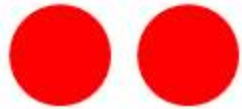


Практика 2.

© *С. А. Курашова*, 2018



сложные задачи

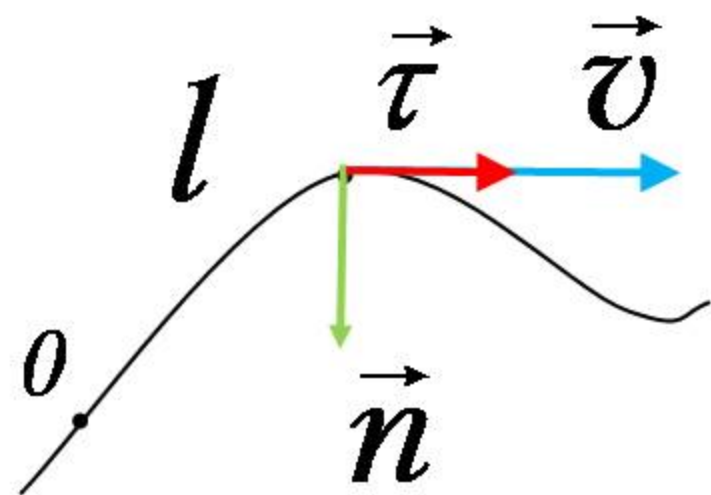


очень сложные задачи.



*обязательные задания для всех.
Выполнение остальных заданий
приветствуется.
Ответы будут открыты через 2
недели. Пока у вас есть время
оформить решения, показать мне и
набрать баллы.*

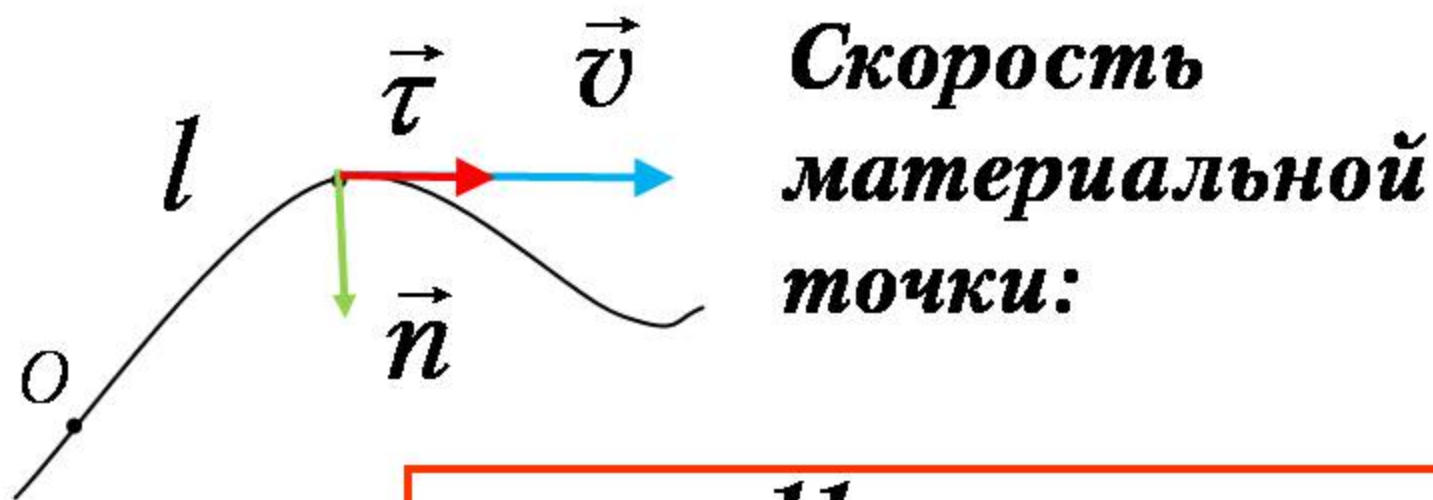
Траекторный способ описания движения



Используется ,
когда траектория
движения
материальной
точки известна
заранее.

