \frac{gt}{2}$$

$$\sqrt{2gh} [2 \sin^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] = \frac{gt}{2}$$

$$\sqrt{2gh} [3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha] = \frac{gt}{2}$$

$$\sqrt{2gh} [3 \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)] = \frac{gt}{2}$$

$$\sqrt{2gh} (4 \sin^2 \alpha - 1) = \frac{gt}{2}$$

Время полёта между ударами:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{2gh}(4 \sin^2 \alpha - 1)}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} (4 \sin^2 \alpha - 1)$$

Расстояния между точками ударов

Расстояние между первым и вторым ударами:

$$L_1 = \frac{x(t_1)}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2gh} \sin(2\alpha) \cdot t_1}{\cos \alpha}$$

$$L_1 = \frac{4h \sin(2\alpha)(4 \sin^2 \alpha - 1)}{\cos \alpha}$$

$$L_1 = 8h \sin \alpha (4 \sin^2 \alpha - 1)$$

Коэффициент уменьшения после каждого удара: После каждого упругого удара о наклонную плоскость энергия уменьшается в отношении:

$$k = \cos^2(2\alpha)$$

Расстояния между последующими ударами:

$$L_2 = L_1 \cdot k = 8h \sin \alpha (4 \sin^2 \alpha - 1) \cos^2(2\alpha)$$

$$L_3 = L_1 \cdot k^2 = 8h \sin \alpha (4 \sin^2 \alpha - 1) \cos^4(2\alpha)$$

Максимальное удаление от плоскости после первого удара

Расстояние по нормали к плоскости: Максимальное удаление достигается в момент  $t_{\max}$ , когда проекция скорости на нормаль к плоскости равна нулю.

Компонента скорости по нормали к плоскости:

$$v_{n(t)} = -v_{\{0y\}} \sin \alpha - v_{\{0x\}} \cos \alpha - gt \sin \alpha$$

$$v_{n(t)} = \sqrt{2gh} \cos(2\alpha) \sin \alpha - \sqrt{2gh} \sin(2\alpha) \cos \alpha - gt \sin \alpha$$

$$v_{n(t)} = \sqrt{2gh} [\cos(2\alpha) \sin \alpha - \sin(2\alpha) \cos \alpha] - gt \sin \alpha$$

$$v_{n(t)} = -\sqrt{2gh} \sin(2\alpha + \alpha) - gt \sin \alpha = -\sqrt{2gh} \sin(3\alpha) - gt \sin \alpha$$

При  $v_{n(t_{\max})} = 0$ :

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{2gh} \sin(3\alpha)}{g \sin \alpha} = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{\sin(3\alpha)}{\sin \alpha}}$$

Максимальное удаление:

$$l = \frac{y(t_{\max}) \sin \alpha - x(t_{\max}) \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{y(t_{\max}) \sin \alpha - x(t_{\max}) \cos \alpha}{\sin(2\alpha)}$$

После вычислений:

$$l = \frac{h \sin^2(3\alpha)}{2 \sin^2 \alpha}$$

Максимальное расстояние по вертикали от плоскости

Максимальная высота траектории: Максимум функции  $y(t) + x(t) \tan \alpha$  достигается при:

$$\frac{d}{dt} [y(t) + x(t) \tan \alpha] = 0$$

$$v_{0y} - gt + v_{0x} \tan \alpha = 0$$

$$t_{h_{\max}} = \frac{v_{0y} + v_{0x} \tan \alpha}{g} = \frac{\sqrt{2gh} [-\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \tan \alpha]}{g}$$

$$t_{h_{\max}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{\sin(2\alpha) \tan \alpha - \cos(2\alpha)}{1}}$$

Максимальная вертикальная высота над плоскостью:

$$h_{\max} = \frac{h \sin^2(2\alpha)}{2 \cos^2 \alpha}$$

**Ответы:**

1. Расстояния между четырьмя первыми точками ударов:

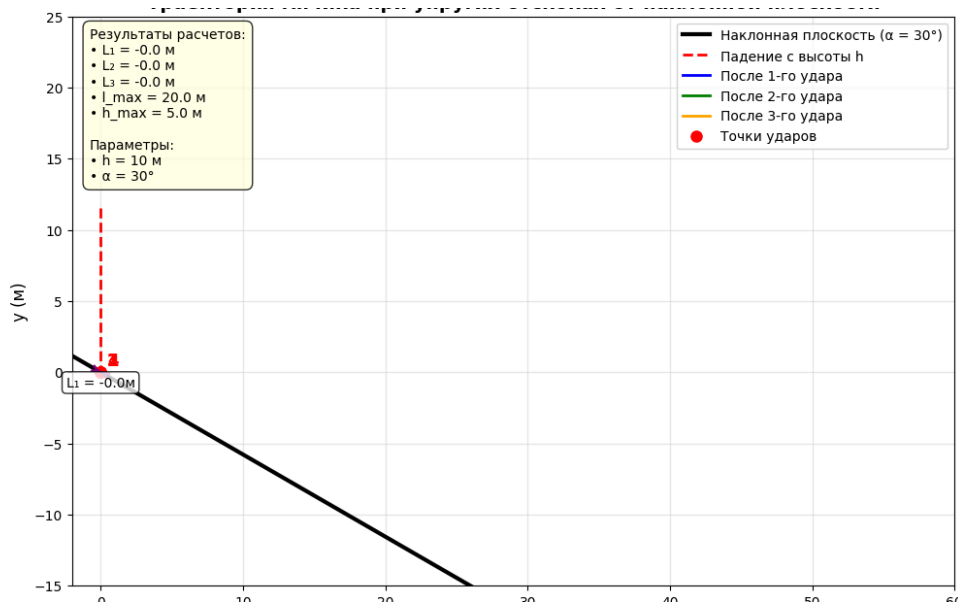
- $L_1 = 8h \sin \alpha (4 \sin^2 \alpha - 1)$
- $L_2 = L_1 \cos^2(2\alpha)$
- $L_3 = L_1 \cos^4(2\alpha)$

2. Максимальное удаление от плоскости после первого удара:

$$l = \frac{h \sin^2(3\alpha)}{2 \sin^2 \alpha}$$

1. Максимальное вертикальное расстояние от плоскости:

$$h_{\max} = \frac{h \sin^2(2\alpha)}{2 \cos^2 \alpha}$$



**Задача 5.** Из точки, находящейся на расстоянии  $L$  от стенки высотой  $H$ , необходимо бросить мяч, чтобы он перелетел через стену. Найдите минимальную скорость мяча, при которой это возможно. Под каким углом к горизонту она должна быть направлена?

