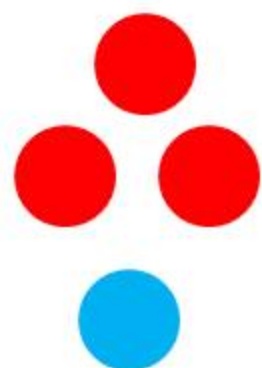


Практика 3.

© *С. А. Курашова*, 2018



-сложные задания

-очень сложные задания

*-обязательные задания для всех .
Выполнение остальных заданий
приветствуется.*

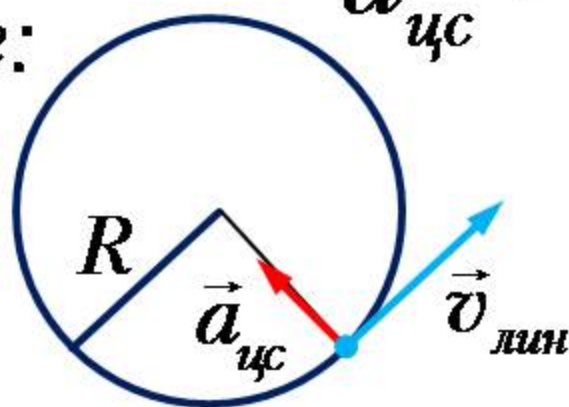
*Ответы будут открыты через 2
недели. Пока у вас есть время
оформить решения, показать мне и
набрать баллы.*

Кинематика равномерного вращения материальной точки по окружности

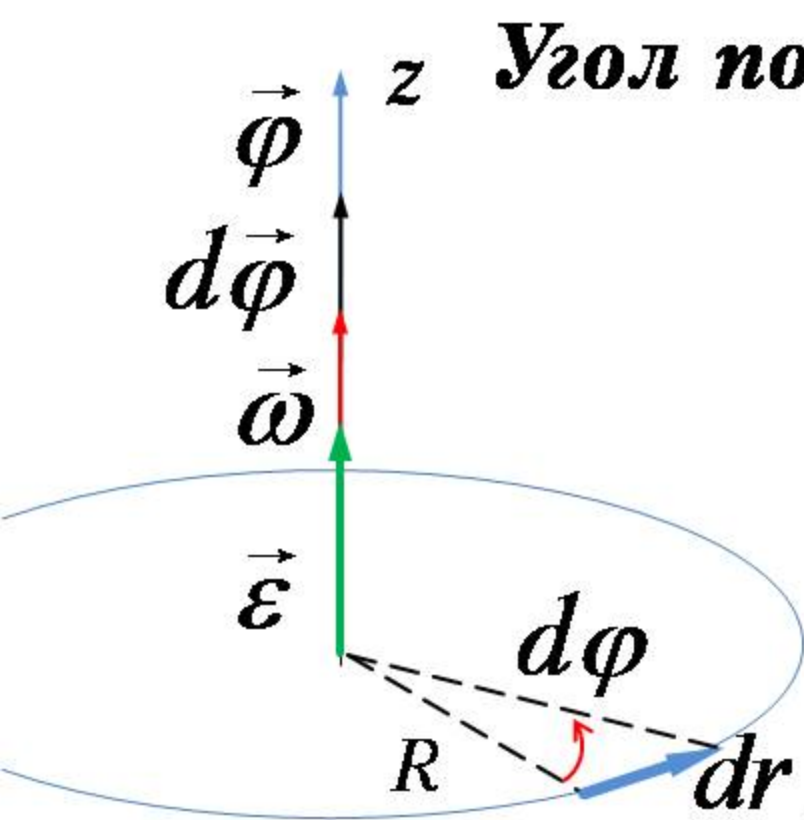
Период обращения точки: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ $[T] = c$

Частота обращения точки: $\nu = \frac{1}{T}$ $[\nu] = c^{-1}$

Центростремительное ускорение: $a_{\text{цс}} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$



Кинематика вращения материальной точки вокруг неподвижной оси.



Угол поворота: $\vec{\varphi}$ аксиальный вектор

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d \vec{\varphi}}{dt} \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

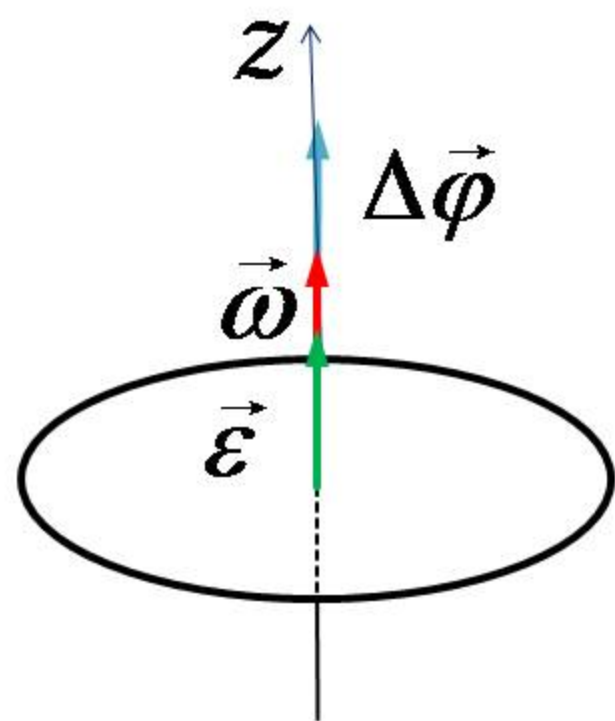
Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} \quad [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Если $|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ если $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$

Направление вектора угла поворота определяют по правилу правого винта: если смотреть вдоль вектора угла поворота, то мы будем видеть поворот, совершающимся по часовой стрелке.

