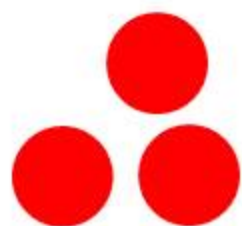


Кинематика поступательного движения.

© С. А. Курашова, 2018



- сложные задания

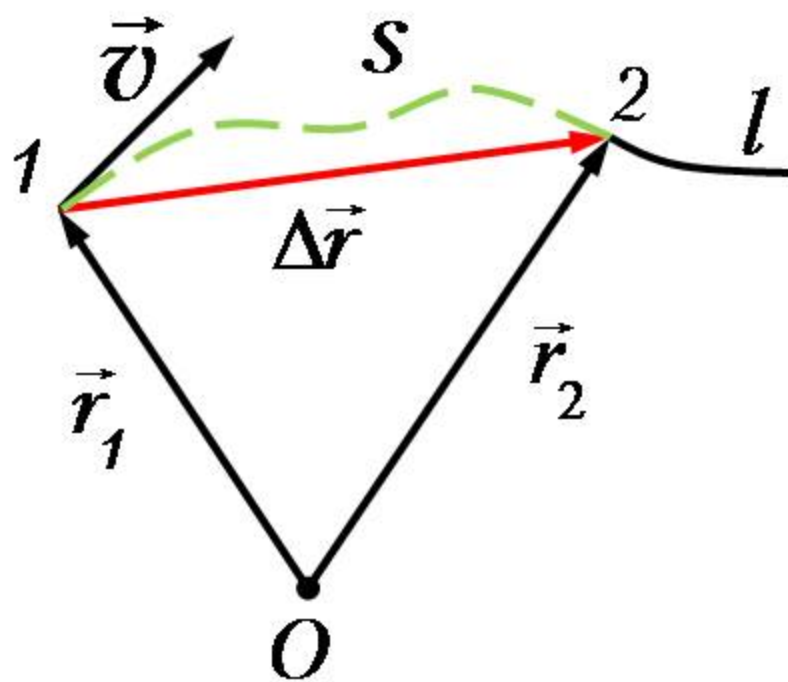
- очень сложные задания



*обязательные задания для всех .
Выполнение остальных заданий
приветствуется.*

*Ответы будут открыты через 2
недели. Пока у вас есть время
оформить решения, показать мне и
набрать баллы.*

Основные понятия кинематики.



Пусть за интервал времени от t_1 до t_2 материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2. O – начало отсчёта.

$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

l – траектория материальной точки.

S – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 .

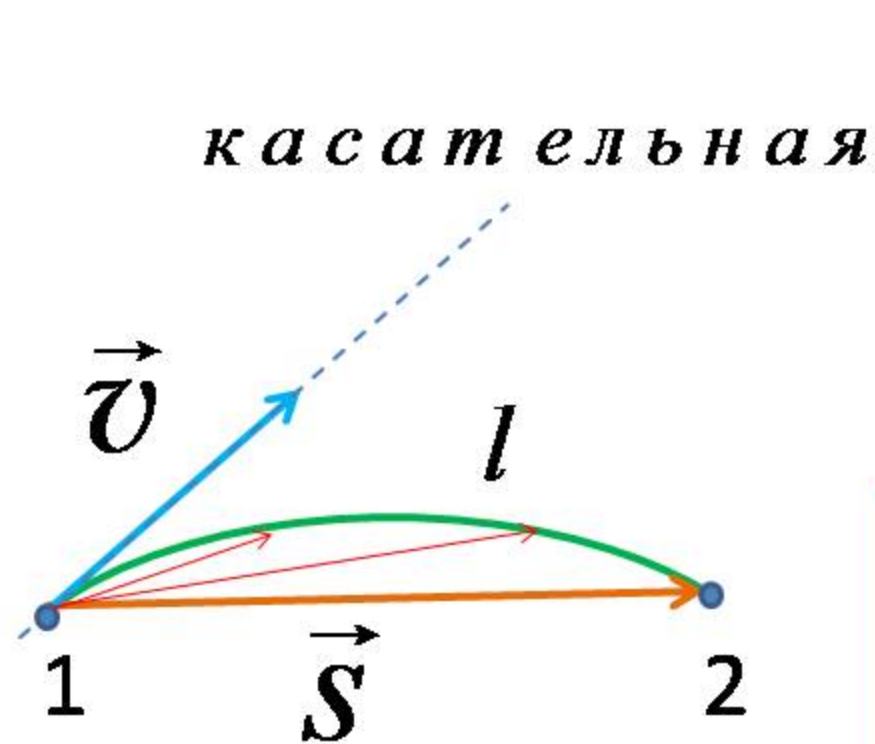
$\vec{S} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 .

Перемещением материальной точки за интервал времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ называется вектор, проведенный из её положения в момент времени t_1 в её положение в момент времени t_2 .

Траекторией материальной точки называется линия, которую она описывает при своём движении.

Длиной пути S называется сумма длин всех участков траектории, пройденных материальной точкой за рассматриваемый промежуток времени.

Скорость и ускорение (повторение).



Перемещение $\vec{S}$

Траектория l

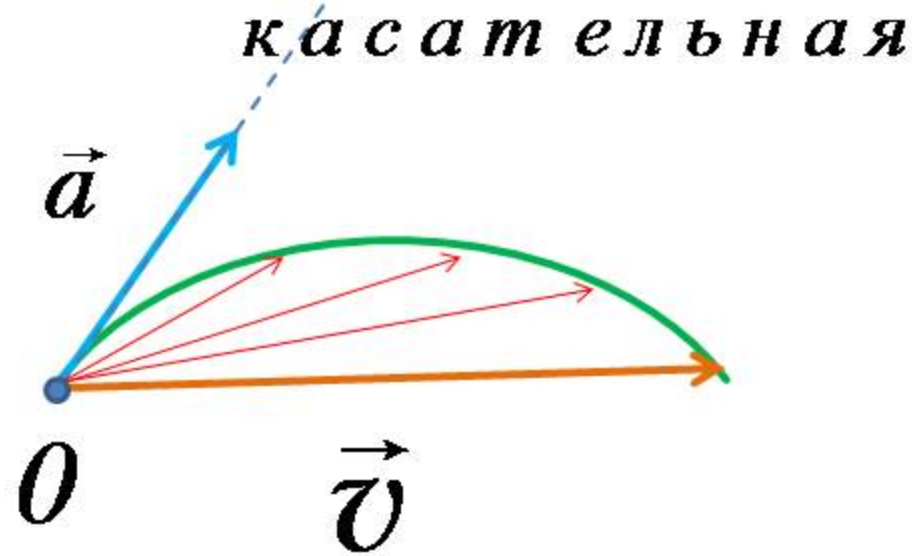
Средняя скорость

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{S}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость. Направлена

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

по касательной к траектории



**Среднее
ускорение**

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{d t}$$

Вектор скорости точки в каждый момент времени направлен по касательной к её пространственной траектории. Для получения траектории в пространстве скоростей необходимо все векторы скорости, относящиеся к выбранному моменту времени, отложить от одной точки-начала отсчёта в пространстве скоростей.

Конец, изменяющегося во времени вектора скорости, вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называющуюся годографом вектора скорости. (Гамильтон 1846г.)

Вектор мгновенного ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости.

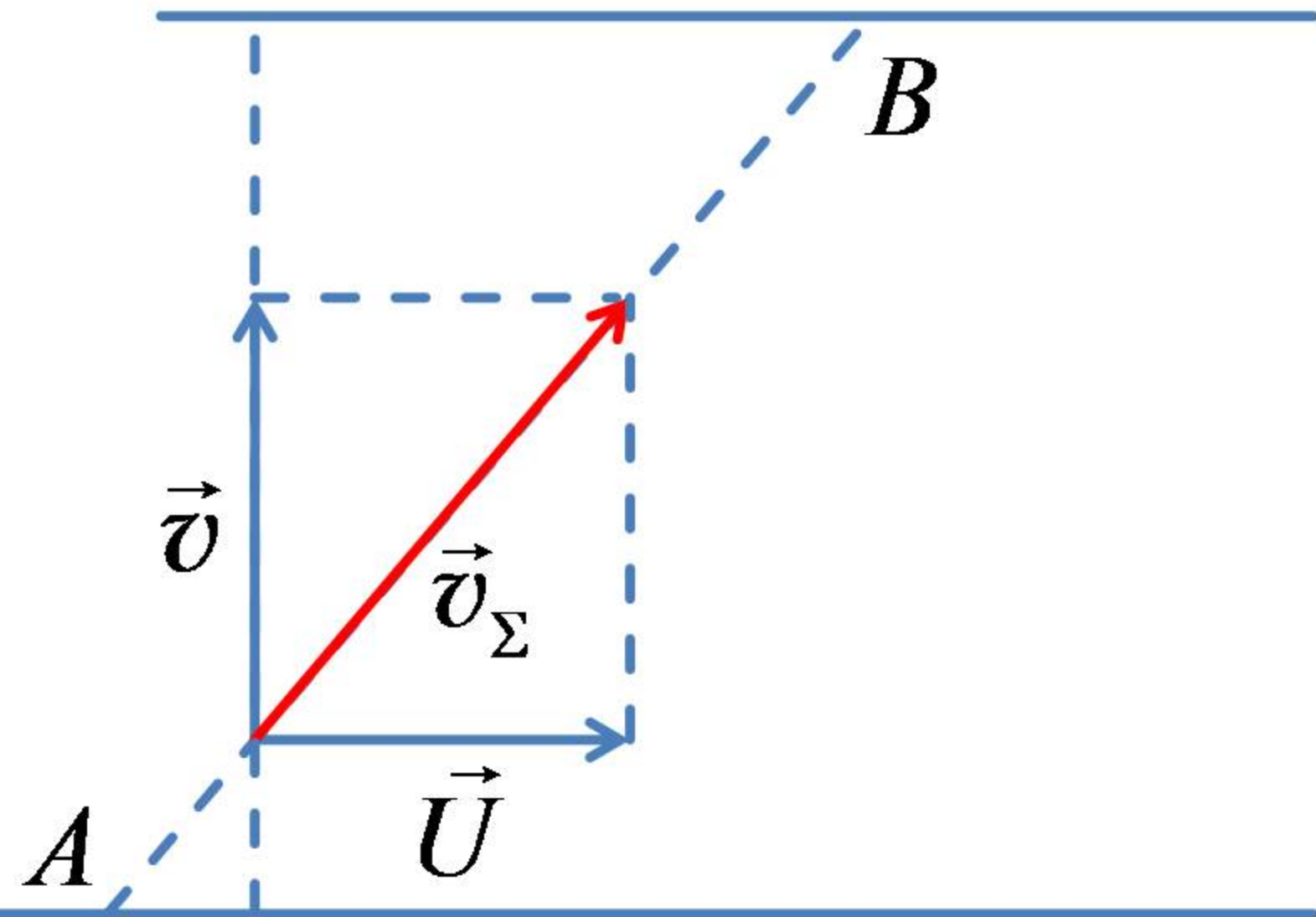
Равномерное прямолинейное движение. Закон сложения скоростей.

Переправа через реку

Река имеет скорость течения $\vec{U}$ относительно берега в каждой точке, независимо от расстояния до берега.