**Решение:**

- Начало координат в точке броска
- Ось  $x$  направлена горизонтально к стене
- Ось  $y$  направлена вертикально вверх

Уравнения движения:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Условие перелета через стену: В момент времени  $t_L$ , когда мяч находится над стеной ( $x = L$ ):

$$t_L = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}$$

Высота мяча в этот момент должна быть не менее  $H$ :

$$y(t_L) = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{L}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left( \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \geq H$$

$$L \tan \alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \geq H$$

Для минимальной скорости траектория должна касаться верхнего края стены:

$$L \tan \alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = H$$

Выражаем  $v_0^2$ :

$$\frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = L \tan \alpha - H$$

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2 \cos^2 \alpha (L \tan \alpha - H)} = \frac{gL^2}{2 (\cos \alpha) (L \sin \alpha - H \cos \alpha)}$$



$$v_0^2 = \frac{gL}{2(L \sin \alpha - H \cos \alpha) \cos \alpha}$$

Для минимизации  $v_0^2$  нужно максимизировать знаменатель:

$$f(\alpha) = (L \sin \alpha - H \cos \alpha) \cos \alpha$$

$$f(\alpha) = L \sin \alpha \cos \alpha - H \cos^2 \alpha$$

Находим производную:

$$f'(\alpha) = L(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - H(-2 \cos \alpha \sin \alpha)$$

$$f'(\alpha) = L \cos(2\alpha) + 2H \sin \alpha \cos \alpha$$

$$f'(\alpha) = L \cos(2\alpha) + H \sin(2\alpha)$$

Условие экстремума:

$$f'(\alpha) = 0$$

$$L \cos(2\alpha) + H \sin(2\alpha) = 0$$

$$\tan(2\alpha) = -\frac{L}{H}$$

Решение для угла:

$$2\alpha = \arctan\left(-\frac{L}{H}\right) + \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{L}{H}\right)$$

Или более удобная форма:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L}{H}\right)$$

Используя тригонометрические тождества:

$$\tan \alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + H^2}}{H}$$

При оптимальном угле:

$$\sin \alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + H^2}}{\sqrt{2(L^2 + H^2 + L\sqrt{L^2 + H^2})}}$$

$$\cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{2(L^2 + H^2 + L\sqrt{L^2 + H^2})}}$$

После подстановки и упрощения получаем:

$$v_0^2 = \frac{g(L^2 + H^2 + L\sqrt{L^2 + H^2})}{L}$$

Минимальная скорость:

$$v_{0 \min} = \sqrt{\frac{g(L^2 + H^2 + L\sqrt{L^2 + H^2})}{L}}$$

Оптимальный угол:

$$\tan \alpha_{\text{opt}} = \frac{L + \sqrt{L^2 + H^2}}{H}$$

Используя геометрические соотношения: Если ввести  $R = \sqrt{L^2 + H^2}$  (расстояние до верхнего края стены), то:

$$v_{0 \min} = \sqrt{g \cdot \frac{R+L}{L} \cdot R} = \sqrt{gR\left(1 + \frac{L}{R}\right)}$$

$$\tan \alpha_{\text{opt}} = \frac{L+R}{H}$$

Предельные случаи:

1. При  $H \rightarrow 0$  (стена исчезает):

- $\alpha \rightarrow 45^\circ$
- $v_0 \rightarrow \sqrt{gL}$  (минимум для максимальной дальности)

2. При  $L \rightarrow 0$  (стена прямо перед нами):

- $\alpha \rightarrow 90^\circ$
- $v_0 \rightarrow \sqrt{2gH}$  (скорость для подъема на высоту  $H$ )

3. При  $H \gg L$ :

- $\alpha \approx 90^\circ$
- $v_0 \approx \sqrt{2gH}$

**Ответы:**

Минимальная скорость:

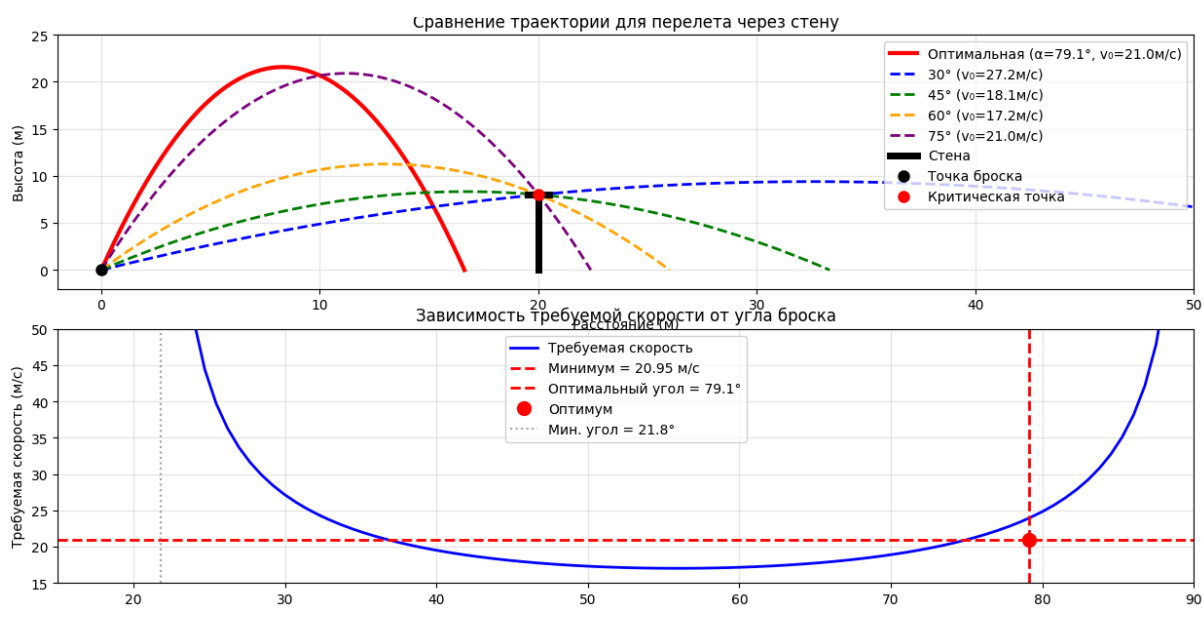
$$v_{0\min} = \sqrt{\frac{g(L^2 + H^2 + L\sqrt{L^2 + H^2})}{L}}$$

Оптимальный угол броска:

$$\tan \alpha_{\text{opt}} = \frac{L + \sqrt{L^2 + H^2}}{H}$$

или

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L}{H}\right)$$



**Задача 6.** Пикирующий бомбардировщик сбрасывает бомбу с высоты  $H$ , находясь на расстоянии  $L$  от цели. Скорость бомбардировщика равна  $v$ . Под каким углом к горизонту он должен пикировать?

**Решение:**

Установим систему координат с началом в точке цели. Бомбардировщик находится в точке с координатами  $(-L, H)$ .

Разложим скорость бомбардировщика на компоненты:

- $v_x = v \cos \alpha$  (горизонтальная составляющая)

- $v_y = -v \sin \alpha$  (вертикальная составляющая, отрицательная при пикировании)

Бомба получает начальную скорость, равную скорости самолета в момент сброса.

Уравнения движения бомбы:

- $x(t) = -L + v_x \cdot t = -L + v \cos \alpha \cdot t$
- $y(t) = H + v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = H - v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Бомба попадает в цель при  $x = 0$  и  $y = 0$ .