Равноускоренное движение материальной точки по окружности.



Зависимость угловой скорости от времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t$$

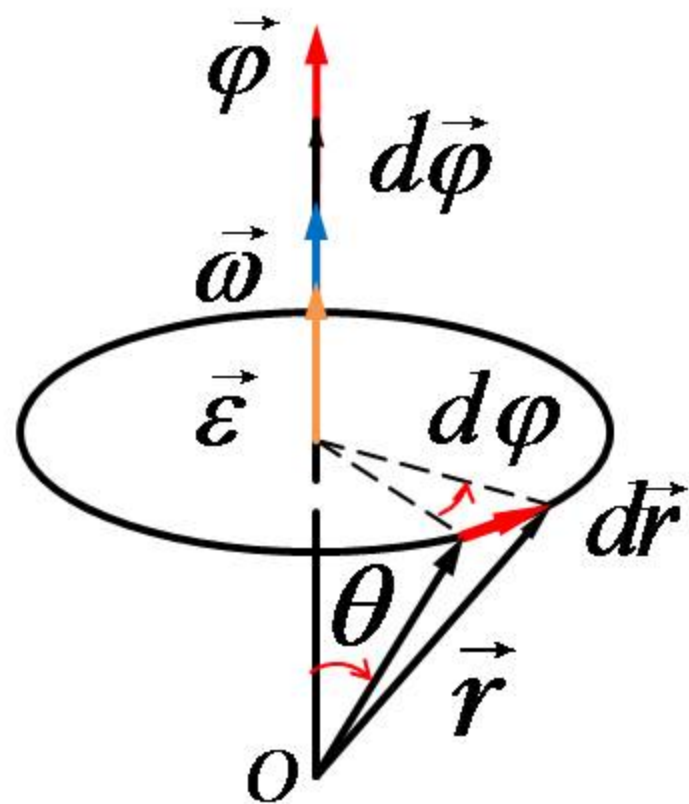
Зависимость приращения угла поворота от времени:

$$\Delta\vec{\phi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t$$

$$\Delta\varphi_z = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}$$

Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



Для точек твёрдого тела
начало отсчёта в общем
случае не совпадает с
центром окружности, по
которой движется точка

Угол поворота: $\vec{\varphi}$

Угловая скорость:

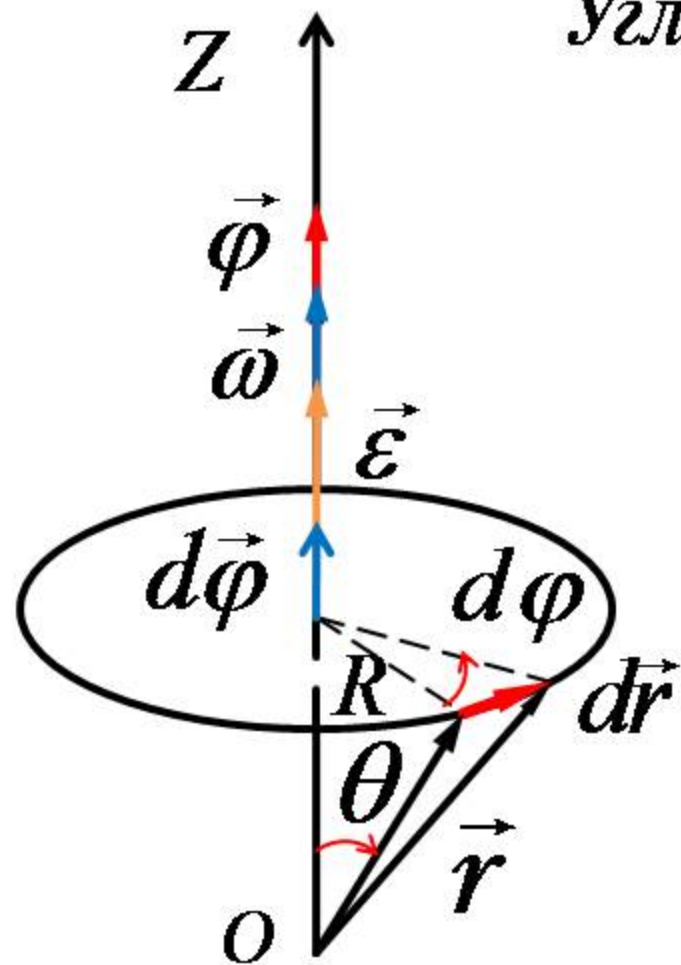
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$



Если:

$$|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

Если: $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$

Связь линейных и угловых величин.