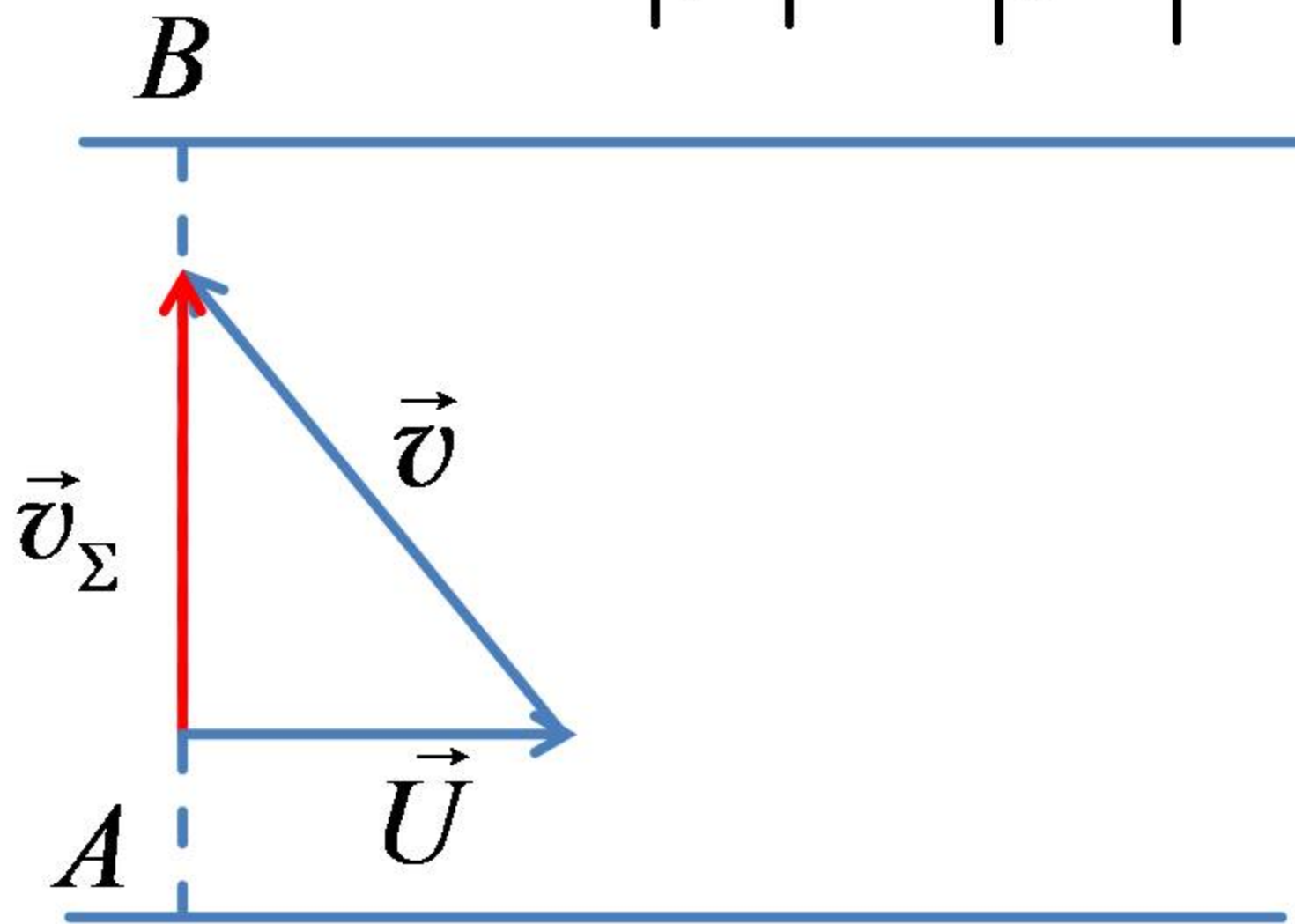
$\vec{v}$ - собственная скорость лодки
(*скорость лодки относительно воды*)
 $\vec{v}_\Sigma$ - скорость лодки относительно берега.

1. Переправа за минимальное время.