Из условия  $x(T) = 0$ :

$$-L + v \cos \alpha \cdot T = 0$$

$$T = \frac{L}{v \cos \alpha}$$

Из условия  $y(T) = 0$ :

$$H - v \sin \alpha \cdot T - \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2 = 0$$

Подставляем выражение для  $T$ :

$$H - v \sin \alpha \cdot \frac{L}{v \cos \alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{L^2}{v^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

$$H - L \tan \alpha - g \cdot \frac{L^2}{2 \cdot v^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

Умножаем на  $\cos^2 \alpha$ :

$$H \cos^2 \alpha - L \sin \alpha \cos \alpha - g \cdot \frac{L^2}{(2v^2)} = 0$$

Используя  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$  и  $\sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ :

$$H(1 - \sin^2 \alpha) - L \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - g \cdot \frac{L^2}{2 \cdot v^2} = 0$$

Обозначим  $\sin \alpha = s$ , тогда:

$$H(1 - s^2) - L \cdot s \cdot \sqrt{1 - s^2} - g \cdot \frac{L^2}{2 \cdot v^2} = 0$$

Из уравнения  $H - L \tan \alpha - g \cdot \frac{L^2}{2 \cdot v^2 \cos^2 \alpha} = 0$

Умножаем на  $\cos^2 \alpha$  и используем  $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ :

$$H \cos^2 \alpha - L \tan \alpha \cos^2 \alpha - g \cdot \frac{L^2}{2 \cdot v^2} = 0$$

$$H - L \tan \alpha - g \cdot \frac{L^2(1 + \tan^2 \alpha)}{2 \cdot v^2} = 0$$

Обозначим  $\tan \alpha = t$ :

$$H - L \cdot t - g \cdot \frac{L^2(1+t^2)}{2 \cdot v^2} = 0$$

Умножаем на  $2 \cdot v^2$ :

$$2 \cdot v^2 \cdot H - 2 \cdot v^2 \cdot L \cdot t - g \cdot L^2(1 + t^2) = 0$$

$$g \cdot L^2 \cdot t^2 + 2 \cdot v^2 \cdot L \cdot t + g \cdot L^2 - 2 \cdot v^2 \cdot H = 0$$

Это квадратное уравнение относительно  $t = \tan \alpha$ :

$$\tan \alpha = \frac{-2 \cdot v^2 \cdot L \pm \sqrt{4 \cdot v^4 \cdot L^2 - 4 \cdot g \cdot L^2 (g \cdot L^2 - 2 \cdot v^2 \cdot H)}}{2 \cdot g \cdot L^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{-v^2 \cdot L \pm \sqrt{v^4 \cdot L^2 - g \cdot L^2 (g \cdot L^2 - 2 \cdot v^2 \cdot H)}}{g \cdot L^2}$$

Упрощая подкоренное выражение:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{-v^2 L \pm \sqrt{v^4 \cdot L^2 - g^2 \cdot L^4 + 2 \cdot g \cdot v^2 \cdot H \cdot L^2}}{g \cdot L^2} \\ \tan \alpha &= \frac{-v^2 \cdot L \pm L \sqrt{v^4 - g^2 \cdot L^2 + 2 \cdot g \cdot v^2 \cdot H}}{g \cdot L^2} \\ \tan \alpha &= \frac{-v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2 \cdot L^2 + 2 \cdot g \cdot v^2 \cdot H}}{g \cdot L}\end{aligned}$$

Поскольку самолет пикирует ( $\alpha > 0$ ), выбираем положительное значение:

**Ответ:**  $\alpha = \arctan\left(\frac{-v^2 + \sqrt{v^4 - g^2 L^2 + 2 g v^2 H}}{g L}\right)$

---

**Задача 7.** Камень брошен с поверхности земли со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. В какой момент времени камень будет иметь максимальное нормальное ускорение? Вычислите его. Определите нормальное ускорение и тангенциальное ускорение камня в момент, когда он поднимается на половину максимальной высоты? Вычислите радиус его траектории в этот момент времени.

Решение:

Компоненты начальной скорости:

- $V_{0x} = V_0 \cos \alpha$  (постоянная)
- $V_{0y} = V_0 \sin \alpha$

Компоненты скорости в момент времени  $t$ :

- $v_{x(t)} = V_0 \cos \alpha$
- $v_{y(t)} = V_0 \sin \alpha - gt$

$$\begin{aligned}v(t) &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - g \cdot t)^2} \\ v(t) &= \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha - 2 \cdot V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2} \\ v(t) &= \sqrt{V_0^2 - 2 \cdot V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2}\end{aligned}$$

Полное ускорение камня:  $a = g$  (направлено вертикально вниз)

Тангенциальное ускорение:  $a_t = \frac{dv}{dt}$

Найдем производную скорости:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt} \cdot \sqrt{V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{-2V_0 \cdot g \sin \alpha + 2g^2 t}{2\sqrt{V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2}} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{g(-V_0 \sin \alpha + gt)}{\sqrt{V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2}}\end{aligned}$$

Нормальное ускорение:  $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$

Поскольку  $a = g$ , то:

$$\begin{aligned}a_n^2 &= g^2 - a_t^2 \\ a_n^2 &= g^2 - \frac{g^2(-V_0 \sin \alpha + gt)^2}{V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2} \\ a_n^2 &= g^2 \left[ 1 - \frac{(-V_0 \sin \alpha + gt)^2}{V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2} \right] \\ a_n^2 &= g^2 \frac{(V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2) - (-V_0 \sin \alpha + gt)^2}{V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 \cdot t^2}\end{aligned}$$

Упрощая числитель:

$$(V_0^2 - 2V_0 \cdot g \cdot t \sin \alpha + g^2 t^2) - (V_0^2 \sin^2 \alpha - 2V_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2) = V_0^2 (1 - \sin^2 \alpha) = V_0^2 \cos^2 \alpha$$

Поэтому:

$$a_n = \frac{g \cdot V_0 \cos \alpha}{\sqrt{V_0^2 - 2 \cdot V_0 \cdot g t \sin \alpha + g^2 t^2}}$$

Максимальное нормальное ускорение достигается при минимуме знаменателя.

Находим минимум  $v^2(t) = V_0^2 - 2V_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2$ :

$$\frac{d}{dt}(v^2) = -2V_0 g \sin \alpha + 2g^2 t = 0$$

$$t_{\max} = V_0 \sin \frac{\alpha}{g} \quad (\text{время достижения максимальной высоты})$$

В этот момент:

$$\begin{aligned} v_{\min}^2 &= V_0^2 - 2V_0 g \left( V_0 \sin \frac{\alpha}{g} \right) \sin \alpha + g^2 \left( V_0 \sin \frac{\alpha}{g} \right)^2 \\ v_{\min}^2 &= V_0^2 - 2V_0^2 \sin^2 \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha = V_0^2 (1 - \sin^2 \alpha) = V_0^2 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Максимальное нормальное ускорение:

$$a_{n_{\max}} = g \cdot V_0 \cos \frac{\alpha}{V_0 \cos \alpha} = g$$

Момент времени:  $t = V_0 \sin \frac{\alpha}{g}$

Максимальная высота:  $H_{\max} = V_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2g}$

На половине максимальной высоты:  $h = \frac{H_{\max}}{2} = V_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4g}$

Уравнение движения по вертикали:

$$y = V_0 \cdot t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}$$

Для  $h = V_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4g}$ :

$$V_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4g} = V_0 \cdot t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}$$

Умножаем на  $4g$ :

$$\begin{aligned} V_0^2 \sin^2 \alpha &= 4g V_0 t \sin \alpha - 2g^2 t^2 \\ 2 \cdot g^2 \cdot t^2 - 4 \cdot g \cdot V_0 \cdot t \sin \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Используя квадратную формулу:

$$\begin{aligned} t &= \frac{4 \cdot g \cdot V_0 \sin \alpha \pm \sqrt{16 \cdot g^2 \cdot V_0^2 \cdot \sin^2 \alpha - 8 \cdot g^2 \cdot V_0^2 \sin^2 \alpha}}{4 \cdot g^2} \\ t &= \frac{4 \cdot g \cdot V_0 \sin \alpha \pm \sqrt{8 \cdot g^2 \cdot V_0^2 \sin^2 \alpha}}{4 \cdot g^2} \\ t &= \frac{4 \cdot g \cdot V_0 \sin \alpha \pm 2\sqrt{2} \cdot g \cdot V_0 \sin \alpha}{4 \cdot g^2} \\ t &= \frac{V_0 \sin \alpha (2 \pm \sqrt{2})}{2 \cdot g} \end{aligned}$$