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$$

При вращении
вокруг

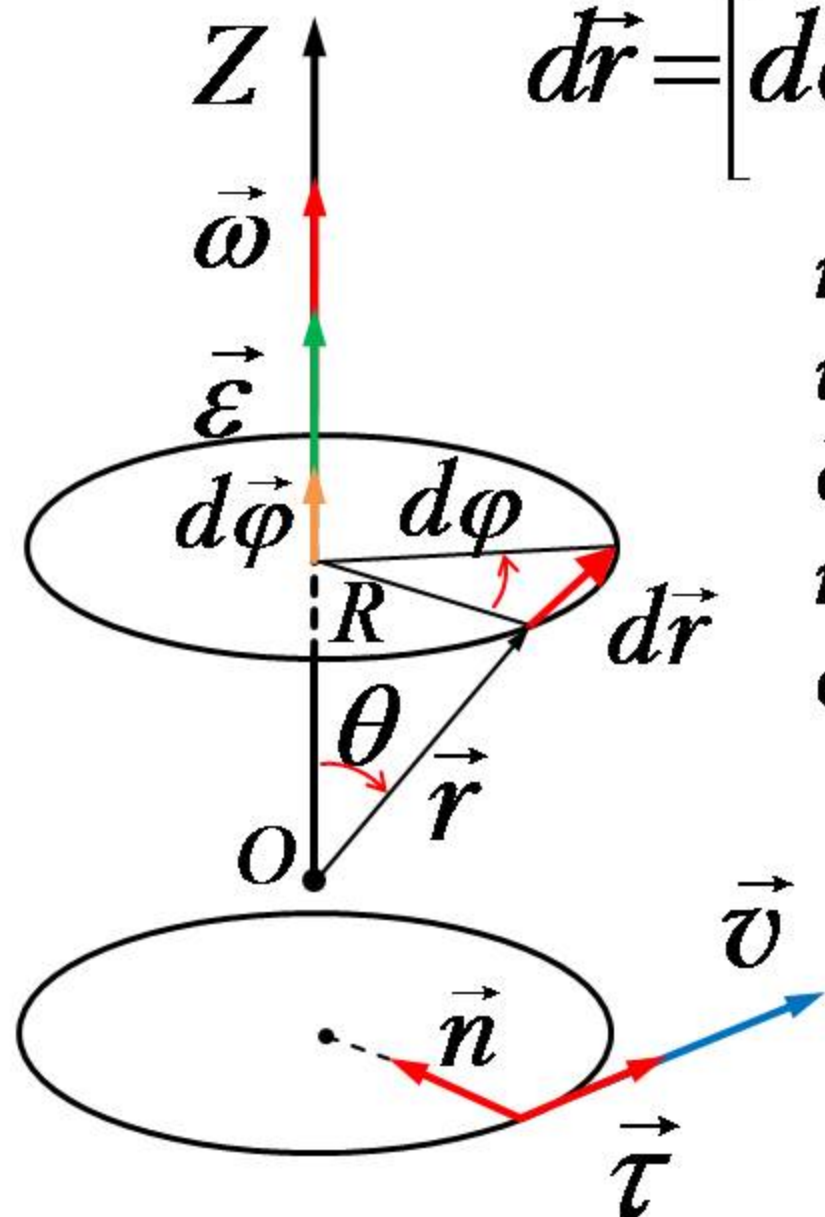
неподвижной оси R не
изменяется, поэтому
дифференцируем
только первый
сомножитель