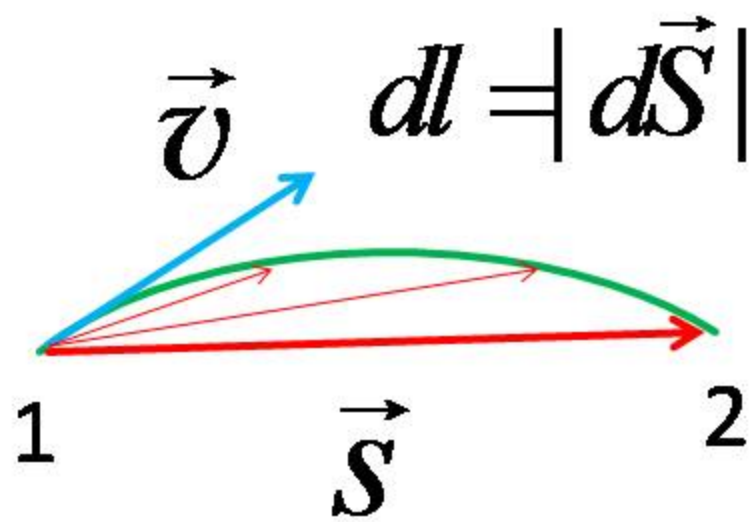
Положение материальной точки
задаётся с помощью дуговой
координаты l , отсчитываемой от
выбранного на траектории начала.

$$l = l(t)$$



$$\vec{v} = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{\tau} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ — **единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.**



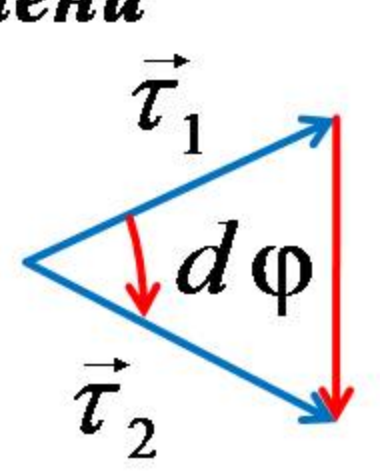
Через перемещение

$$|\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\vec{S}}{dt} \right|$$

Через путь

$$|\vec{v}| = \frac{dl}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Вычислим производную от вектора $\vec{\tau}$ по времени


$$|\vec{\tau}| = 1$$
$$d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \vec{n} \quad |d\vec{\tau}| = d\varphi$$
$$d\vec{\tau} = d\varphi \vec{n}$$

Орт $\vec{n}$ лежит в той же плоскости, в которой поворачивается вектор $\vec{\tau}$, направлен в ту же сторону, в которую происходит вращение.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}$$