2. Переправа по кратчайшему пути,
если

$$|\vec{v}| > |\vec{U}|$$



3. Переправа под заданным углом к
линии берега. Если $|\vec{v}| > |\vec{U}|$

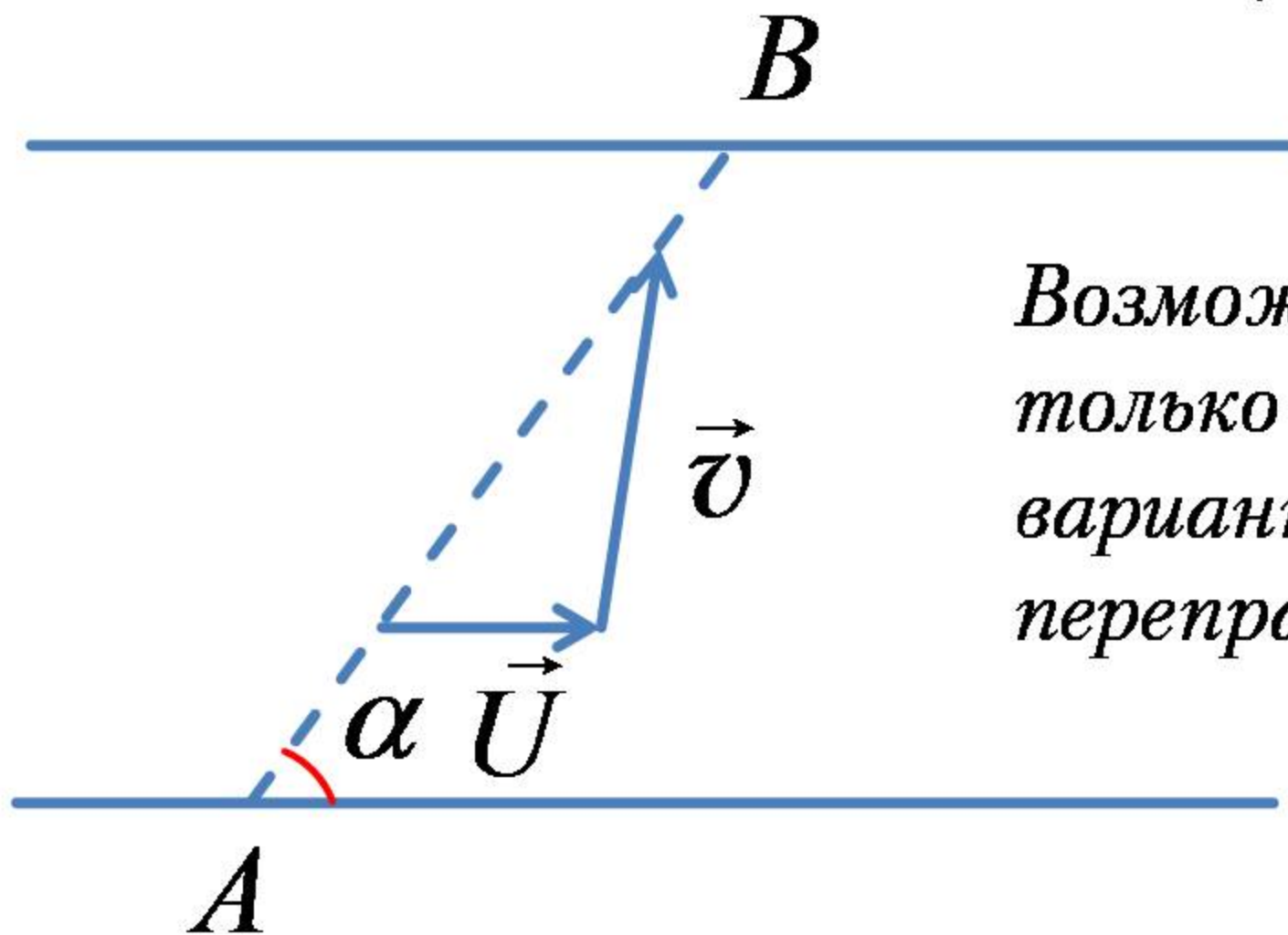
B

$\vec{v}$

Возможен
только один
вариант
переправы

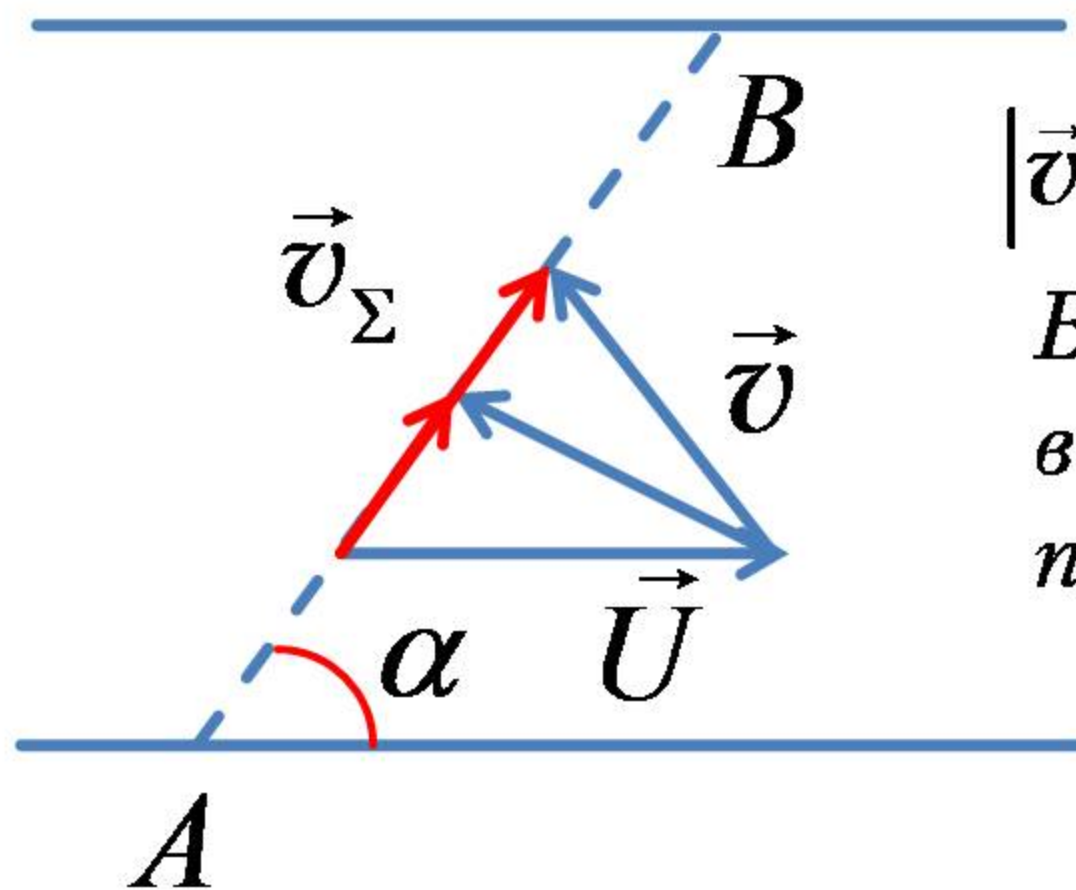
α $\vec{U}$

A



**Переправа под заданным углом к
линии берега.**

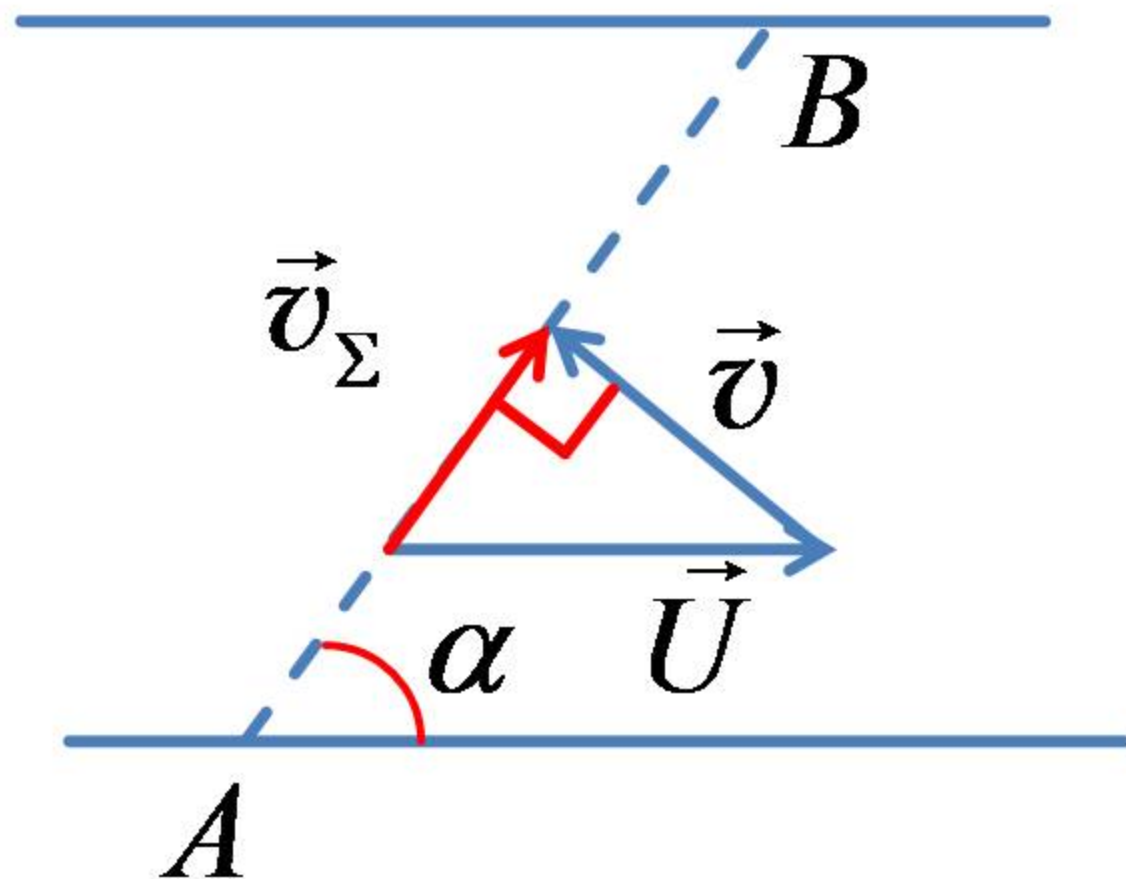
$$|\vec{U}| > |\vec{v}|$$



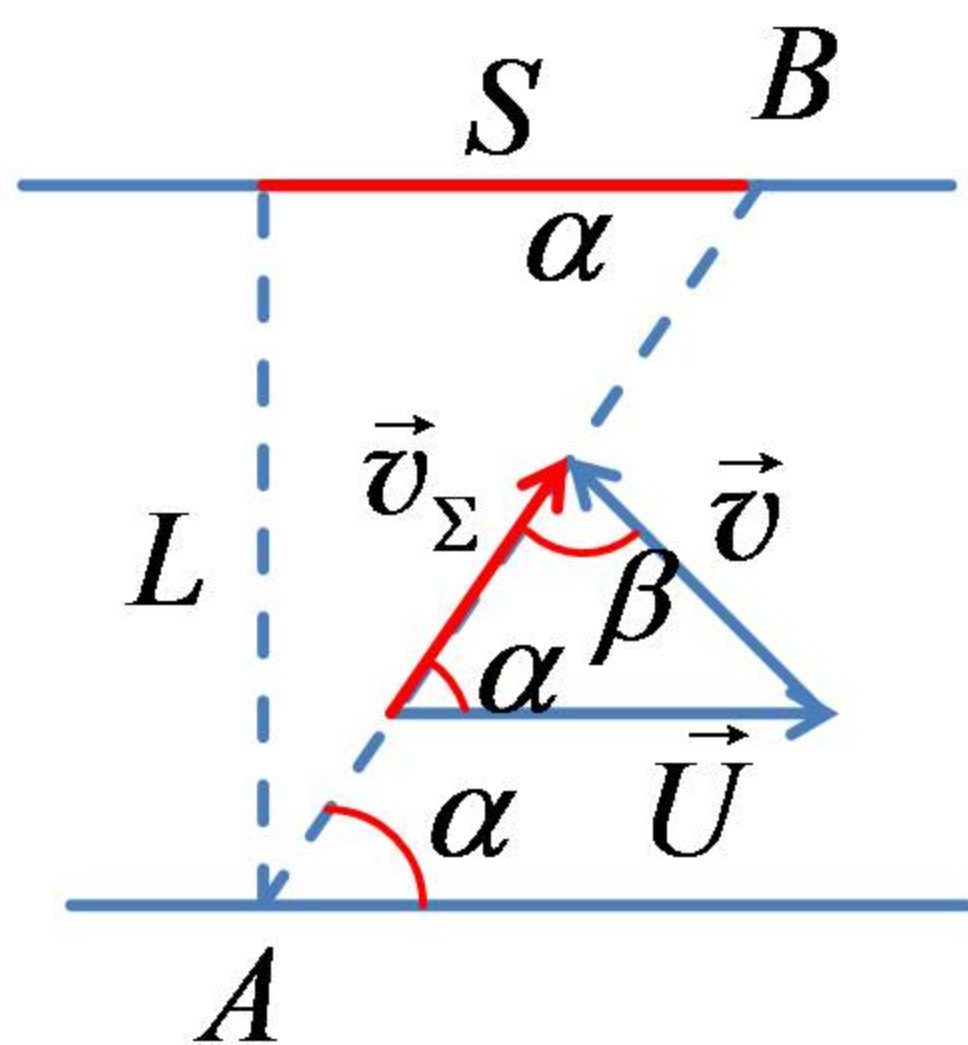
Если
 $|\vec{v}| > |\vec{U}| \sin \alpha$
Возможны два
варианта
переправы

Если $|\vec{v}| = |\vec{U}| \sin \alpha$ - только один.

При $|\vec{v}| < |\vec{U}| \sin \alpha$ переправа под углом α к линии берега невозможна.



4. Минимальный снос. Выясним, как надо переправляться, чтобы лодку снесло как можно меньше. Пусть L - ширина реки.



$$\frac{S}{L} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Для того, чтобы S было как можно меньше, α должно быть как можно больше

По теореме синусов.

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{U}{\sin \beta} \quad \sin \alpha = \frac{v}{U} \sin \beta$$

Максимальное значение α достигается при

$$\sin \beta = 1 \quad \beta = 90^\circ$$

*Для достижения минимального сноса
скорость лодки относительно берега $\vec{v}_\Sigma$
должна быть перпендикулярна её борту.*

Решение задач в движущейся системе отсчёта.



Пример. Лодочник плывёт вверх по реке. Проезжая под мостом, он роняет в воду багор. Через 0,5 часа он замечает это, возвращается и нагоняет багор на расстоянии 1 км от ниже по течению от моста. Определите скорость течения реки.

Решение.

Система отсчёта - багор. Лодка плывёт от начала отсчёта до поворота и обратно в начало отсчёта с собственной скоростью, следовательно, на обратную дорогу лодочник тратит тоже 0.5 часа.

Система отсчёта – берег. Течение несёт багор. Он плывёт 1 час и проплывает 1 км относительно берега. Скорость течения реки - 1 км/ч.



Задача. Д/З 1

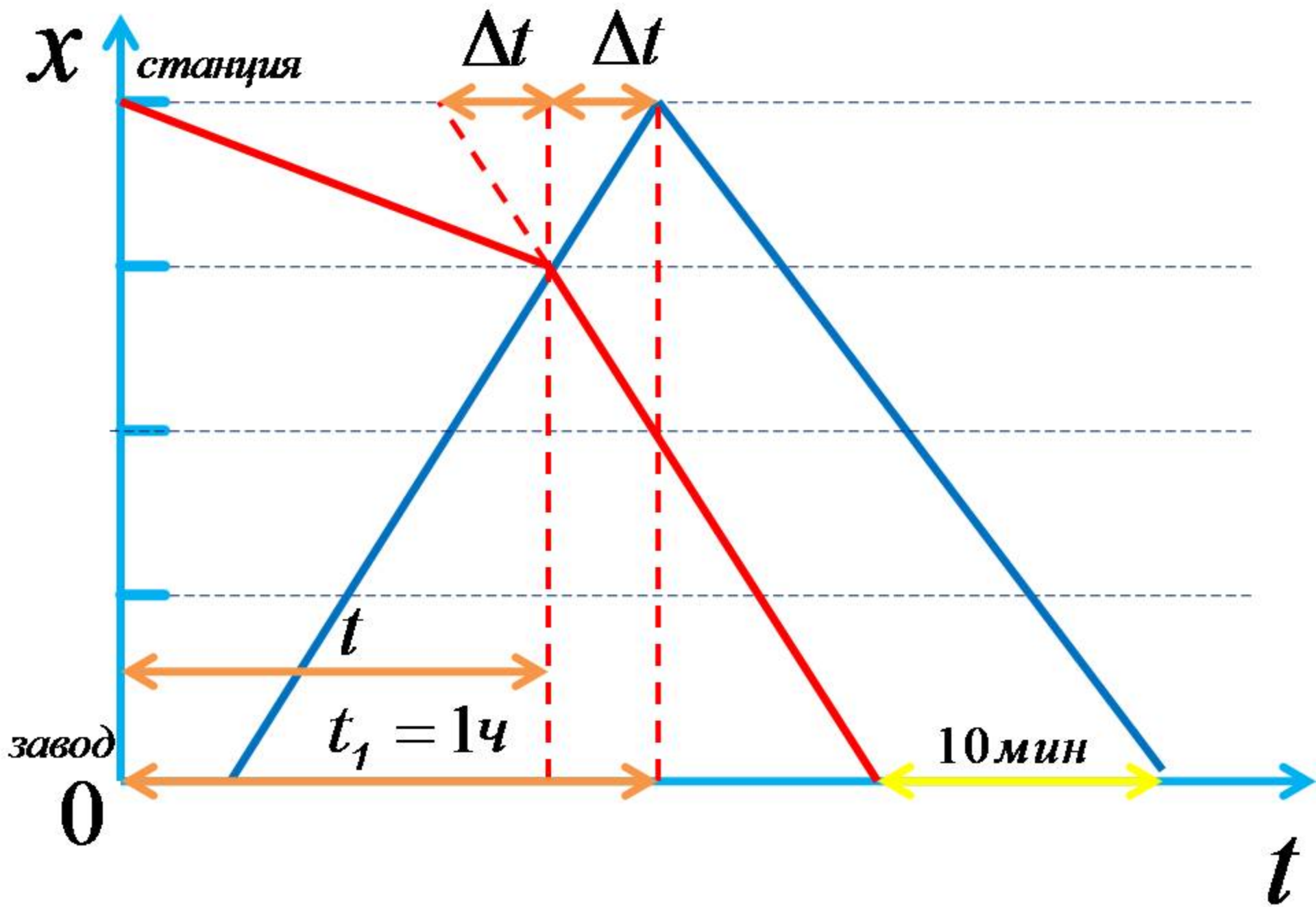
Плывущий против течения теплоход, встречает сплаваемые по реке плоты. Через 45 мин после этого он причаливает к берегу, стоянка длится 45 мин. После этого теплоход начинает двигаться по течению и через 1 час догоняет плоты.