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$R = r \sin \theta$$

$$v = \omega R$$

Подробное объяснение (доп. материал)
в конце лекции

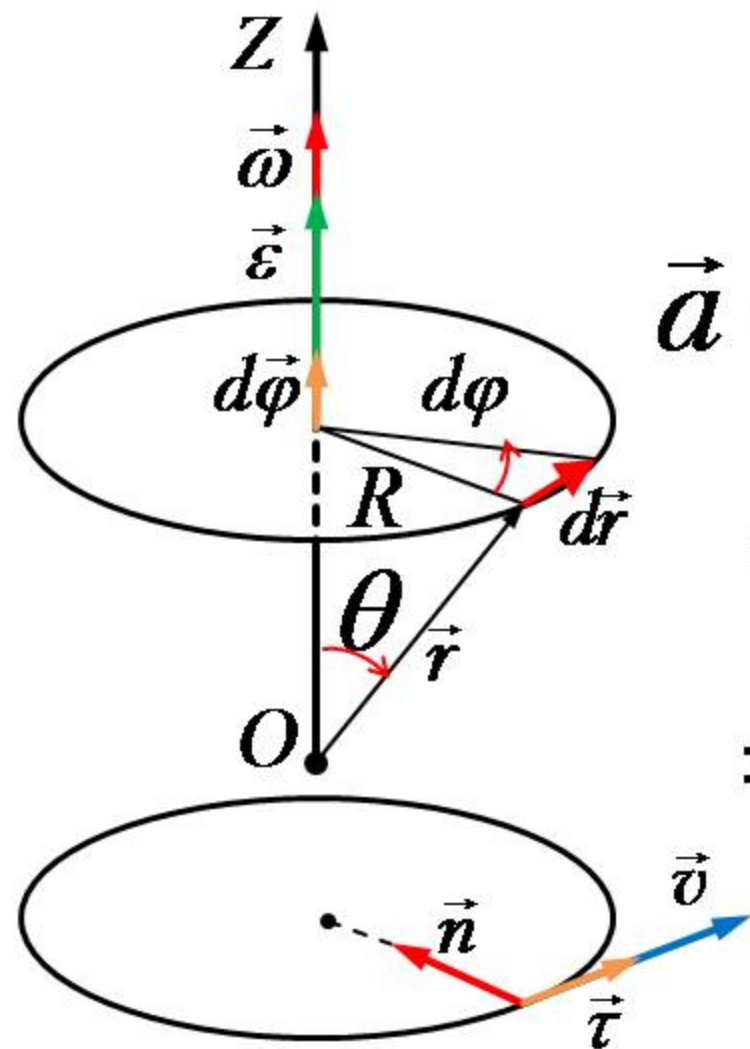


При рассмотрении таких векторов, как радиус-вектор, скорость или сила и.т.п., вопрос о выборе их направления не возникает – оно вытекает естественным образом из природы этих величин. Такие векторы называют полярными или истинными. Векторы, направление которых связано с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами.

При изменении условия, определяющего направление псевдовекторов, например, переходе от правой системы координат к левой псевдовекторы меняют направление на противоположное, а полярные остаются без изменений. Если оба вектора в векторном произведении полярные (или аксиальные), то векторное произведение - аксиальный вектор.

Произведение полярного вектора на аксиальный будет полярным вектором. Изменение условия, определяющего направление псевдовекторов на обратное приведёт в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед аксиальным вектором. В итоге направление векторного произведения не изменится.

Продифференцируем скорость по времени - найдём ускорение



$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

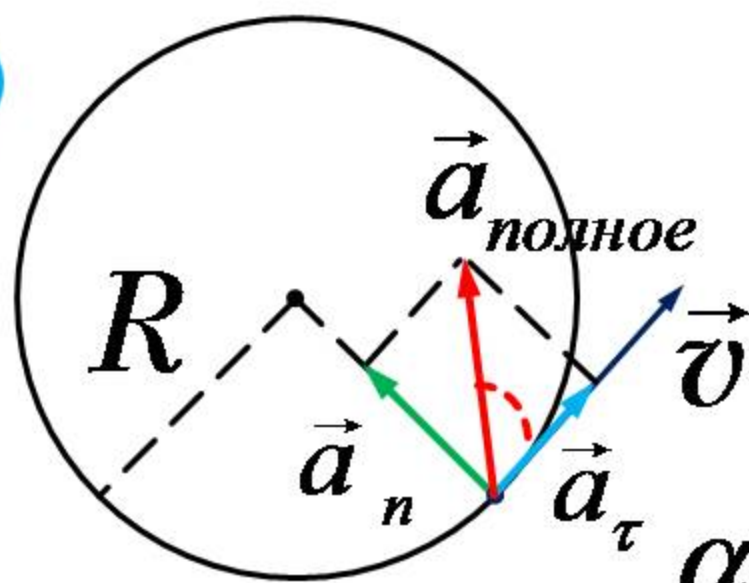
$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \\ &= \varepsilon_z \cdot R \cdot \vec{\tau} + \omega^2 \cdot R \cdot \vec{n} = \\ &= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \end{aligned}$$

Пример. Материальная точка начинает движение по окружности радиусом R с постоянным угловым ускорением ε . Вычислите угол между векторами её скорости и полного ускорения через t секунд после начала движения.