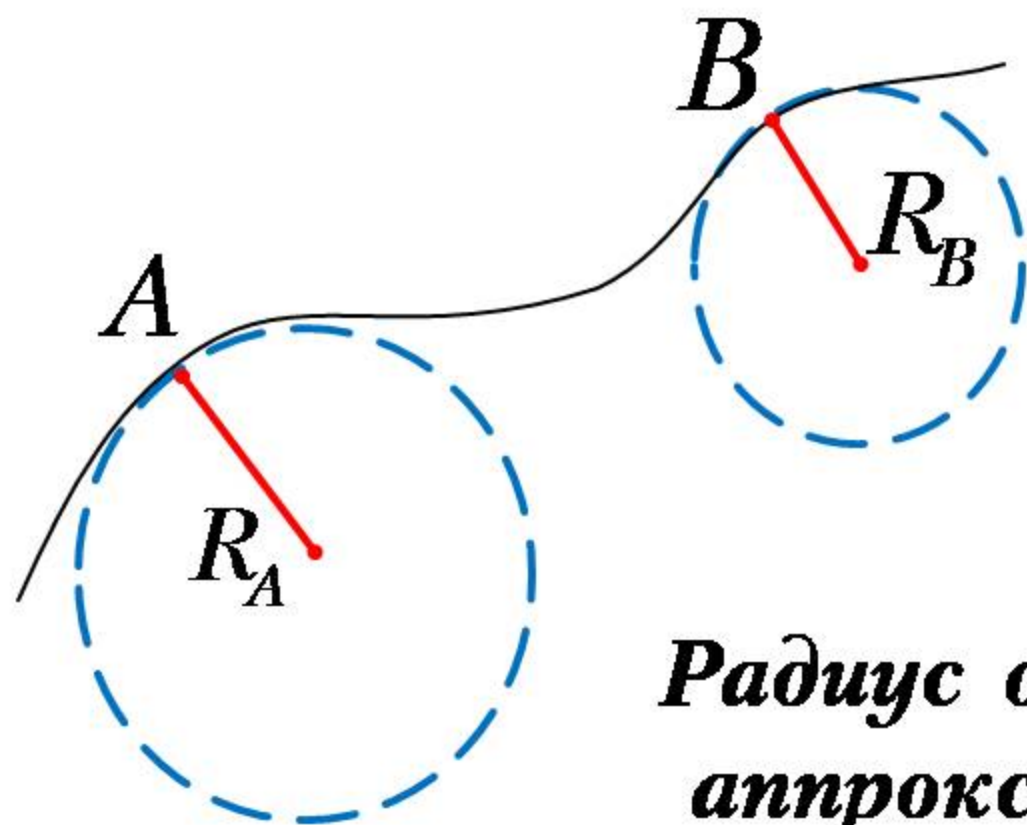
Полное ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_{\tau}} + \underbrace{\frac{|\vec{v}| \cdot d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_{\tau}} + \underbrace{|\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Если $|\vec{v}| \uparrow$, $\vec{a}_{\tau} \uparrow \uparrow \vec{v}$ *Если* $|\vec{v}| \downarrow$, $\vec{a}_{\tau} \uparrow \downarrow \vec{v}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