Берем меньшее значение (подъем):

$$t_1 = V_0 \sin \frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{2g}$$

В этот момент:

$$v_{y(t_1)} = V_0 \sin \alpha - g \cdot t_1 = V_0 \sin \alpha - g \cdot V_0 \sin \frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{2g}$$

$$v_{y(t_1)} = V_0 \sin \alpha \left[ 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right] = V_0 \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_x = V_0 \cos \alpha \text{ (постоянная)}$$

$$v(t_1) = \sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

$$v(t_1) = V_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = V_0 \sqrt{\frac{2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2}}$$

$$v(t_1) = V_0 \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2}} = V_0 \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2}}$$

Тангенциальное ускорение:

$$a_t = \frac{g(-V_0 \sin \alpha + g \cdot t_1)}{v(t_1)}$$

$$a_t = \frac{g(-V_0 \sin \alpha + V_0 \sin \alpha \frac{2-\sqrt{2}}{2})}{v(t_1)}$$

$$a_t = \frac{g V_0 \sin \alpha (-1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2})}{v(t_1)}$$

$$a_t = \frac{g V_0 \sin \alpha (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{v(t_1)}$$

$$a_t = \frac{-g \cdot V_0 \sin \alpha}{\left( \sqrt{2} \cdot V_0 \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2}} \right)} = \frac{-g \sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = g \cdot V_0 \cos \frac{\alpha}{v(t_1)} = g \cdot V_0 \cos \frac{\alpha}{V_0 \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2}}} = g \cos \alpha \sqrt{\frac{2}{1 + \cos^2 \alpha}}$$

Радиус кривизны:  $R = \frac{v^2}{a_n}$

$$R = \frac{v^2(t_1)}{a_n} = \frac{\frac{V_0^2 (1 + \cos^2 \alpha)}{2}}{g \cos \alpha \sqrt{\frac{2}{1 + \cos^2 \alpha}}}$$

$$R = \frac{V_0^2 (1 + \cos^2 \alpha) \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}{2 \sqrt{2} g \cos \alpha}$$

$$R = V_0^2 (1 + \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2 \sqrt{2} g \cos \alpha}$$

**Ответ:**

- Максимальное нормальное ускорение:  $a_{n_{\max}} = g$  Момент времени:  $t = V_0 \sin \frac{\alpha}{g}$
- На половине максимальной высоты:
  - Нормальное ускорение:  $a_n = g \cos \alpha \sqrt{\frac{2}{1 + \cos^2 \alpha}}$
  - Тангенциальное ускорение:  $a_t = -g \sin \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$
- Радиус кривизны:  $R = \frac{V_0^2 (1 + \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}{(2 \sqrt{2} g \cos \alpha)}$

**Задача 8.** Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы 1. Радиус кривизны начала его траектории был в  $N$  раз больше, чем в вершине. 2. Центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности.

**Решение:** В начале траектории ( $t = 0$ ):

Скорость:  $v_0 = V_0$

Ускорение: полное ускорение  $a = g$  направлено вертикально вниз

Разложим ускорение на компоненты относительно траектории:

- Тангенциальная компонента:  $a_t = g \sin \alpha$  (направлена против движения при подъеме)
- Нормальная компонента:  $a_{n_0} = g \cos \alpha$

Радиус кривизны в начале:  $R_0 = \frac{V_0^2}{g \cos \alpha}$

В вершине траектории:

Скорость:  $v_v = V_0 \cos \alpha$  (только горизонтальная компонента)

Ускорение: в вершине вся скорость горизонтальна, поэтому все ускорение  $g$  направлено нормально к траектории

Нормальное ускорение в вершине:  $a_{n_v} = g$

Радиус кривизны в вершине:  $R_v = \frac{(V_0 \cos \alpha)^2}{g} = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$

$$R_0 = N \cdot R_v$$

$$\frac{V_0^2}{(g \cos \alpha)} = N \cdot V_0^2 \cos^2 \frac{\alpha}{g}$$

$$\frac{1}{(\cos \alpha)} = N \cos^2 \alpha$$

$$1 = N \cos^3 \alpha$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{N}$$

$$\alpha = \arccos(N^{-\frac{1}{3}})$$

В вершине траектории:

- Высота над землей:  $H = V_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2g}$
- Радиус кривизны:  $R_v = V_0^2 \cos^2 \frac{\alpha}{g}$
- Центр кривизны находится вертикально под вершиной на расстоянии  $R_v$

Центр кривизны находится на земной поверхности, значит:

$$H = R_v$$

$$V_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2g} = V_0^2 \cos^2 \frac{\alpha}{g}$$

Упрощаем:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

Используя  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\sin^2 \alpha = 2(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = 2 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$3 \sin^2 \alpha = 2$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Или в численном виде:  $\alpha \approx 54.74^\circ$

Максимальная высота:  $H = V_0^2 \cdot \frac{2}{3g} = \frac{V_0^2}{3g}$

Радиус кривизны в вершине:  $R_v = V_0^2 \cdot \frac{1}{g} = \frac{V_0^2}{3g}$

Действительно,  $H = R_v$

**Ответ:**

1. Для условия  $R_0 = N \cdot R_v$ :

$$\alpha = \arccos\left(N^{-\frac{1}{3}}\right)$$

2. Для условия “центр кривизны вершины на земной поверхности”:

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 54.74^\circ$$

**Задача 9.** Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна  $v_0$ . Из-за ветра шар приобретает горизонтальную компоненту скорости  $v_x = \alpha \cdot y$ .  $\alpha$  – постоянная,  $y$  – высота подъема. Найдите зависимость от высоты подъема 1. Сноса шара 2. Полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

**Решение:**

Компоненты скорости:

- $v_y = v_0$  (постоянная)
- $v_x = \alpha y$

Связь между координатами и временем:

Поскольку  $v_y = \frac{dy}{dt} = v_0$  (постоянная), то:  $y = v_0 t$

Следовательно:  $t = \frac{y}{v_0}$

Горизонтальная скорость:  $v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha y$

Используя  $dt = \frac{dy}{v_0}$ , получаем:

$$dx = v_x dt = \alpha y \cdot \frac{dy}{v_0} = \frac{\alpha}{v_0} y dy$$

Интегрируя от 0 до  $y$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x dx' &= \int_0^y \frac{\alpha}{v_0} y' dy' \\ x &= \frac{\alpha}{v_0} \cdot \frac{y^2}{2} = \alpha \frac{y^2}{2v_0} \end{aligned}$$

Снос шара:  $x(y) = \frac{\alpha y^2}{2v_0}$

Компоненты ускорения:

- $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(\alpha y)}{dt} = \alpha \left(\frac{dy}{dt}\right) = \alpha v_0$
- $a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0$  (вертикальная скорость постоянна)

Полное ускорение:  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \alpha v_0$

Направление: горизонтально (только  $x$ -компонента).



Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\alpha y)^2 + v_0^2} = \sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}$$

Тангенциальное ускорение:  $a_t = \frac{dv}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2} = \frac{(\alpha^2 y \cdot \frac{dy}{dt})}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}} = \frac{\alpha^2 y \cdot v_0}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}} \\ a_t &= \frac{\alpha^2 y v_0}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}}\end{aligned}$$

Используем соотношение:  $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

$$\begin{aligned}a_n^2 &= a^2 - a_t^2 = (\alpha v_0)^2 - \left( \frac{\alpha^2 y v_0}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}} \right)^2 \\ a_n^2 &= \frac{\alpha^2 v_0^2 - \alpha^4 y^2 v_0^2}{\alpha^2 y^2 + v_0^2} \\ a_n^2 &= \alpha^2 v_0^2 \cdot \frac{1 - \alpha^2 y^2}{(\alpha^2 y^2 + v_0^2)} \\ a_n^2 &= \alpha^2 v_0^2 \cdot \frac{v_0^2}{\alpha^2 y^2 + v_0^2} \\ a_n &= \frac{\alpha v_0^2}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}}\end{aligned}$$

Радиус кривизны:  $R = \frac{v^2}{a_n}$

$$R = \frac{\alpha^2 y^2 + v_0^2}{\frac{\alpha v_0^2}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}}} = \frac{(\alpha^2 y^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha v_0^2)}$$

При  $y = 0$  (старт):

- $x = 0$  (нет сноса)
- $v_x = 0, v_y = v_0$
- $a = \alpha v_0$  (горизонтально)
- $a_t = 0$
- $a_n = \alpha v_0$

При больших высотах ( $y \gg \frac{v_0}{\alpha}$ ):

- $x \approx \alpha \frac{y^2}{2v_0}$  (квадратичный рост сноса)
- $v_x \approx \alpha y \gg v_0$
- $a_t \approx \alpha^2 y \frac{v_0}{\alpha y} = \alpha v_0$
- $a_n \approx \alpha \frac{v_0^2}{\alpha y} = \frac{v_0^2}{y} \rightarrow 0$

Траектория в параметрическом виде:

- $x(t) = \frac{\alpha(v_0 t)^2}{2v_0} = \alpha \frac{v_0 t^2}{2}$
- $y(t) = v_0 t$

Исключая время:  $x = \frac{\alpha y^2}{2v_0}$  - парабола

**Ответ:**

1. Снос шара:  $x(y) = \frac{\alpha y^2}{2v_0}$

2. Ускорения:

- Полное ускорение:  $a = \alpha v_0$  (постоянное, направлено горизонтально)
- Тангенциальное ускорение:  $a_{t(y)} = \frac{\alpha^2 y v_0}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}}$
- Нормальное ускорение:  $a_{n(y)} = \alpha \frac{v_0^2}{\sqrt{\alpha^2 y^2 + v_0^2}}$

Проверка:

$$a_t^2 + a_n^2 = \frac{(\alpha^2 y v_0)^2}{(\alpha^2 y^2 + v_0^2)} + \frac{(\alpha v_0^2)^2}{(\alpha^2 y^2 + v_0^2)} = \frac{\alpha^2 v_0^2 (\alpha^2 y^2 + v_0^2)}{(\alpha^2 y^2 + v_0^2)} = \alpha^2 v_0^2 = a^2$$

---

**Задача 10.** На краю массивной подставки закреплен невесомый блок. Грузы, массой  $m_1$  и  $m_2$  связаны нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения грузов о подставку равен  $\mu$ . Подставка движется вправо с ускорением  $a$ . Правый груз опускается. Вычислите ускорение грузов относительно подставки. С каким ускорением должна двигаться подставка, чтобы правый груз начал подниматься.

**Решение:**

Если груз имеет координату  $x$  в системе подставки, то в неподвижной системе:

$$X = x + X_0(t), \text{ где } X_0(t) = \frac{1}{2}at^2 \text{ (движение подставки)}$$

Ускорение грузов относительно подставки

Пусть:

- $a_1$  – ускорение левого груза относительно подставки (вправо)
- $a_2$  – ускорение правого груза относительно подставки (вниз)
- $T$  – натяжение нити

Ускорения в неподвижной системе:

- Левый груз:  $A_{1_x} = a_1 + a$  (горизонтально),  $A_{1_y} = 0$
- Правый груз:  $A_{2_x} = a$  (горизонтально),  $A_{2_y} = -a_2$  (вертикально)

Левый груз ( $m_1$ ):

- Вес:  $m_1 g$  (вниз)
- Нормальная реакция:  $N_1 = m_1 g$  (вверх)
- Натяжение нити:  $T$  (вправо)
- Трение:  $f_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g$  (влево, против движения)

Правый груз ( $m_2$ ):

- Вес:  $m_2 g$  (вниз)
- Натяжение нити:  $T$  (вверх)

Для левого груза:

- По горизонтали:  $m_1(a_1 + a) = T - \mu m_1 g$
- По вертикали:  $m_1 \cdot 0 = N_1 - m_1 g \Rightarrow N_1 = m_1 g$

Для правого груза:

- По горизонтали:  $m_2 a = 0$  (нет горизонтальных сил, кроме псевдосилы)
- По вертикали:  $m_2(-a_2) = T - m_2 g$

Поскольку нить нерастяжима:  $a_1 = a_2$  (назовем это ускорение  $a_0$ )

$$\begin{cases} m_1(a_0 + a) = T - \mu m_1 g & (1) \\ m_2(-a_0) = T - m_2 g & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2):  $T = m_2 g - m_2 a_0$

Подставляем в уравнение (1):

$$m_1(a_0 + a) = m_2g - m_2a_0 - \mu m_1g$$

$$m_1a_0 + m_1a = m_2g - m_2a_0 - \mu m_1g$$

$$a_0(m_1 + m_2) = m_2g - \mu m_1g - m_1a$$

$$a_0 = \frac{m_2g - \mu m_1g - m_1a}{m_1 + m_2}$$

Ускорение грузов относительно подставки:

$$a_0 = \frac{(m_2 - \mu m_1)g - m_1a}{m_1 + m_2}$$

Поскольку правый груз опускается,  $a_0 > 0$ , что требует:

$$m_2g - \mu m_1g - m_1a > 0 \Rightarrow m_2 > \mu m_1 + \frac{m_1a}{g}$$

Для того чтобы правый груз начал подниматься, должно выполняться условие  $a_0 = 0$  (граничное состояние).

При  $a_0 = 0$ :

$$0 = \frac{(m_2 - \mu m_1)g - m_1a_{\text{кр}}}{(m_1 + m_2)}$$

$$(m_2 - \mu m_1)g - m_1a_{\text{кр}} = 0$$

$$a_{\text{кр}} = \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1}$$

Для подъема правого груза ускорение подставки должно быть больше критического:

$$a > \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1}$$

Случай 1:  $m_2 > \mu m_1$

- При  $a = 0$ : правый груз опускается
- Критическое ускорение:  $a_{\text{кр}} = \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1} > 0$

Случай 2:  $m_2 < \mu m_1$

- При  $a = 0$ : левый груз движется вправо (правый поднимается)
- Критическое ускорение:  $a_{\text{кр}} < 0$  (подставка должна двигаться влево)

Случай 3:  $m_2 = \mu m_1$

- При  $a = 0$ : система в равновесии
- $a_{\text{кр}} = 0$

**Ответ:**

Ускорение грузов относительно подставки:  $a_0 = \frac{((m_2 - \mu m_1)g - m_1a)}{(m_1 + m_2)}$

где  $a_0 > 0$  означает, что правый груз опускается.