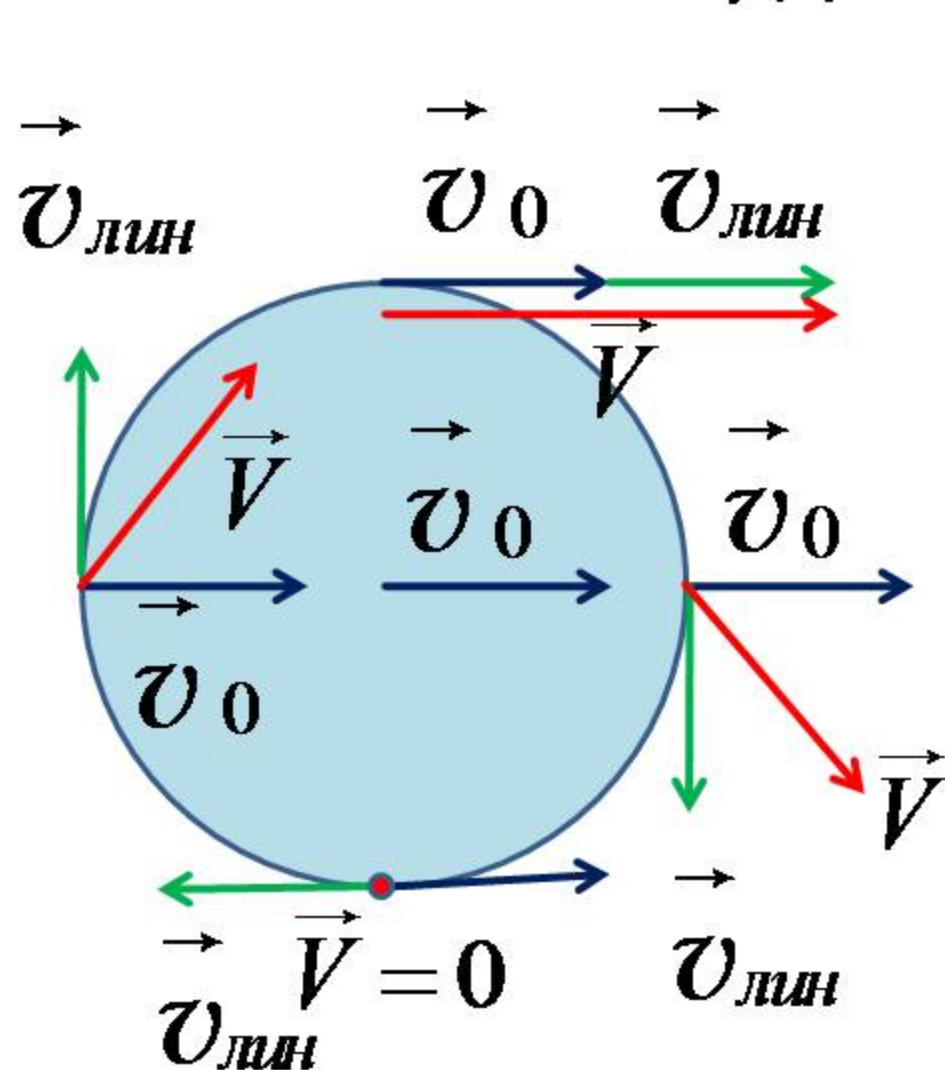
$$a_{\tau} = \varepsilon R$$

$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{a_{\tau}} = \operatorname{arctg} \varepsilon t^2$$



Плоское движение абсолютно твёрдого тела.



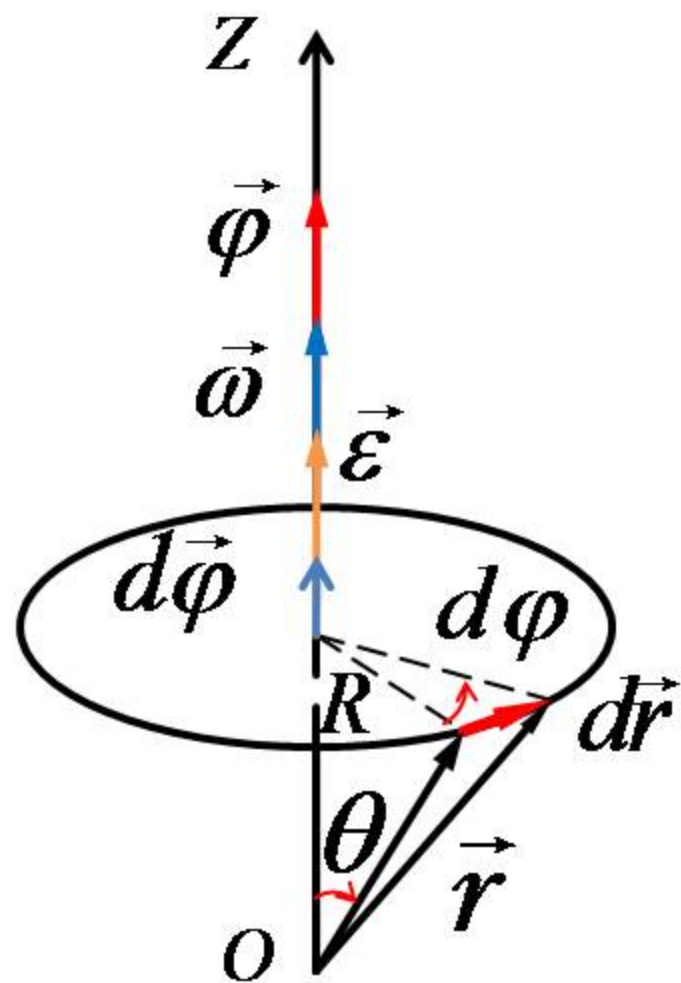
$\vec{v}_0$ - скорость центра
колеса
относительно
земли

$\vec{v}_{\text{лин}}$ - скорость точки
колеса
относительно
центра колеса

$\vec{V}$ - скорость точки
колеса относительно
земли

**Вращение с постоянным
угловым ускорением**

$$\vec{\varepsilon} = \text{const},$$

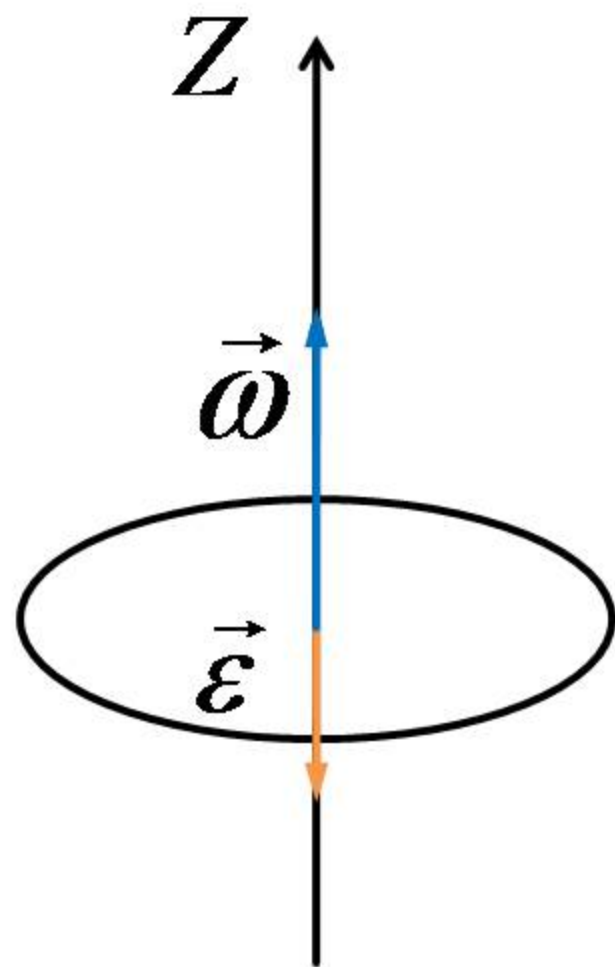


$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t,$$

$$\Delta \vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0 \cdot t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