Собственная скорость теплохода равна 20 км/ч. Вычислите скорость течения реки. (в м/с)

Графическое решение задач.

Пример. Завод, на котором работает инженер, находится за городом. Каждый раз к приходу поезда на станцию приезжает заводская машина, которая доставляет инженера на место работы. Однажды инженер приехал на станцию на 1 час раньше и, не дожидаясь машины, пошёл пешком. По дороге он встретил машину и приехал на завод на 10 мин раньше обычного. Сколько времени шёл инженер до встречи с машиной? Во сколько раз скорость машины больше скорости пешехода?





Пример. Трое туристов, обладающих одним двухместным велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок(время оценивается по последнему прибывшему). Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода равна 4 км/час, а велосипедиста-20 км/ч. Постройте график движения туристов.



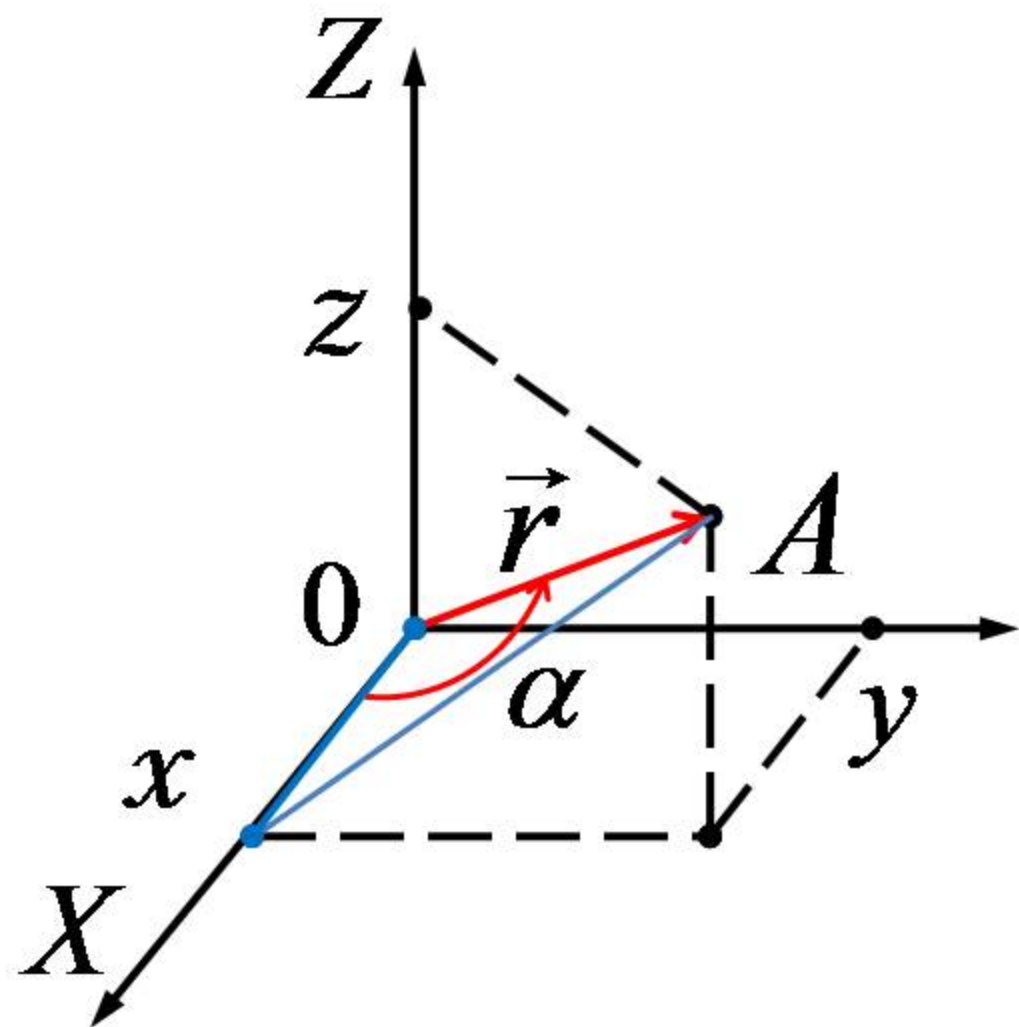
Пример. Д/З 2 Двое туристов, обладающих одним одноместным велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок(время оценивается по последнему прибывшему). Велосипед можно оставлять на трассе. Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода равна 4 км/час, а велосипедиста-20 км/ч. Постройте график движения туристов.



***Мы будем использовать три
способа описания движения -
векторный, координатный и
траекторный.***

Радиус-вектор

Радиус-вектор точки – вектор, проведённый из начала координат в данную точку.



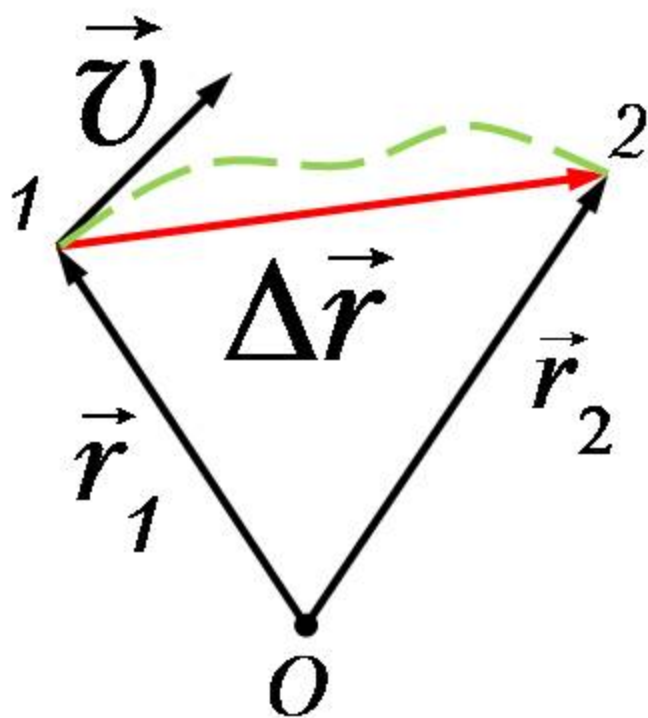
$$r_x = x,$$

$$r_y = y, \quad r_z = z$$

*Косинусы углов,
У которых радиус-
вектор
составляет с
осями Oх, Оу,*

$$\text{Cos } \alpha = \frac{r_x}{|\vec{r}|}; \quad \text{Cos } \beta = \frac{r_y}{|\vec{r}|}; \quad \text{Cos } \gamma = \frac{r_z}{|\vec{r}|}$$

Векторный способ описания движения.



Для того, чтобы описать движение материальной точки, необходимо указать зависимость её радиуса-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

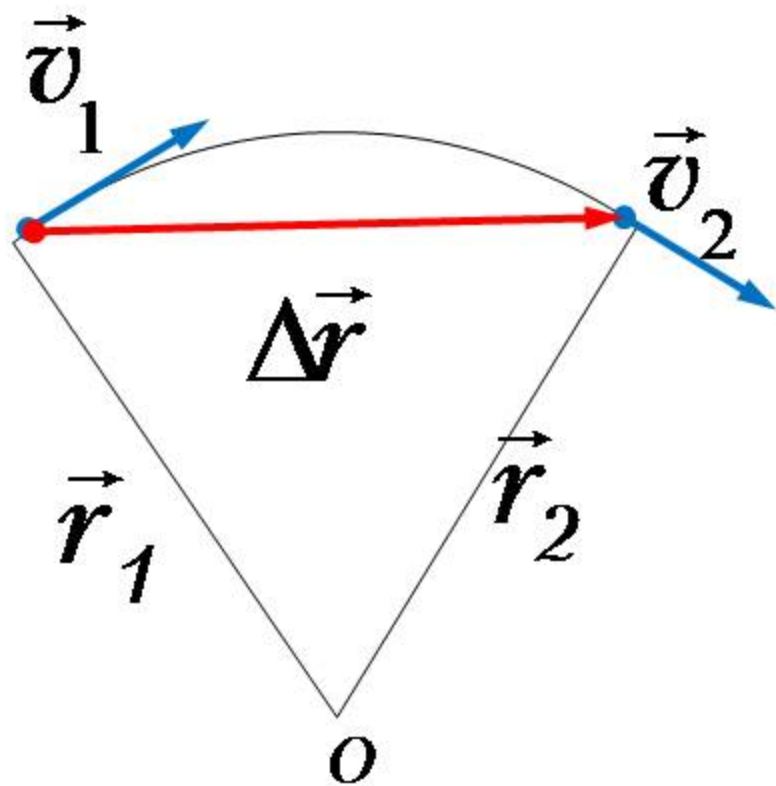
$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение

материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 равно приращению её радиуса-вектора за этот интервал времени

Скорость и ускорение материальной точки.

Средняя скорость материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

**Среднее ускорение материальной точки
в интервале времени от t_1 до t_2 :**

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Скорость материальной точки в момент времени t :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt,$$

где $\vec{v}_0$ – скорость материальной точки в момент времени $t=0$.

Радиус-вектор материальной точки в момент времени t :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор материальной точки в момент времени $t=0$.

Движение с постоянным ускорением

Зависимость скорости материальной точки от времени:

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$\vec{v}_0$ - скорость материальной точки в момент времени $t=0$.