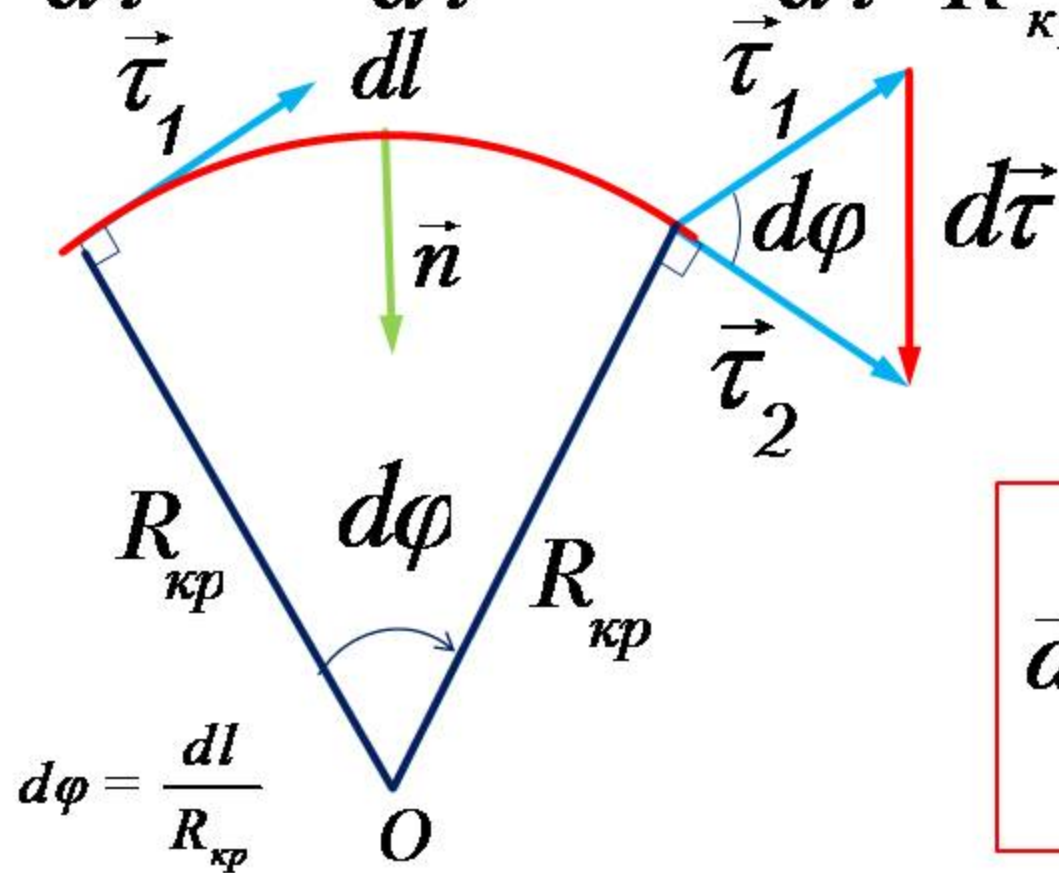
Радиус кривизны траектории



*Радиус окружности,
аппроксимирующей
траекторию
в данной точке*

Выразим нормальное ускорение материальной точки через радиус кривизны её траектории:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = \frac{dl}{dt} \frac{1}{R_{кр}} \vec{n} = |\vec{v}| \frac{1}{R_{кр}} \vec{n}$$



$$\vec{a}_n = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

Тангенциальное ускорение отвечает за скорость изменения **модуля** скорости

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Нормальное ускорение пропорционально скорости изменения **направления** вектора скорости

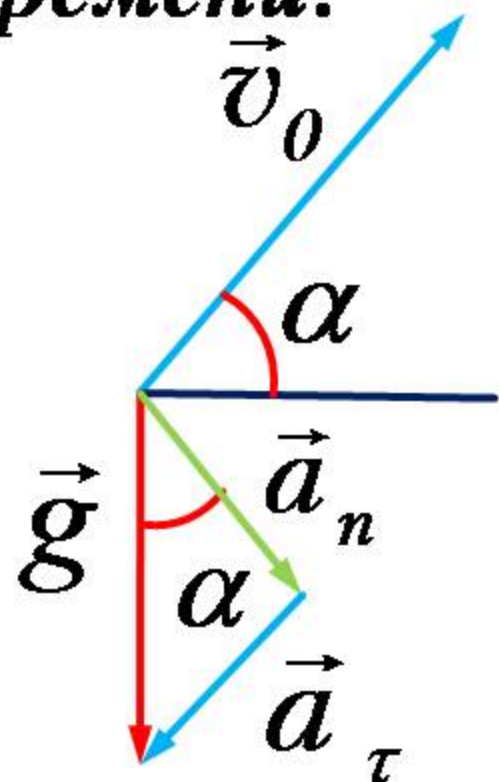
$$\vec{a}_n = |\vec{v}| \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = |\vec{v}|^2 \frac{1}{R} \vec{n}$$

Пример 1. Камень брошен со скоростью $\vec{v}_0$ под углом к горизонту. Определите его нормальное и тангенциальное ускорение, и радиус кривизны траектории в начальный момент времени.

$$a_n = g \cos \alpha$$

$$a_\tau = g \sin \alpha$$

$$R = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}$$



Пример 2.

Камень брошен с башни горизонтально со скоростью $\vec{v}_0$

Определите нормальное и тангенциальное ускорения камня в момент через t секунд полёта. Вычислите радиус его траектории в этот момент времени.

Пример 3. Камень брошен со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. Найти зависимость его нормального, тангенциального ускорения и радиуса кривизны траектории от угла β , который скорость составляет с линией горизонта.

Пример Д/З 1

Камень брошен с поверхности земли со скоростью

V_0 под углом α

к горизонту. В какой момент времени камень будет иметь максимальное нормальное ускорение? Вычислите его.

Определите нормальное и тангенциальное ускорения камня в момент, когда он поднимется на половину максимальной высоты? Вычислите радиус его траектории в этот момент времени.