Пример. Колесо вращалось с угловой скоростью ω_0 , стало тормозить и остановилось спустя $t_{\text{дв}}$ секунд. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов с момента начала торможения до остановки.





В проекции на ось Z

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon \cdot t$$

*В момент времени $t_{\text{дв}}$
угловая скорость колеса
становится равной
нулю.*

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t_{\text{дв}}} \quad (1)$$

$$\varphi_{\text{конечн}} = \omega_0 t_{\text{дв}} - \frac{\varepsilon t_{\text{дв}}^2}{2} \quad (2)$$

Из (1) и (2)

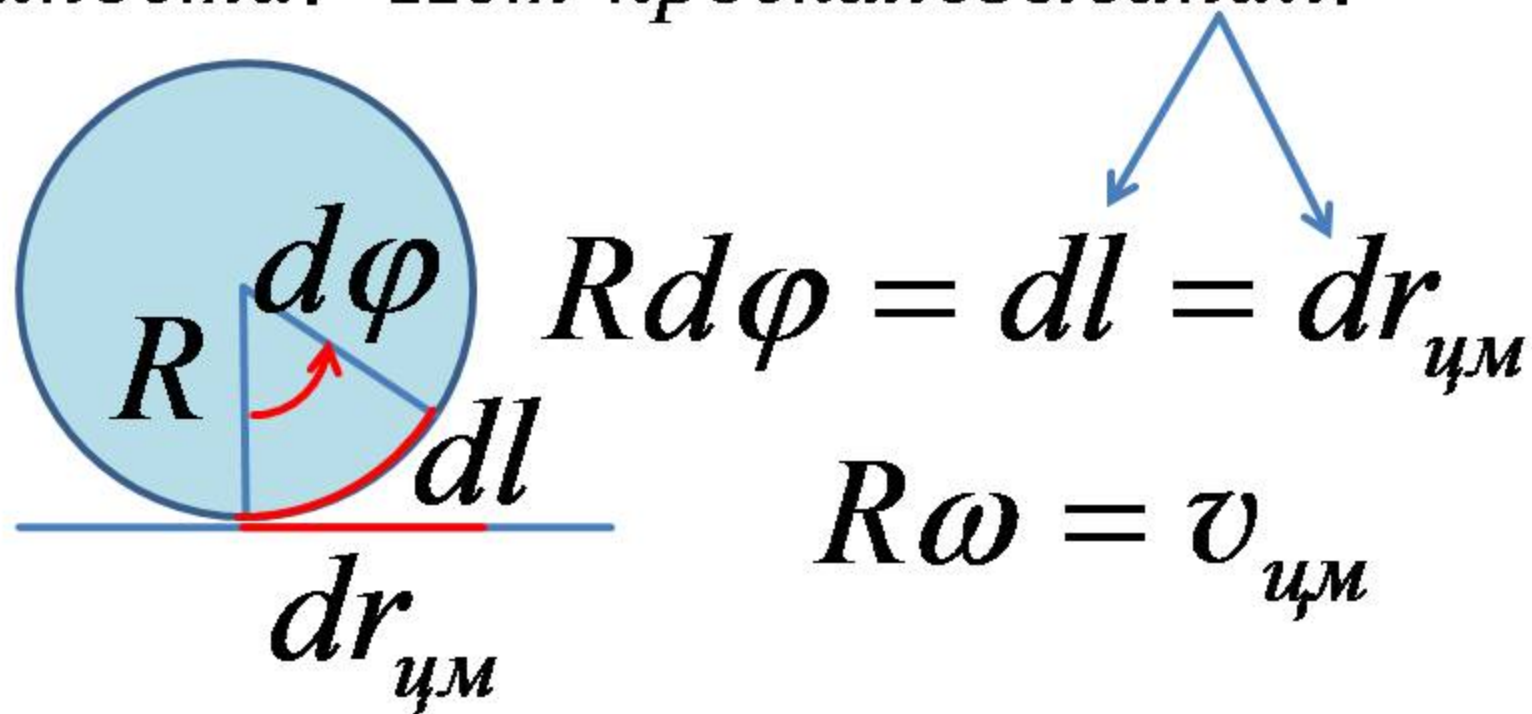
$$\varphi_{\text{конечн}} = \frac{\omega_0 t_{\text{дв}}}{2}$$