**Зависимость радиуса-вектора
материальной точки от времени:**

$$\vec{a} = \text{const} \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

$\vec{r}_0$ - радиус-вектор материальной
точки в момент времени $t=0$

**Перемещение материальной точки за
интервал**

времени от 0 до t :

$$\vec{a} = \text{const} \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v} dt$$

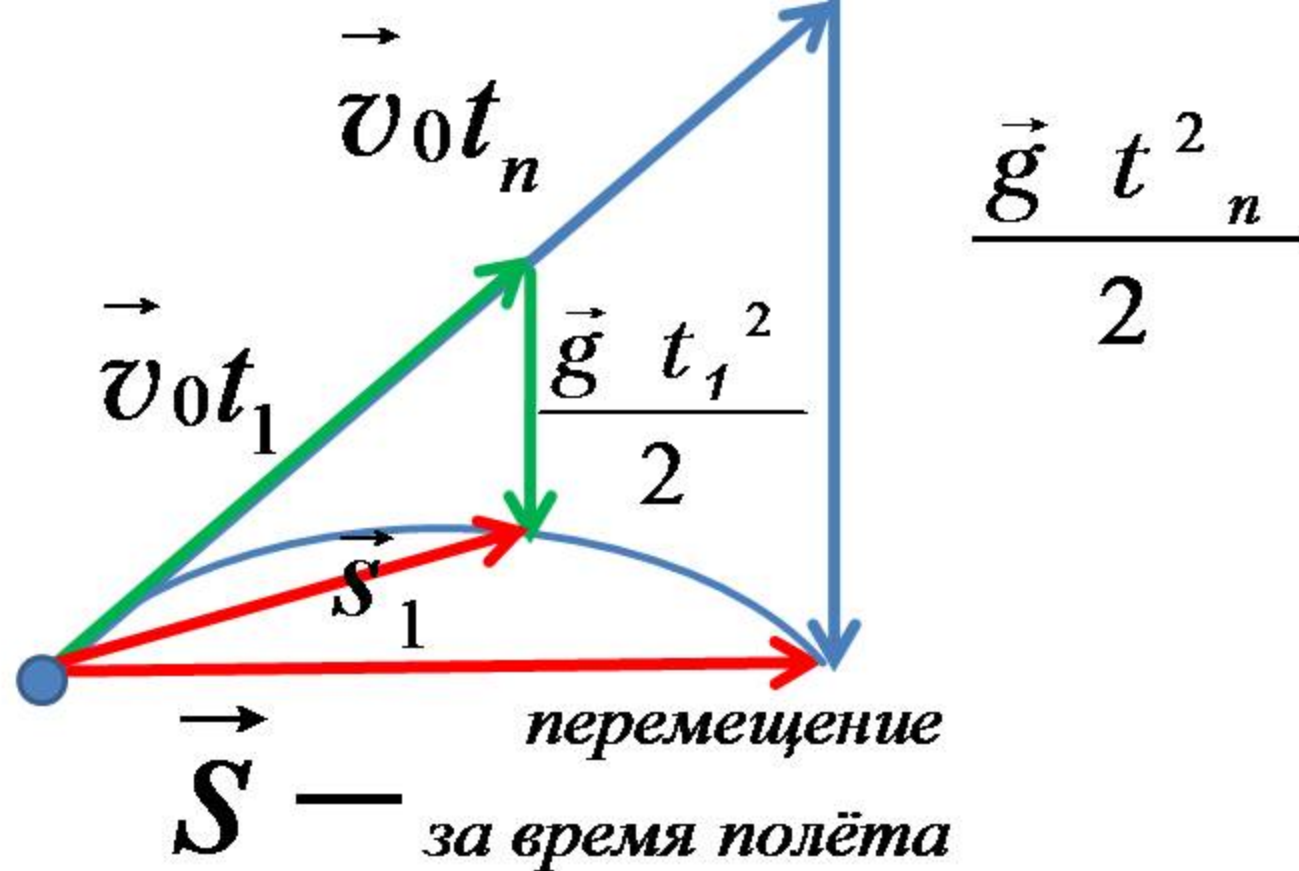
$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$



Пример.

Камень брошен под углом к горизонту со скоростью v_0 . Он упал на землю спустя t_n секунд. Найдите горизонтальную дальность полёта камня.

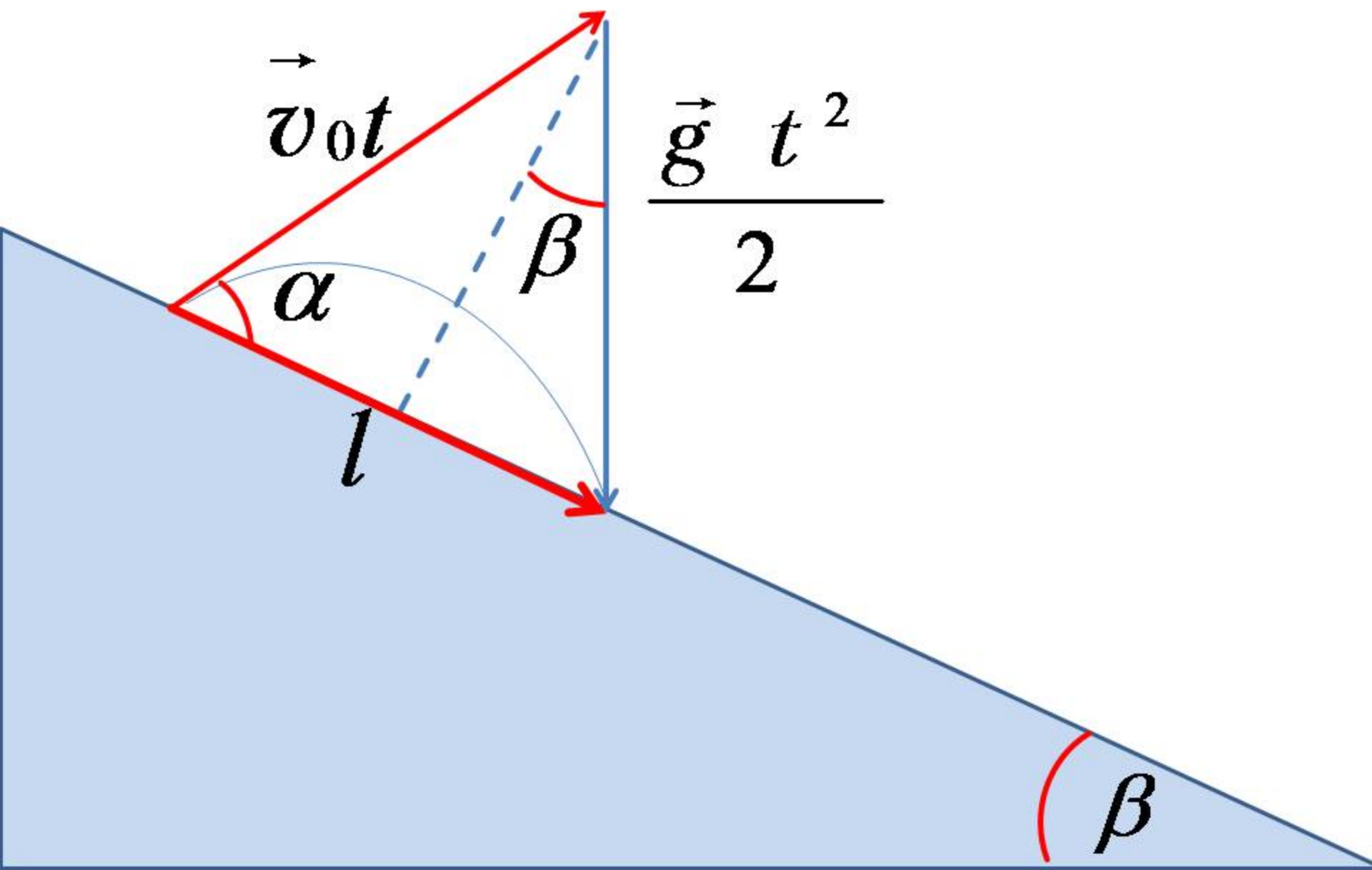
Решение. Построим векторные диаграммы для произвольного момента времени t_1 и для времени полёта t_n . Видно, что задачу можно решать геометрически. По теореме Пифагора:



$$|\vec{s}| = \sqrt{v_0^2 t_n^2 - \left(\frac{g t_n^2}{2} \right)^2}$$

Пример. Камень брошен со склона горы с начальной скоростью v_0 , направленной под углом α к склону горы, составляющего угол β с горизонтом. На каком расстоянии от точки бросания l упадёт камень?





Выразим высоту в треугольнике через модуль каждого из векторов по очереди.

$$v_0 t \sin \alpha = \frac{g t^2}{2} \cos \beta$$

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta}$$

$$l = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) =$$

$$= \frac{2 v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \beta} \cos(\alpha - \beta)$$

Д/З 3

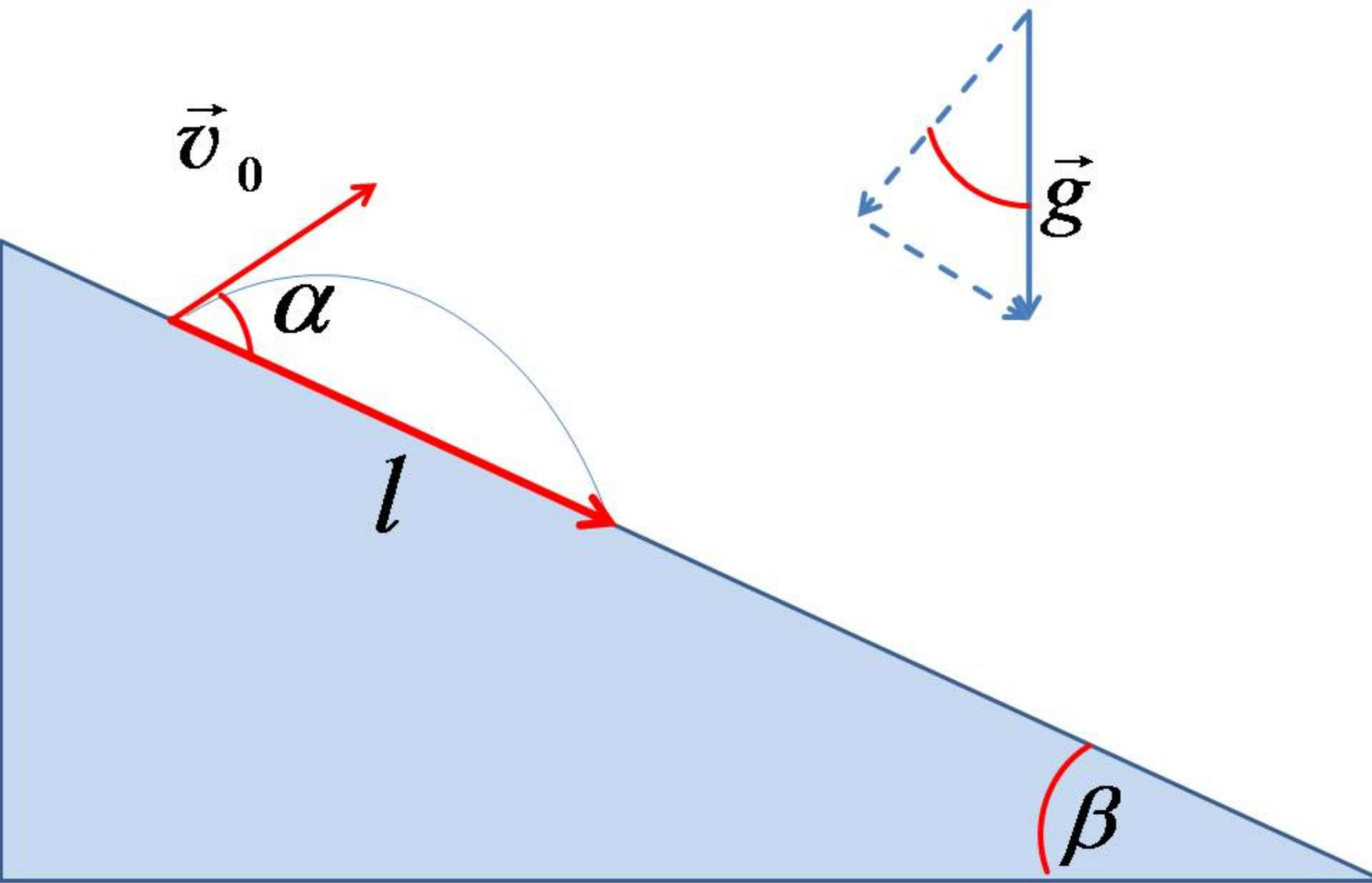
Решите эту задачу координатным способом,