Пример Д/З 2

Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы

- 1. Радиус кривизны начала его траектории был в N раз больше, чем в вершине.**
- 2. Центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности**

Ответы

$$\cos \alpha = \frac{1}{N^{1/3}} \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \quad \alpha = 54,7^\circ$$

Пример 4

Точка движется в плоскости так, что её тангенциальное ускорение $a_\tau = \alpha$

**А нормальное ускорение $a_n = \beta t^4$
 α и β положительные постоянные.**

В момент начала отсчёта времени точка покоилась. Найдите радиус кривизны траектории и её полное ускорение как функции пройденного пути S .

$$v = \int_0^t a_\tau d\tau = \alpha t + 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{начальное} \\ \text{условие} \end{array}$$

$$S = \int_0^t v d\tau = \int_0^t \alpha \tau d\tau = \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 t^2}{\beta t^4} = \frac{\alpha^3}{\beta 2S}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 S}{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} a_{\text{полн}} &= \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^8} = \\ &= \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\beta 4 S^2}{\alpha^3} \right)^2} \end{aligned}$$

**Пример 5. Частица движется в плоскости XY со скоростью $\vec{v} = \alpha \vec{i} + \beta x \vec{j}$.
Где α и β – положительные постоянные.
В начальный момент времени частица находилась в начале координат. Найти**

- 1. Уравнение траектории частицы**
- 2. Радиус кривизны траектории как функцию x .**

$$v_x = \alpha \quad (1)$$

$$x = \int_0^t \alpha dt = \alpha t + 0 \quad (2)$$

$$v_y = \beta x = \alpha \beta t \quad (3)$$

$$y = \int_0^t \alpha \beta t dt = \frac{\alpha \beta t^2}{2} + 0 \quad (4)$$

*начальные
условия*

*выразим t из (2) и подставим в (4), получим
уравнение траектории*

$$y = \frac{\beta x^2}{2 \alpha}$$

Из (1) и (3) найдём модуль скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta x)^2} \quad (5)$$

Тангенциальное ускорение – скорость изменения модуля скорости

$$a_{\tau} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{\beta^2 2x}{2\sqrt{\alpha^2 + (\beta x)^2}} \alpha \quad (6)$$

Из (1) и (3) найдём проекции ускорения на координатные оси.

$$a_x = 0 \quad (7)$$

$$a_y = \alpha \beta \quad (8)$$

Полное ускорение точки

$$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \beta \alpha \quad (9)$$

Радиус кривизны траектории

$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{a_n} = \frac{|\vec{v}|^2}{\sqrt{a_{\text{полн}}^2 - a_{\tau}^2}}$$

Из (5), (6) и (9)

$$R = \frac{\alpha^2 + (\beta x)^2}{\sqrt{(\alpha\beta)^2 - \left(\frac{\alpha\beta^2 x}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta x)^2}} \right)^2}}$$

Сделаем преобразования

$$R = \frac{\left(\alpha^2 + (\beta x)^2\right)^{3/2}}{\sqrt{(\alpha\beta)^2 \left(\alpha^2 + (\beta x)^2\right) - \alpha^2 \beta^4 x^2}}$$

$$R = \frac{\left(\alpha^2 + (\beta x)^2\right)^{3/2}}{\alpha^2 \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2\right)^{3/2}$$



Пример. Д/З 3 Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъёма постоянна и равна v_0

Из-за ветра шар приобретает горизонтальную компоненту скорости

$$v_x = \alpha y$$

α -постоянная, y - высота подъёма.

Найдите зависимость от высоты подъёма

1. Сноса шара
2. Полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

$$\text{Ответы } S = \frac{\alpha}{2 v_0} y^2$$

$$a_{\text{полн}} = \alpha v_0$$

$$a_{\tau} = \frac{\alpha^2 y}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha y}{v_0} \right)^2}}$$

$$a_n = \frac{\alpha v_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha y}{v_0} \right)^2}}$$

Пример 6. Точка движется по окружности со скоростью $v = \alpha t$, где α - положительная постоянная. Найти полное ускорение точки в момент, когда она пройдёт N -ю часть длины окружности после начала движения.