Число оборотов до остановки

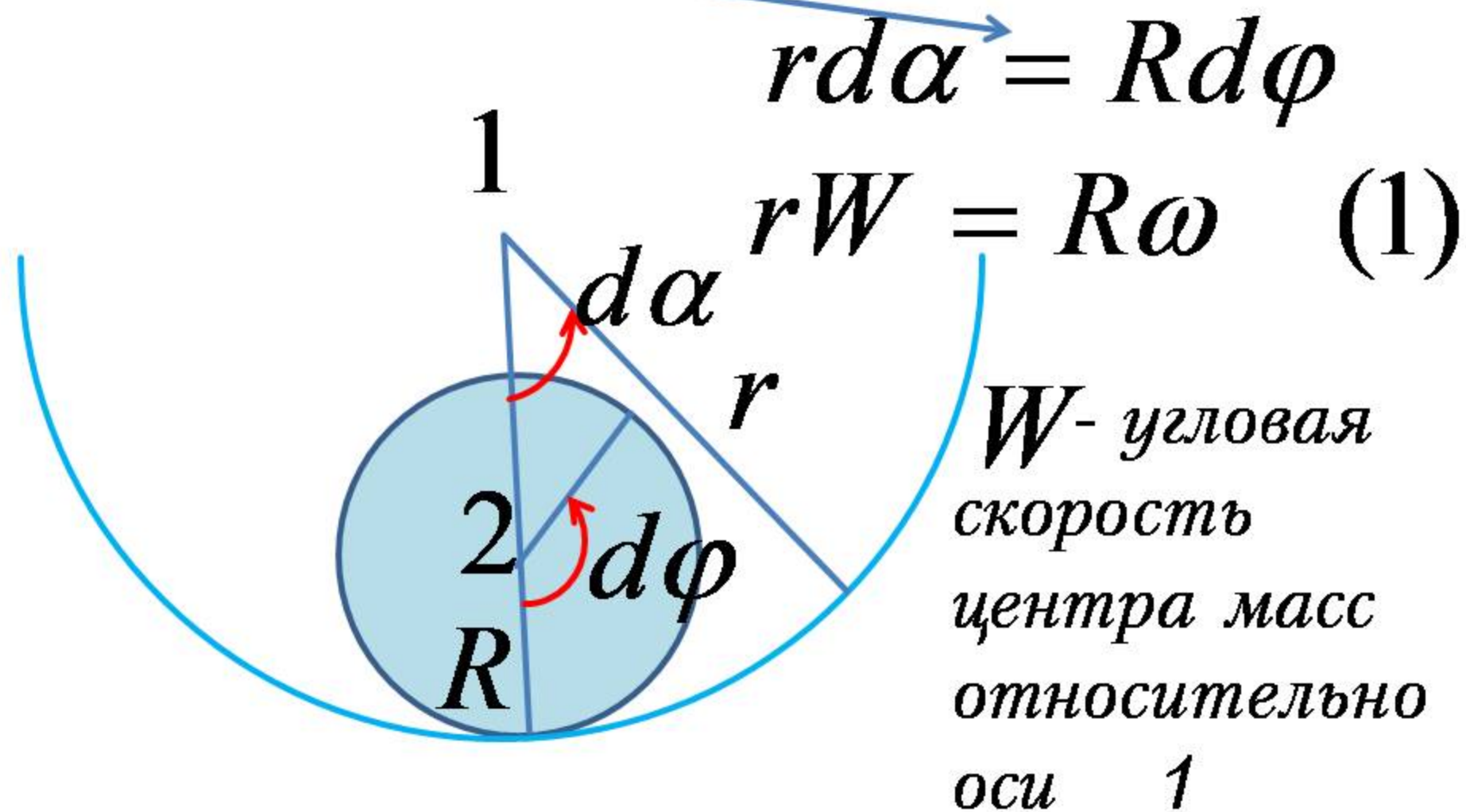
$$N = \frac{\varphi_{\text{конечн}}}{2\pi} = \frac{\omega_0 t_{\text{дв}}}{4\pi}$$

Пример. Найти связь между угловой скоростью вращения шарика вокруг своей оси ω и линейной скоростью движения его центра масс, если:

1. Шарик катится по ровной поверхности. Нет проскальзывания.



2. Шарик катится по вогнутой сферической поверхности радиуса R . Нет проскальзывания



Поскольку центр масс шарика движется по окружности радиусом $r-R$,

$$v_{цм} = W (r - R) \quad (2)$$

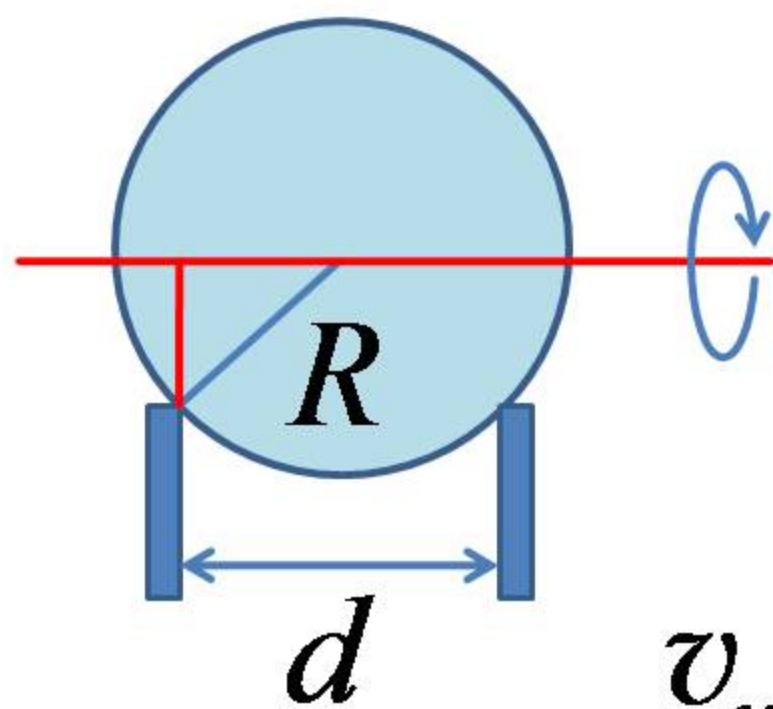
Из (1) и (2)