Ускорение подставки для подъема правого груза:  $a > \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1}$

Натяжение нити:  $T = m_2g - m_2a_0 = m_2 \left[ g - \frac{(m_2 - \mu m_1)g - m_1a}{m_1 + m_2} \right]$

$$T = \frac{m_2[(m_1 + \mu m_2)g + m_1a]}{m_1 + m_2}$$


---

**Задача 11.** Брусок массой  $m$  поставили на клин, движущийся вправо с ускорением  $a$  и отпустили. Найти ускорение бруска относительно клина. Коэффициент трения между поверхностями равен  $\mu$ .

**Решение:**

Если брусок имеет координаты  $(x, y)$  в системе клина, то в неподвижной системе:

- $X = x \cos \alpha + X_0(t)$ , где  $X_0(t)$  – координата клина
- $Y = H - x \sin \alpha$ , где  $H$  – высота точки на клине

Пусть  $a_0$  – ускорение бруска относительно клина (вдоль наклонной поверхности).

Компоненты ускорения в неподвижной системе:

- $A_X = a_0 \cos \alpha + a$  (горизонтальная компонента)
- $A_Y = -a_0 \sin \alpha$  (вертикальная компонента)

Силы:

1. Вес:  $mg$  (вертикально вниз)
2. Нормальная реакция:  $N$  (перпендикулярно наклонной поверхности)
  - $N_X = -N \sin \alpha$
  - $N_Y = N \cos \alpha$
3. Сила трения:  $f$  (вдоль наклонной поверхности)
  - $f_X = -f \cos \alpha$
  - $f_Y = -f \sin \alpha$

Трение направлено против относительного движения бруска по клину.

- Если  $a_0 > 0$  (брусок скользит вниз):  $f$  направлена вверх по склону
- Если  $a_0 < 0$  (брусок скользит вверх):  $f$  направлена вниз по склону
- Если  $|a_0| = 0$ : трение покоя,  $|f| \leq \mu N$

По горизонтали ( $X$ ):

$$m(a_0 \cos \alpha + a) = -N \sin \alpha - f \cos \alpha$$

По вертикали ( $Y$ ):

$$m(-a_0 \sin \alpha) = N \cos \alpha - f \sin \alpha - mg$$

Рассмотрим предельный случай без трения ( $\mu = 0$ ):

- По  $X$ :  $m(a_0 \cos \alpha + a) = -N \sin \alpha$
- По  $Y$ :  $m(-a_0 \sin \alpha) = N \cos \alpha - mg$

Из второго уравнения:  $N = \frac{m(g - a_0 \sin \alpha)}{\cos \alpha}$

Подставляя в первое:

$$\begin{aligned} m(a_0 \cos \alpha + a) &= -m(g - a_0 \sin \alpha) \tan \alpha \\ a_0 \cos \alpha + a &= -(g - a_0 \sin \alpha) \tan \alpha \\ a_0 \cos \alpha + a &= -g \tan \alpha + a_0 \sin \alpha \tan \alpha \\ a_0(\cos \alpha - \sin \alpha \tan \alpha) &= -g \tan \alpha - a \end{aligned}$$

$$a_0 \left( \cos \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{\cos \alpha} \right) = -g \tan \alpha - a$$

$$\frac{a_0 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha} = -g \tan \alpha - a$$

$$a_0 \frac{\cos(2\alpha)}{\cos \alpha} = -g \tan \alpha - a$$

Без трения:  $a_0 = -(g \tan \alpha + a) \cos \frac{\alpha}{\cos(2\alpha)} = \frac{-(g \sin \alpha + a \cos \alpha)}{\cos(2\alpha)}$

Если брусок скользит вниз ( $a_0 > 0$ ), то  $f = \mu N$  направлена вверх по склону.

Система уравнений:

$$\begin{cases} m(a_0 \cos \alpha + a) = -N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha = -N(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) & (1) \\ m(-a_0 \sin \alpha) = N \cos \alpha - \mu N \sin \alpha - mg = N(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2):

$$N = \frac{m(g - a_0 \sin \alpha)}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}$$

Подставляя в уравнение (1):

$$m(a_0 \cos \alpha + a) = \frac{-m(g - a_0 \sin \alpha)(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

Упрощая:

$$(a_0 \cos \alpha + a)(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = -(g - a_0 \sin \alpha)(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Раскрывая скобки:

$$a_0 \cos \alpha (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) + a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + a_0 \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$a_0 [\cos \alpha (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

$$a_0 [\cos^2 \alpha - \mu \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha - \mu \sin \alpha \cos \alpha] = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

$$a_0 [\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2\mu \sin \alpha \cos \alpha] = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

$$a_0 \cos(2\alpha) - 2\mu a_0 \sin \alpha \cos \alpha = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

$$a_0 [\cos(2\alpha) - \mu \sin(2\alpha)] = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

$$a_0 = \frac{-[g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)]}{[\cos(2\alpha) - \mu \sin(2\alpha)]}$$

Знак  $a_0$  определяет направление движения:

- $a_0 > 0$ : брусок скользит вниз по клину
- $a_0 < 0$ : брусок скользит вверх по клину

Если  $|a_0|$  получается меньше предельного значения для трения покоя, нужно рассмотреть случай без проскальзывания.

При отсутствии проскальзывания  $a_0 = 0$ , и брусок движется вместе с клином:

- $A_X = a$
- $A_Y = 0$

Максимальная сила трения покоя:  $f_{\max} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$

Условие отсутствия проскальзывания:  $|f| \leq \mu N$ , где  $f$  определяется из уравнений равновесия.

**Ответ:**

Ускорение бруска относительно клина:

$$a_0 = \frac{-[g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)]}{[\cos(2\alpha) - \mu \sin(2\alpha)]}$$

где:

- Положительное значение  $a_0$  означает движение вниз по склону
- Знак определяется соотношением между ускорением клина, углом наклона и трением

Частные случаи:

1. При  $a = 0$  (неподвижный клин):  $a_0 = \frac{-g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos(2\alpha) - \mu \sin(2\alpha)}$
2. При  $\mu = 0$  (без трения):  $a_0 = \frac{-(g \sin \alpha + a \cos \alpha)}{\cos(2\alpha)}$
3. При  $\alpha = 0^\circ$  (горизонтальная поверхность):  $a_0 = -a$  (брусек движется назад относительно клина)

---

**Задача 12.** Человек массой  $m$  стоит на носу лодки массой  $M$  и длиной  $L$ . На какое расстояние  $S$  сместится лодка, если человек перейдет на корму. Система человек-лодка замкнута. Ее центр масс не может сместиться относительно земли.

**Решение:**

- Человек находится на носу лодки
- Пусть нос лодки находится в точке  $x = a$  от центра масс
- Тогда корма лодки находится в точке  $x = a - L$
- Центр лодки находится в точке  $x = a - \frac{L}{2}$

Центр масс системы должен быть в начале координат:

$$m \cdot a + M \cdot \left(a - \frac{L}{2}\right) = 0$$

Раскрывая скобки:

$$ma + Ma - \frac{ML}{2} = 0$$

$$a(m + M) = \frac{ML}{2}$$

$$a = \frac{ML}{2(m+M)}$$

Это означает, что нос лодки первоначально находится на расстоянии  $\frac{ML}{2(m+M)}$  от центра масс системы.