А) ось Ox - горизонтальна

Б) ось Ox направлена вдоль наклонной плоскости

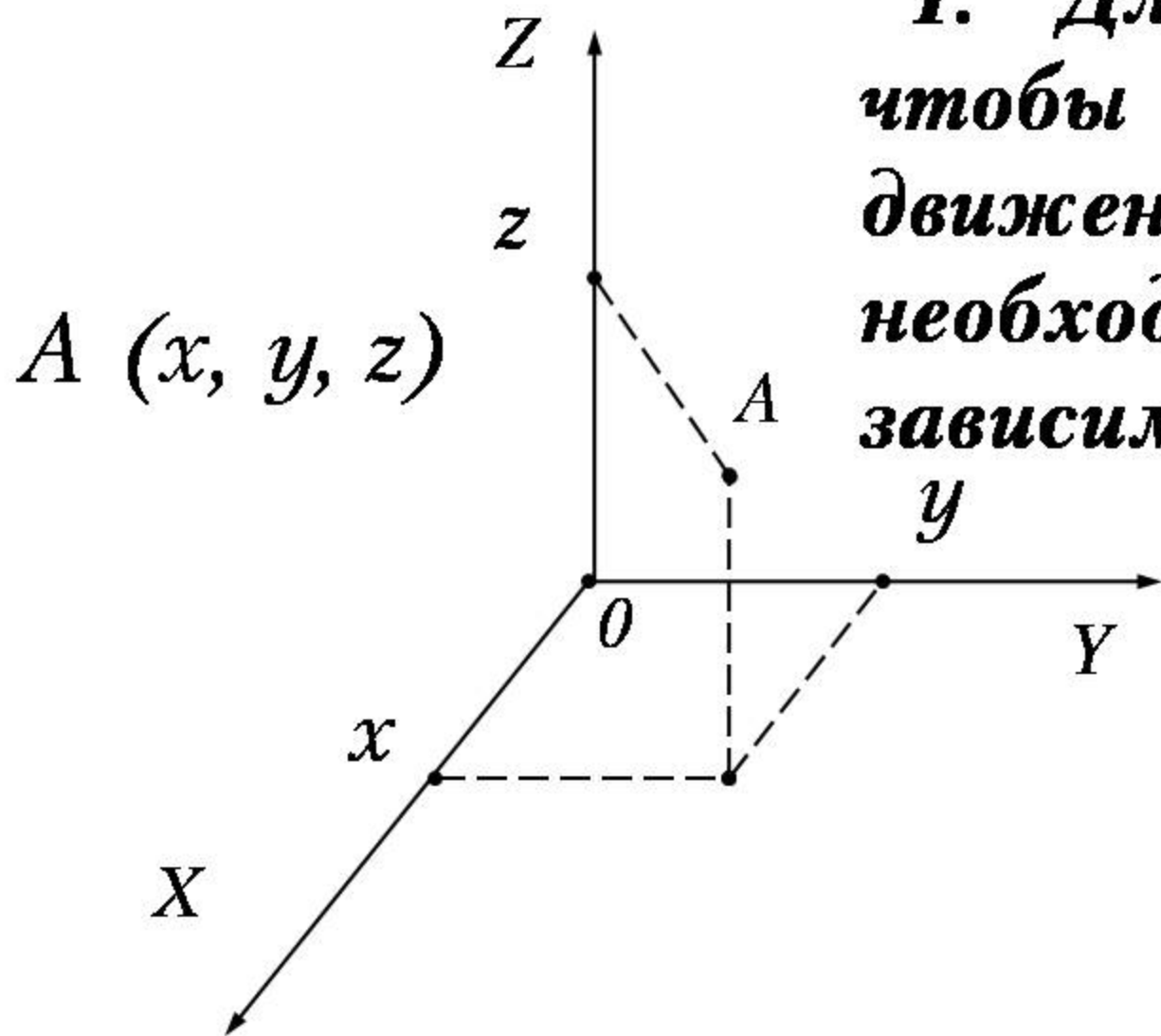
На следующем слайде – подсказка.





Координатный способ описания движения.

I. Для того, чтобы описать движение точки, необходимо указать зависимость



$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t)\end{aligned}$$

II Вектор скорости материальной точки. Проекции вектора скорости на оси координат.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Модуль вектора скорости:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор скорости составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

III. Ускорение материальной точки.

Проекции вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль вектора ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор ускорения

составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

IV. Перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2

*Проекции вектора перемещения на оси
координат:*

$$\left. \begin{aligned} \left(\vec{S} \right)_x &= x_2 - x_1 \\ \left(\vec{S} \right)_y &= y_2 - y_1 \\ \left(\vec{S} \right)_z &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\}$$

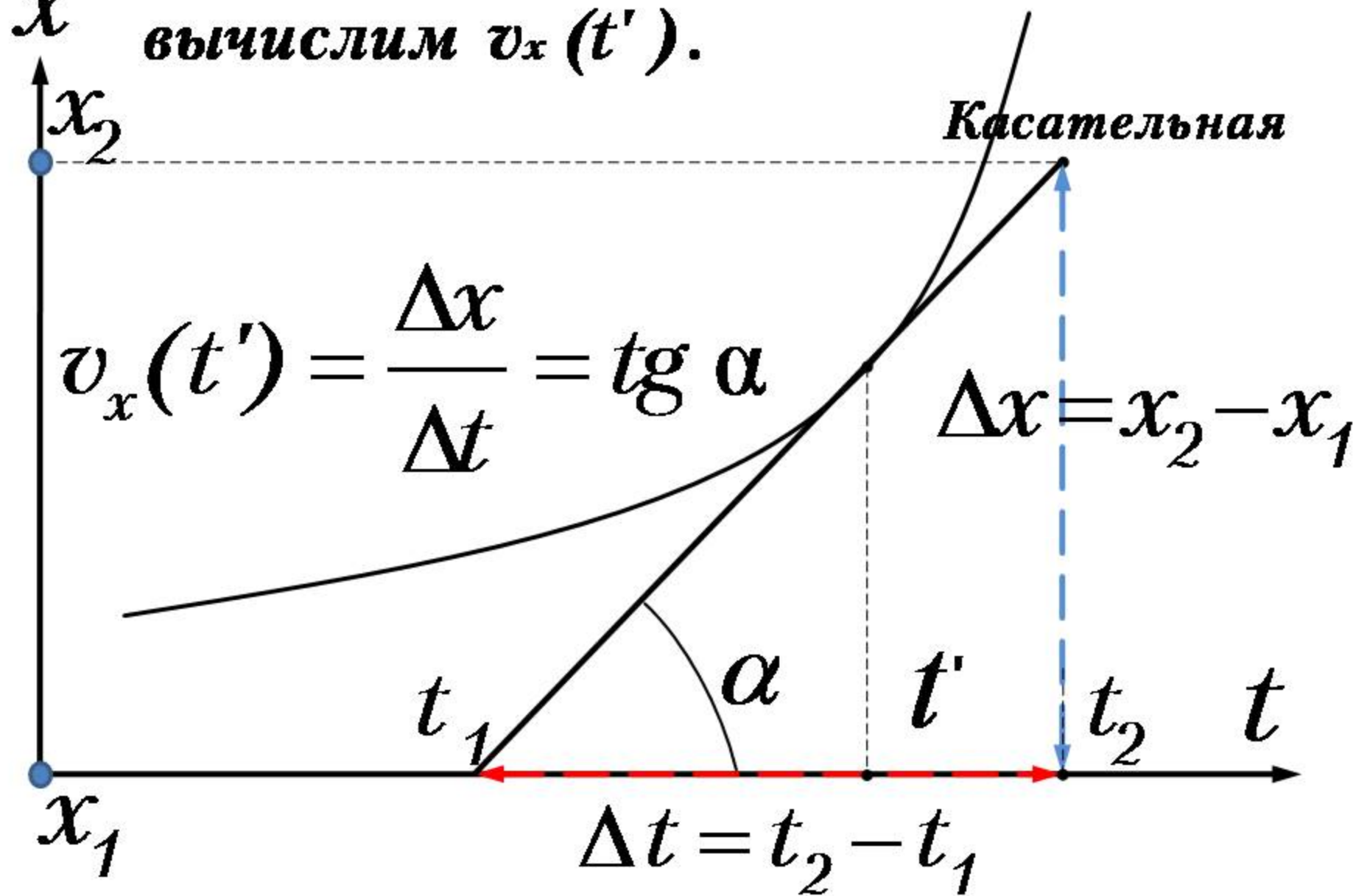
Модуль вектора перемещения:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

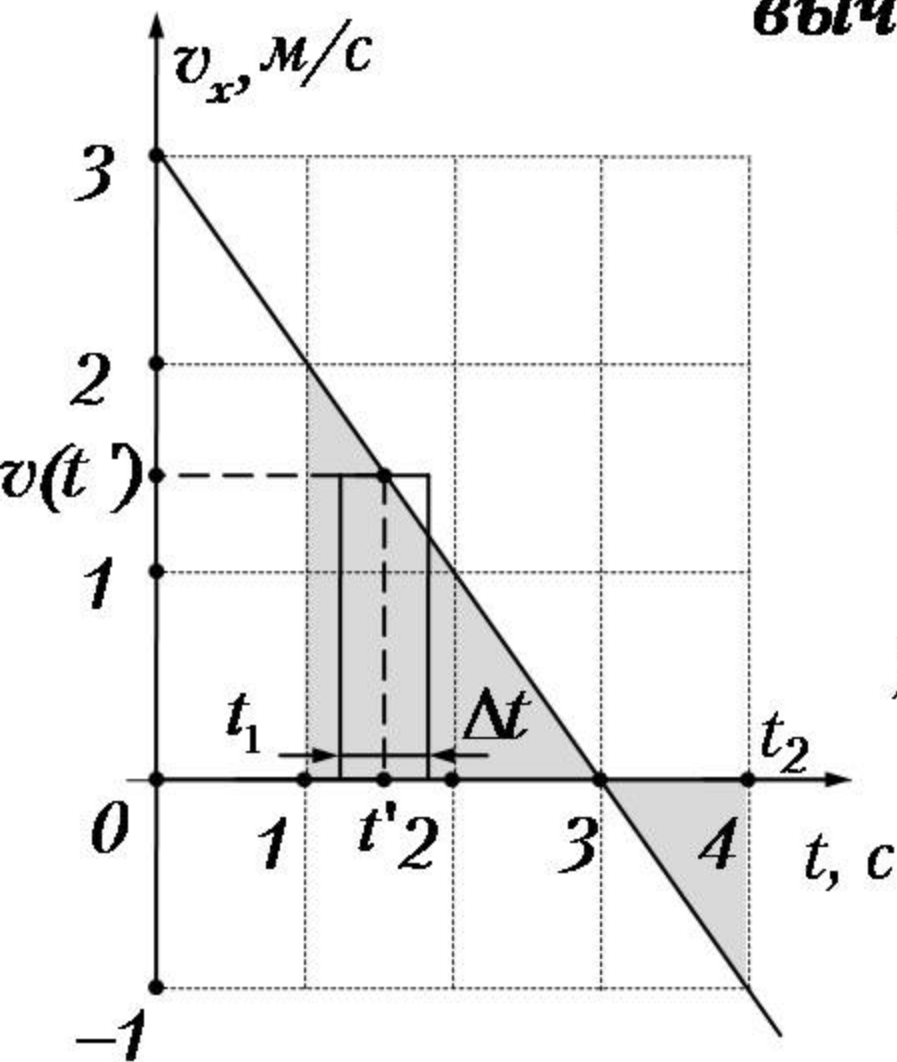
*Косинусы углов, которые вектор
перемещения
составляет с осями Ox , Oy , Oz :*

$$\cos \alpha = \frac{S_x}{|\vec{S}|}; \quad \cos \beta = \frac{S_y}{|\vec{S}|}; \quad \cos \gamma = \frac{S_z}{|\vec{S}|};$$

По графику зависимости $x(t)$
вычислим $v_x(t')$.