$$v_{цм} = \frac{R\omega}{r} (r - R)$$

3. Если шарик катится по горке радиусом r , то

$$v_{цм} = R\omega \left(1 + \frac{R}{r} \right)$$

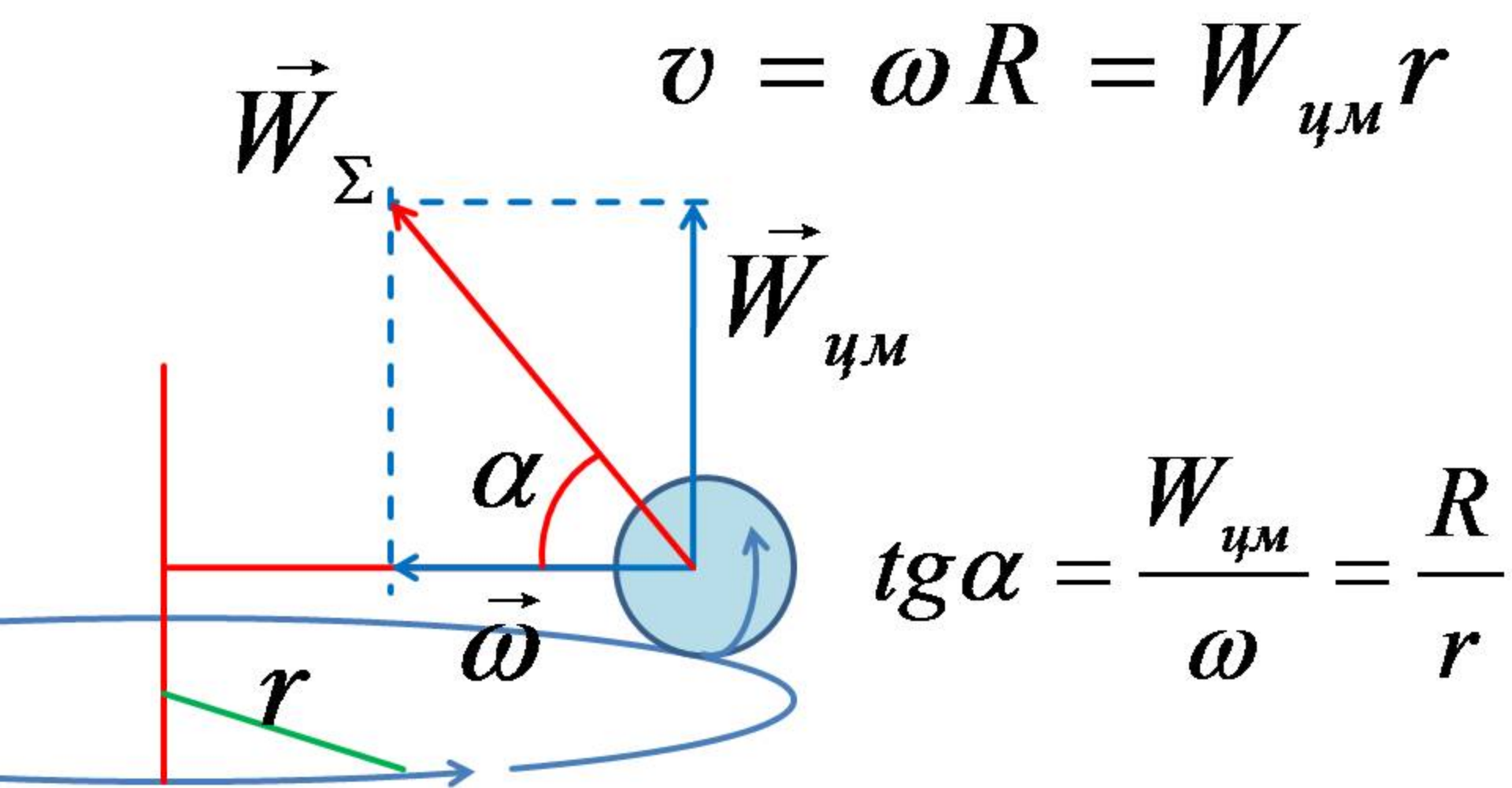
4. Если шарик катится по рельсам, расположенным на расстоянии d друг от друга



$$v_{цм} = \omega \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Сложение угловых скоростей.

Шарик радиусом R насажен на горизонтальную ось, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Шарик при этом катится по горизонтальной поверхности со скоростью U , описывая окружность радиусом r . Вычислите полную угловую скорость шарика и её наклон к горизонту.



$$W_{\Sigma} = v \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}$$