- Человек теперь на корме лодки
- Пусть лодка сместилась на расстояние  $S$  вправо (в сторону носа)
- Нос лодки теперь в точке  $x = a + S$
- Корма лодки теперь в точке  $x = a + S - L$
- Человек находится в точке  $x = a + S - L$

Центр масс системы должен остаться в начале координат:

$$m \cdot (a + S - L) + M \cdot \left(a + S - \frac{L}{2}\right) = 0$$

Раскрывая скобки:

$$m(a + S - L) + M\left(a + S - \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$ma + mS - mL + Ma + MS - \frac{ML}{2} = 0$$

$$(m + M)a + (m + M)S - mL - \frac{ML}{2} = 0$$

Подставляем значение  $a = \frac{ML}{2(m+M)}$ :

$$(m + M) \cdot \frac{ML}{2(m+M)} + (m + M)S - mL - \frac{ML}{2} = 0$$

$$\frac{ML}{2} + (m + M)S - mL - \frac{ML}{2} = 0$$

$$(m + M)S - mL = 0$$

$$(m + M)S = mL$$

$$S = \frac{mL}{(m+M)}$$

**Ответ:**

Лодка сместится на расстояние:  $S = \frac{mL}{(m+M)}$  в сторону носа лодки.

---

**Задача 13.** Снаряд, выпущенный со скоростью  $v_0 = 100$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту разорвался в верхней точке траектории на 2 одинаковых осколка. Один осколок упал на землю прямо под точкой взрыва со скоростью  $v_1 = 97$  м/с. С какой скоростью и на каком расстоянии от первого осколка упал на землю второй осколок?

**Решение:**

Компоненты начальной скорости:

- $v_{0x} = v_0 \cos 45^\circ = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}$  м/с  $\approx 70.7$  м/с
- $v_{0y} = v_0 \sin 45^\circ = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}$  м/с  $\approx 70.7$  м/с

В верхней точке траектории:

- Вертикальная компонента скорости:  $v_y = 0$
- Горизонтальная компонента:  $v_x = v_{0x} = 50\sqrt{2}$  м/с
- Скорость снаряда в момент взрыва:  $v = 50\sqrt{2}$  м/с (горизонтально)

Высота верхней точки:

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(50\sqrt{2})^2}{2 \cdot 10} = \frac{5000}{20} = 250 \text{ м}$$

Время подъема до верхней точки:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{50\sqrt{2}}{10} = 5\sqrt{2} \text{ с}$$

- $m$  – масса каждого осколка (половина массы снаряда)
- $\vec{v}$  – скорость снаряда перед взрывом
- $\vec{v}_1$  – скорость первого осколка после взрыва
- $\vec{v}_2$  – скорость второго осколка после взрыва

Закон сохранения импульса:

$$2m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v}_1 + m \cdot \vec{v}_2$$

Упрощая:  $2\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Скорость снаряда перед взрывом:

$$\vec{v} = (50\sqrt{2}, 0) \text{ м/с}$$

Первый осколок упал под точкой взрыва, значит его горизонтальная скорость после взрыва равна нулю.

Пусть  $v_{1_y}$  – вертикальная скорость первого осколка сразу после взрыва.

Время падения с высоты  $H = 250\text{м}$ :

$$H = v_{1_y} \cdot t_2 + \frac{gt_2^2}{2}$$

При падении на землю:  $v_1^2 = v_{1_y}^2 + (gt_2)^2$

Также:  $v_{1_y} + gt_2 = \text{скорость при ударе о землю}$

Поскольку осколок падает вертикально:  $v_1 = |v_{1_y} + gt_2| = 97 \text{ м/с}$

Из кинематики свободного падения:

$$v_1^2 = v_{1_y}^2 + 2gH$$

$$97^2 = v_{1_y}^2 + 2 \cdot 10 \cdot 250$$

$$9409 = v_{1_y}^2 + 5000$$

$$v_{1_y}^2 = 4409$$

$$v_{1_y} = \pm 66.4 \text{ м/с}$$

Поскольку  $v_1 = 97 \text{ м/с}$  направлена вниз, а начальная скорость  $v_{1_y}$  может быть как вверх, так и вниз, проверим:

Если  $v_{1_y} = -66.4 \text{ м/с}$  (вниз), то время падения:

$$250 = 66.4t_2 + 5t_2^2$$

$$5t_2^2 + 66.4t_2 - 250 = 0$$

Решая квадратное уравнение:  $t_2 \approx 3.16\text{с}$

Скорость при ударе:  $v = 66.4 + 10 \cdot 3.16 = 66.4 + 31.6 = 98 \text{ м/с} \approx 97 \text{ м/с}$

Скорость первого осколка после взрыва:  $\vec{v}_1 = (0, -66.4) \text{ м/с}$

Из закона сохранения импульса:

$$2\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v} - \vec{v}_1$$

Компоненты:

- $v_{2_x} = 2 \cdot 50\sqrt{2} - 0 = 100\sqrt{2} \text{ м/с} \approx 141.4 \text{ м/с}$
- $v_{2_y} = 2 \cdot 0 - (-66.4) = 66.4 \text{ м/с}$

Скорость второго осколка после взрыва:

$$v_2 = \sqrt{v_{2_x}^2 + v_{2_y}^2} = \sqrt{(100\sqrt{2})^2 + 66.4^2} = \sqrt{20000 + 4409} = \sqrt{24409} \approx 156.2 \text{ м/с}$$

Направление: под углом  $\varphi$  к горизонту

$$\text{tg } \varphi = \frac{v_{2_y}}{v_{2_x}} = \frac{66.4}{100\sqrt{2}} = \frac{66.4}{141.4} \approx 0.47$$

$$\varphi \approx 25.2^\circ$$



Уравнение движения по вертикали:

$$y = H + v_{2y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 250 + 66.4t - 5t^2$$

При падении на землю  $y = 0$ :

$$250 + 66.4t - 5t^2 = 0$$

$$5t^2 - 66.4t - 250 = 0$$

Решая квадратное уравнение:

$$t = \frac{66.4 \pm \sqrt{66.4^2 + 4 \cdot 5 \cdot 250}}{10}$$
$$t = \frac{66.4 \pm \sqrt{4409 + 5000}}{10} = \frac{66.4 \pm \sqrt{9409}}{10}$$
$$t = \frac{66.4 \pm 97}{10}$$

Берем положительный корень:  $t = \frac{66.4 + 97}{10} = 16.34\text{с}$

Горизонтальное перемещение второго осколка:

$$x_2 = v_{2x} \cdot t = 100\sqrt{2} \cdot 16.34 \approx 141.4 \cdot 16.34 \approx 2311\text{м}$$

Скорость второго осколка при ударе о землю:

- $v_{2x} = 100\sqrt{2}$  м/с (не изменяется)
- $v_{2y_{\text{конечная}}} = 66.4 - 10 \cdot 16.34 = 66.4 - 163.4 = -97$  м/с

Скорость при ударе:

$$v_{\text{удар}} = \sqrt{(100\sqrt{2})^2 + 97^2} = \sqrt{20000 + 9409} = \sqrt{29409} \approx 171.5 \text{ м/с}$$

- Первый осколок: под точкой взрыва
- Второй осколок: на расстоянии  $x_2 = 2311\text{м}$  от точки взрыва

Полное расстояние от места выстрела до точки взрыва:

$$x_{\text{взрыв}} = v_{0x} \cdot t_1 = 50\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 500\text{м}$$

Расстояние между точками падения осколков:

$$\Delta x = x_2 = 2311\text{м}$$

**Ответы:**

1. Скорость второго осколка при ударе о землю:  $v_2 = 171.5$  м/с
  2. Расстояние между точками падения осколков:  $\Delta x = 2311\text{м} \approx 2.31$  км
- 

**Задача 14.** Пушка массой  $M$  начинает свободно скользить вниз по гладкой, составляющей угол с горизонтом  $\alpha$ . Когда пушка прошла путь  $S$ , произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом  $p$  в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда, найдите продолжительность выстрела.