Пример Материальная точка движется
вдоль оси Ox . По графику зависимости $v_x(t)$
вычислим:



- 1) Путь, пройденный
материальной точкой за
интервал времени от t_1
до t_2 :

$$S = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м}$$

- 2) Приращение координаты
материальной точки за
интервал времени от t_1
до t_2 :

$$x_2 - x_1 = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

3). *Проекцию перемещения материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :*

$$\left(\Delta \vec{r}\right)_x = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$



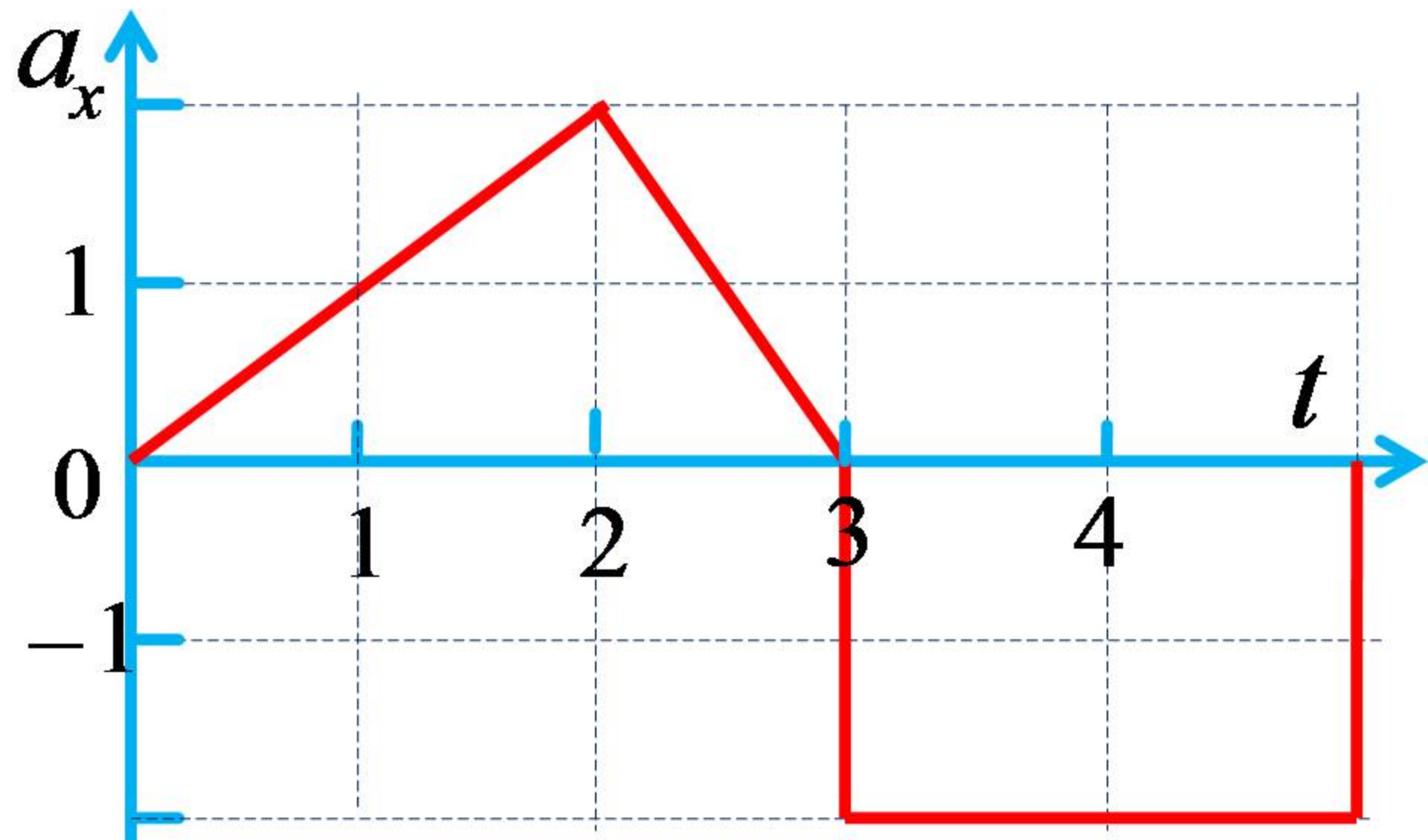
Пример.

Материальная точка покоится в начале координат. В момент времени $t=0$ она начинает движение вдоль оси Ox . На рисунке показан график зависимости проекции её ускорения на ось Ox от времени. Определите:

- 1. В какие моменты времени модуль скорости точки возрастает**
- 2. В какой момент времени направление движения точки изменяется на противоположное**

3. Максимальное значение модуля скорости точки

4. На какое максимальное расстояние точка удалилась от начала координат



Формула для разности квадратов скоростей

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$
$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

Приращение координаты материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}$$

Проекция на ось Ox перемещения материальной точки за интервал времени от 0 до t :

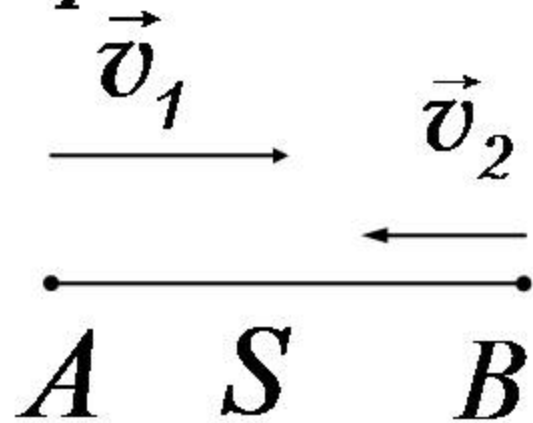
$$\left(\Delta \vec{r}\right)_x = \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Средняя скорость прохождения отрезка пути.

$$v_{ср} = \frac{S}{\Delta t}$$

Средней путевой скоростью движения точки называется скалярная величина равная отношению пути, пройденного точкой за интервал времени Δt , к его продолжительности.

Пример . Материальная точка прошла путь из точки A в точку B со скоростью v_1 и обратно со скоростью v_2 . Вычислите среднюю путевую скорость.

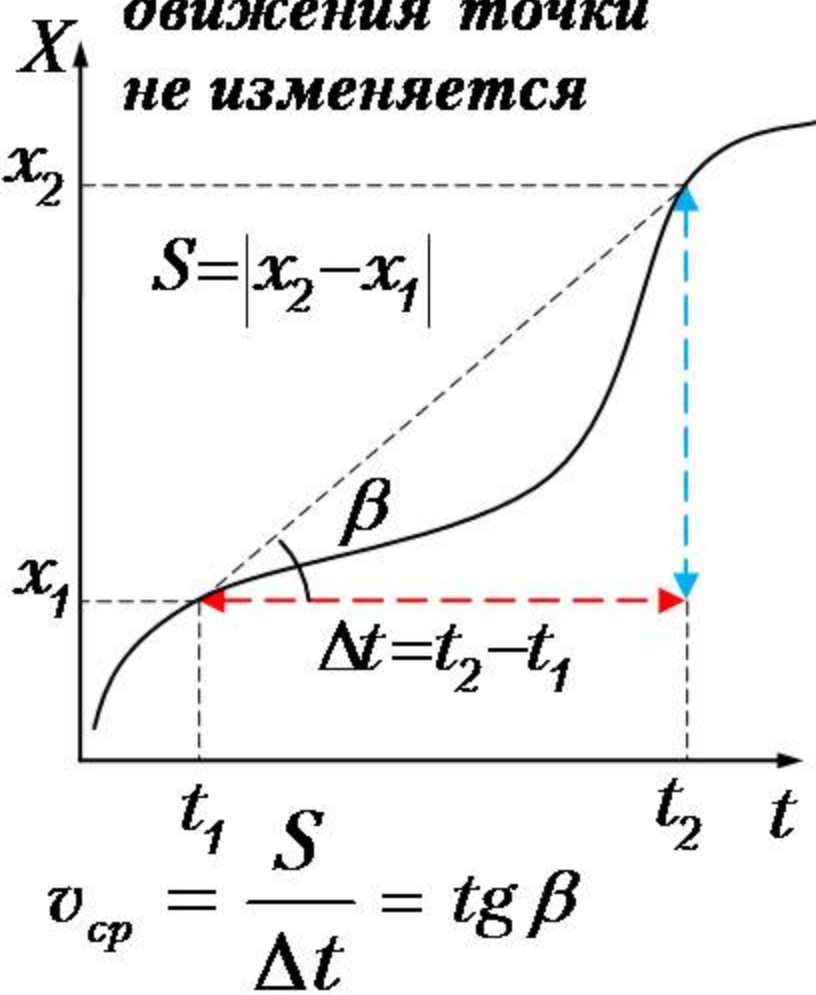


$$v_{cp} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} \right)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Материальная точка движется вдоль оси Ox . По графику зависимости $x(t)$