$v = \alpha t$
Пройденный путь $l = \int_0^t v dt = \frac{\alpha t^2}{2} \quad (1)$

По условию задачи $l = 2 \pi R N \quad (2)$

Из (1) и (2)
выразим время движения точки $t_{\text{дв}} = \sqrt{\frac{4 \pi R N}{\alpha}} \quad (3)$

$$a_{\tau} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^2 t_{\partial\mathcal{B}}^2}{R} = (cm\ 3) = \alpha 4\pi N$$

$$a_{total} = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2} = \alpha \sqrt{1 + (4\pi N)^2}$$



Пример 7. Точка движется в положительном направлении оси

Ох так, что её скорость меняется по закону

$$v = \alpha \sqrt{x}$$

Где α - положительная постоянная. В момент времени $t=0$ точка находилась в начале координат. Определите:

- 1. Скорость и ускорение точки как функцию времени.**
- 2. Среднюю скорость за время, в течение которого она пройдёт первые S метров пути.**

$$v = \alpha \sqrt{x} \qquad \underline{\frac{dx}{dt} = \alpha \sqrt{x}}$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt$$

$$2\sqrt{x} = \underline{\alpha t + const}$$

Постоянную определим из начальных условий $t = 0 \quad x = 0 \Rightarrow const = 0$

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}$$

Вычислим скорость и ускорение точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha^2 t}{2} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2}{2}$$

Определим среднюю путевую скорость точки. Время, которое было затрачено на прохождение S метров пути

$$t_1 = \frac{2\sqrt{S}}{\alpha}$$

$$v_{cp} = \frac{S}{t_1} = \frac{\sqrt{S}\alpha}{2}$$

Пример 8. Точка движется по прямой, замедляясь, с ускорением, модуль которого зависит от её скорости по закону

$$a = \alpha \sqrt{v}$$

В начальный момент времени скорость точки равна v_0

Какой путь пройдёт она до остановки и за какое время?

$$a_x = -\alpha \sqrt{v_x} \qquad \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\alpha dt$$

Проинтегрируем уравнение с учётом начальных условий

$$2\sqrt{v} = -\alpha t + \text{const}$$

$$v = -\frac{\alpha^2 t^2}{4} + v_0$$

Определим время движения точки до остановки

$$v_0 = \frac{\alpha^2 t_{\text{дв}}^2}{4}$$

$$t_{\text{дв}} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{v_0}$$

***Путь, пройденный прямолинейно
двигающейся точкой***

$$l = \int_0^{t_{\partial v}} v(t) dt = -\frac{\alpha^2 t_{\partial v}^3}{12} + v_0 t_{\partial v} =$$
$$= \frac{4(v_0)^{3/2}}{3\alpha}$$

Пример 9. Точка движется по дуге окружности

$$v = \alpha \sqrt{S}$$

Радиуса R . Её скорость

где S - пройденный путь, α -положительная постоянная.

Найти угол между вектором скорости и полного ускорения как функцию S .



**Пусть $v = \alpha \sqrt{S}$
где α - коэффициент пропорциональности**

$$\frac{dS}{dt} = \alpha \sqrt{S}$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dS}{\sqrt{S}} = \alpha dt \qquad 2\sqrt{S} = \alpha t$$

Зависимость пройденного пути от времени

$$S = \alpha^2 \frac{t^2}{4} \quad (1)$$

Зависимость скорости точки от времени

$$v = \frac{dS}{dt} \qquad v = \alpha^2 \frac{t}{2}$$

Найдём тангенциальное ускорение точки

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \alpha^2 \frac{1}{2} \quad (2)$$

Найдём нормальное ускорение точки. И выразим его через путь S , используя (1).

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^4 t^2}{4R} = \frac{\alpha^2}{R} S \quad (3)$$

Тангенс угла между скоростью и полным ускорением равен отношению нормального ускорения к тангенциальному (см. рис). Согласно (2) и (3)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 S}{R}$$