**Решение:**

Ускорение пушки вниз по плоскости:

$$a = g \sin \alpha$$

Скорость пушки в момент выстрела (после прохождения пути  $S$ ):

$$v_0^2 = 2aS = 2gS \sin \alpha$$

$$v_0 = \sqrt{2gS \sin \alpha}$$

Начальное состояние (момент начала выстрела):

- Пушка движется со скоростью  $v_0$  вниз по плоскости
- Импульс пушки:  $\vec{P}_{\text{пушка}} = Mv_0$  (вниз по плоскости)

Конечное состояние (момент окончания выстрела):

- Пушка остановилась:  $v_{\text{пушка}} = 0$
- Снаряд имеет импульс  $p$  горизонтально

Рассмотрим проекции импульсов на направления вдоль и поперек наклонной плоскости.

Начальный импульс:  $Mv_0$  Конечный импульс пушки: 0 Конечный импульс снаряда:  $-p \cos \alpha$  (горизонтальный импульс  $p$  проецируется на плоскость)

Закон сохранения импульса:

$$Mv_0 = 0 + (-p \cos \alpha)$$

$$Mv_0 = -p \cos \alpha$$

Во время выстрела на пушку действует:

1. Сила тяжести:  $Mg \sin \alpha$  (вниз по плоскости)
2. Сила отдачи от снаряда:  $F_{\text{отдача}}$  (вверх по плоскости)

Изменение импульса пушки во время выстрела:

$$\Delta P_{\text{пушка}} = 0 - Mv_0 = -Mv_0$$

По второму закону Ньютона:

$$\Delta P_{\text{пушка}} = (F_{\text{отдача}} - Mg \sin \alpha) \Delta t$$

Следовательно:

$$-Mv_0 = (F_{\text{отдача}} - Mg \sin \alpha) \Delta t$$

Сила отдачи связана с импульсом снаряда:

$$F_{\text{отдача}} \Delta t = p \cos \alpha + Mg \sin \alpha \Delta t$$

Подставляя в уравнение движения пушки:

$$-Mv_0 = p \cos \alpha$$

Отсюда получаем:

$$v_0 = \frac{p \cos \alpha}{M}$$

Приравнивая два выражения для  $v_0$ :

$$\sqrt{2gS \sin \alpha} = \frac{p \cos \alpha}{M}$$

Из уравнения движения пушки во время выстрела:

$$-Mv_0 = (F_{\text{отдача}} - Mg \sin \alpha) \Delta t$$

Где  $F_{\text{отдача}} = \frac{p \cos \alpha}{\Delta t}$

Подставляя:

$$-M \frac{p \cos \alpha}{M} = \left( \frac{p \cos \alpha}{\Delta t} - Mg \sin \alpha \right) \Delta t$$

$$-p \cos \alpha = p \cos \alpha - Mg \sin \alpha \Delta t$$

$$-2p \cos \alpha = -Mg \sin \alpha \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{2p \cos \alpha}{Mg \sin \alpha}$$

Используя  $v_0 = \sqrt{2gS \sin \alpha}$  и  $v_0 = \frac{p \cos \alpha}{M}$ :

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g \sin \alpha} = \frac{2\sqrt{2gS \sin \alpha}}{g \sin \alpha} = \frac{2\sqrt{2S}}{g \sqrt{\sin \alpha \cdot \sin \alpha}}$$

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{2S}}{g \sin^{\frac{3}{2}} \alpha}$$

**Ответ:**  $\Delta t = \frac{2\sqrt{2S}}{g \sin^{\frac{3}{2}} \alpha}$

---

**Задача 15.** Согласуется ли с принципами специальной теории относительности представление об электроны как о вращающемся вокруг своей оси однородном шарике массой  $m = 9.11 \cdot 10^{-30}$  кг и радиуса  $R = 2.82 \cdot 10^{-15}$  м обладающем собственным моментом импульса  $M = 0.913 \cdot 10^{-34} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$ . (Вытекающее из квантовой теории и подтвержденное экспериментально значение собственного момента импульса электрона).

**Решение:**

Для однородного шара относительно оси, проходящей через центр:

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Подставляем значения:

$$I = \frac{2}{5} \cdot 9.11 \cdot 10^{-30} \cdot (2.82 \cdot 10^{-15})^2$$

$$I = \frac{2}{5} \cdot 9.11 \cdot 10^{-30} \cdot 7.95 \cdot 10^{-30}$$

$$I = \frac{2}{5} \cdot 72.4 \cdot 10^{-60}$$

$$I = 28.96 \cdot 10^{-60} = 2.90 \cdot 10^{-59} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Из соотношения  $M = I\omega$  находим угловую скорость:

$$\omega = \frac{M}{I} = \frac{0.913 \cdot 10^{-34}}{2.90 \cdot 10^{-59}}$$

$$\omega = 3.15 \cdot 10^{24} \text{ рад/с}$$

Линейная скорость точек на экваторе вращающегося шара:

$$v = \omega R = 3.15 \cdot 10^{24} \cdot 2.82 \cdot 10^{-15}$$

$$v = 8.88 \cdot 10^9 \text{ м/с}$$

Отношение полученной скорости к скорости света:

$$\frac{v}{c} = \frac{8.88 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 29.6$$

**Результат:**  $v \approx 30c$

Согласно специальной теории относительности, никакая частица с ненулевой массой покоя не может двигаться со скоростью, равной или превышающей скорость света в вакууме.

Полученная скорость  $v \approx 30c$  грубо нарушает этот фундаментальный принцип СТО.

При скоростях, сравнимых со скоростью света, необходимо учитывать:

1. Релятивистское увеличение массы:

$$m_{\text{rel}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

При  $v = 30c$  знаменатель становится мнимым, что физически бессмысленно.

2. Изменение момента инерции: В релятивистском случае момент инерции также изменяется, что требует более сложного анализа.

Используемый в задаче радиус  $R = 2.82 \cdot 10^{-15}$  м является классическим радиусом электрона, определяемым из условия:

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

Этот радиус имеет лишь историческое значение и не отражает реальный размер электрона.

- Спин электрона является внутренним квантовым свойством, не связанным с классическим вращением
- Это фундаментальная характеристика, аналогичная массе или заряду
- Спин не может быть объяснен в рамках классической механики
- Электрон ведет себя как точечная частица в экспериментах рассеяния
- Верхняя граница размера электрона:  $< 10^{-18}$  м
- Магнитный момент электрона точно согласуется с квантовой электродинамикой

Представление об электроне как о вращающемся однородном шарике не согласуется с принципами специальной теории относительности.

Спин электрона является квантовомеханическим свойством, не имеющим классических аналогов. Это внутренняя степень свободы, которая проявляется в магнитных свойствах и статистике частиц, но не связана с механическим вращением в пространстве.

**Ответ:** нет, не согласуется.