вычислим v_{cp}

Направление движения точки не изменяется



В момент времени t' направление движения точки изменяется

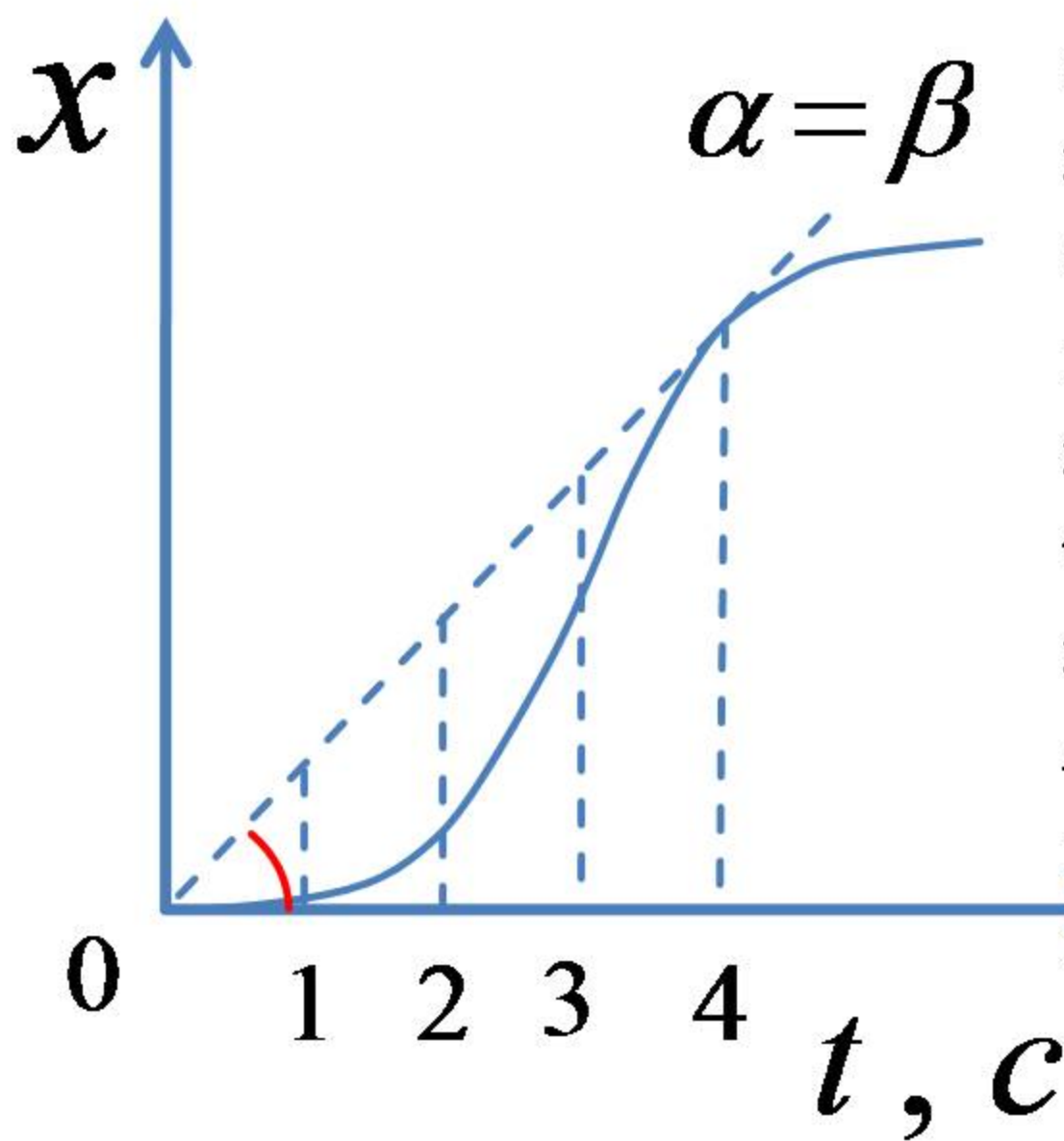




Пример.

Материальная точка движется вдоль оси Ox . 1. Укажите момент времени, когда мгновенная скорость точки максимальна.

2. Укажите момент времени t_1 , когда мгновенная скорость совпадает по величине со средней путевой скоростью за интервал времени от 0 до t_1 .



В момент времени $t=4$ с касательная совпадает с секущей, проходящей через начало координат. Мгновенная и средняя путевая скорости равны.

Пример. Д/З 4

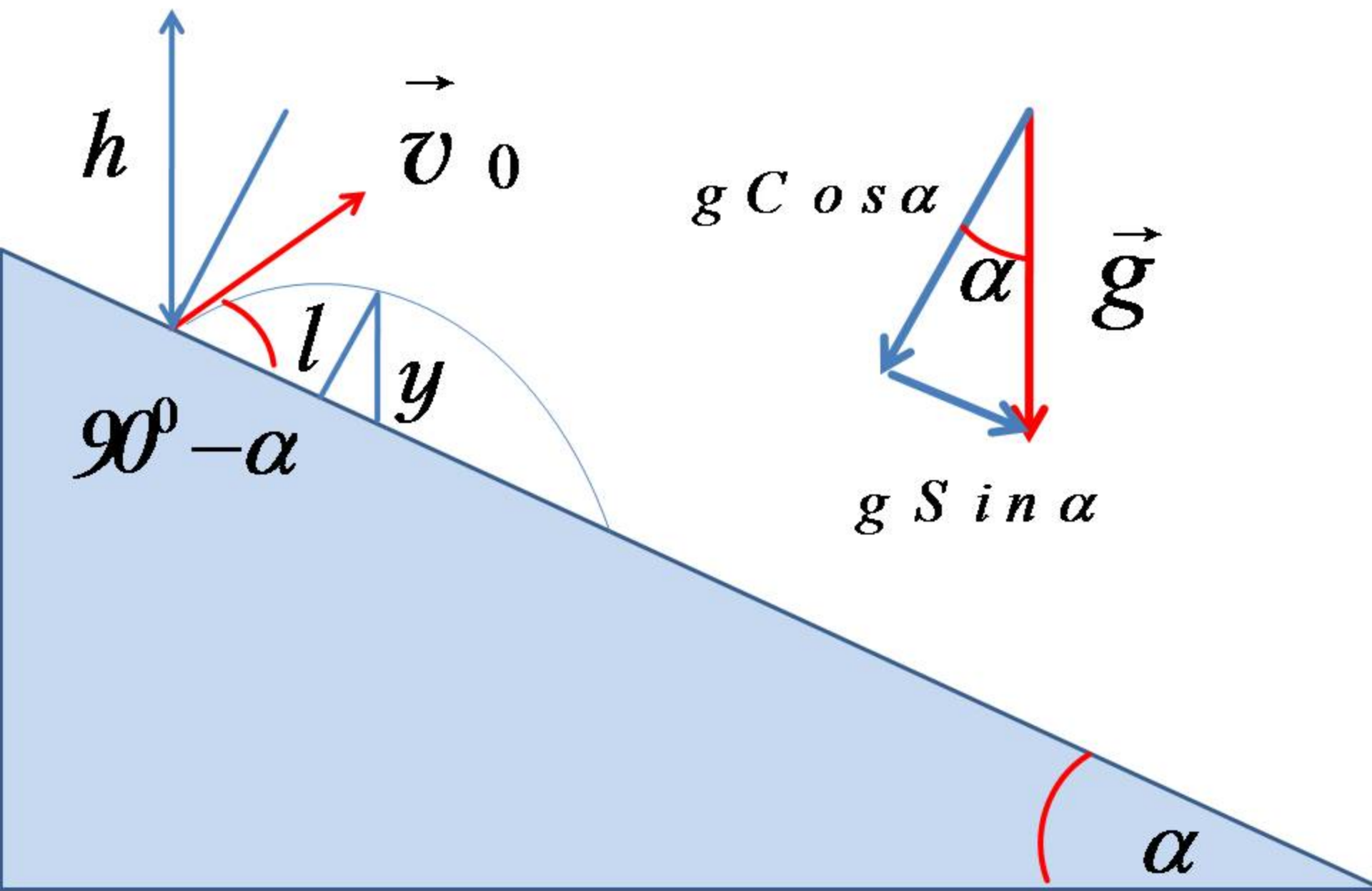


Мячик падает с высоты h на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и абсолютно упруго отскакивает от неё.

Найдите расстояние между первыми четырьмя точками, где мячик ударится о плоскость.

Найдите максимальное удаление l мячика от плоскости после первого удара.

Найдите максимальное расстояние по вертикали от плоскости до траектории мячика между двумя первыми ударами (у на рисунке) .





Пример.

Мячик брошен с поверхности земли со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. Определите

**Максимальную высоту подъёма мячика
Дальность полёта мячика по горизонтالي.**

Каким должен быть угол α , чтобы обеспечить максимальную дальность полёта по горизонтали при заданном значении начальной скорости

Запишите уравнение траектории мяча

Пример



На балконе стоит мешок картошки.

Нехороший мальчик кидается картошкой в прохожих. Скорость, которую он может сообщить картофелине при броске, равна v_0

Под каким углом к горизонту должна быть направлена эта скорость, чтобы картофелина упала как можно дальше от места старта? Высота балкона равна h .

(Есть в тесте в ЦДО)

Ответ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}$$

Опишем движение картофелины по горизонтали и по вертикали .

$$0 = h + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

$$L = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad (2)$$

Нужно добиться максимальной дальности полёта вдоль земли -L.

Выразим t из (2) и подставим в (1)
Учтём, что

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (3)$$

Мы получим квадратное уравнение для определения $tg\alpha$.

$$tg\alpha = \frac{v_0^2}{gL} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \quad (4)$$

Понятно, что искомый угол существует, поэтому дискриминант должен быть больше или равен нулю.

$$1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \frac{g^2 L^2}{v_0^4} \geq 0 \quad (5)$$

Практически мы уже решили задачу, ведь из (5) следует, что

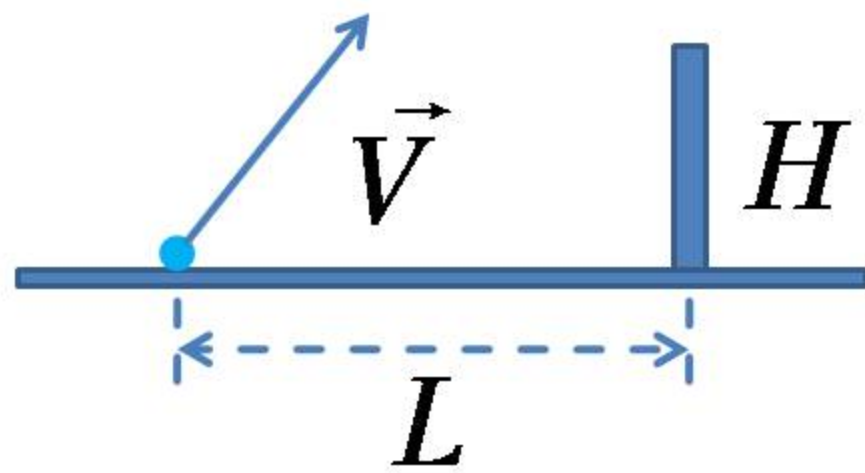
$$L \leq \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (6)$$

Нам нужно максимальное значение L , поэтому мы выбираем равенство.

$$L = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (7)$$

Подставим (7) в (4) и определим угол.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}$$



Пример. **Д/З 5** Из точки, находящейся на расстоянии L от стенки высотой H , необходимо бросить мяч, чтобы он перелетел через стену. Найдите минимальную скорость мяча, при которой это возможно. Под каким углом к горизонту она должна быть направлена?

Ответ.

$$t_{g\alpha} = \frac{V_0^2}{g \cdot L}$$



Пример. Д/З 6

Пикирующий бомбардировщик сбрасывает бомбу с высоты H , находясь на расстоянии L от цели. Скорость бомбардировщика равна v . Под каким углом к горизонту он должен пикировать?

Ответ $S = L^2 - H^2$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v^2}{gS} \cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{v^2}{gS}\right)^2 + \frac{2Hv^2}{gS^2} - 1}$$