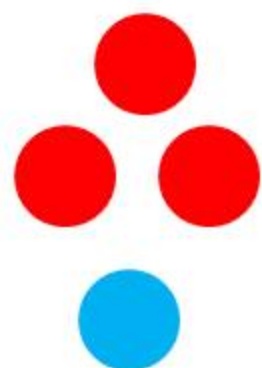


Практика 5.

© *С. А. Курашова*, 2015



-сложные задания

-очень сложные задания

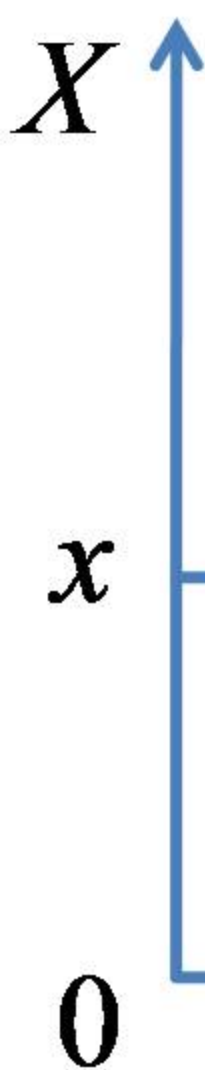
*-обязательные задания для всех .
Выполнение остальных заданий
приветствуется.*

*Ответы будут открыты через 2
недели. Пока у вас есть время
оформить решения, показать мне и
набрать баллы.*

Пример1 . Цепочка массой m и длиной l висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити она упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

Решение.

После пережигания нити все звенья цепочки начинают падать с ускорением g . Рассмотрим звено цепи массой dm , изначально находившееся на высоте x . Определим, какую скорость оно имеет в момент касания стола



Все звенья падают с ускорением g , не взаимодействуя друг с другом. Можно найти скорость звена по закону сохранения энергии

$$\frac{dm \cdot v^2}{2} = dm \cdot gx$$

Скорость звена , падающего с высоты x , в момент касания стола

$$v = \sqrt{2gx}$$

Звено передаст столу импульс

$$dp = v dm = \sqrt{2gx} \frac{m}{l} dx$$

Суммарный импульс, который цепочка передаст столу

$$p = \int_0^l \sqrt{2gx} \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \sqrt{2g} \frac{2l^{3/2}}{3} =$$
$$= \frac{2m}{3} \sqrt{2gl}$$

Пример. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F , сонаправленной с её скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью k кг / с

Найти скорость и ускорение тележки, если в момент начала отсчёта времени масса тележки с песком равна m_0 , а скорость равна нулю.

Решение. Запишем закон движения платформы.

$$(m - kt) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$a = \frac{F}{m - kt}$$

$$dv = \frac{F dt}{m - kt}$$

$$dv = \frac{F dt}{m_0 - kt}$$

Для того, чтобы решить уравнение, сделаем замену переменных:

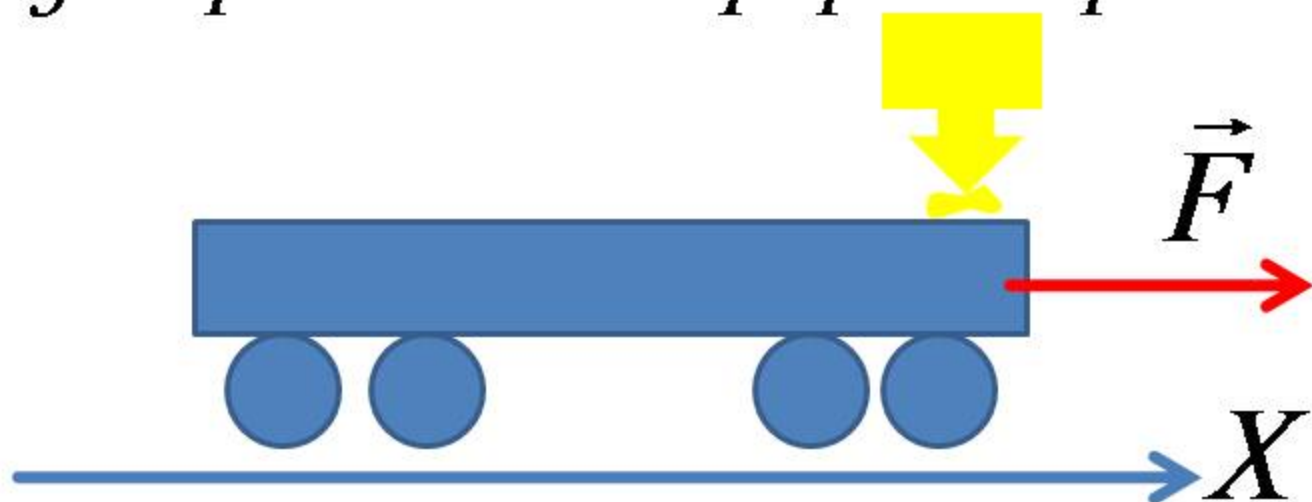
$$m_0 - kt = z \quad dt = -\frac{dz}{k} \quad dv = -\frac{F dz}{kz}$$

Учитываем начальные условия:

$$v = -\frac{F}{k} \ln(m_0 - kt) + \frac{F}{k} \ln m_0$$

$$v = \frac{F}{k} \ln \frac{m_0}{(m_0 - kt)}$$

Пример. Платформа массой m_0  начинает двигаться вправо под действием горизонтальной силы F . Из неподвижного бункера на неё высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна k кг / с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы при погрузке



Решение. Запишем закон движения платформы с учётом реактивной силы.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt}$$

Спроектируем на горизонтальную ось

$$m \frac{dv}{dt} = F - v \frac{dm}{dt}$$

$$m dv + v dm = F dt$$

$$d(mv) = F dt$$

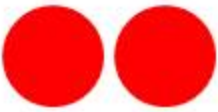
$$d(mv) = Fdt \quad p = Ft + 0$$

Подставим зависимость массы от времени – найдём скорость

$$v = \frac{Ft}{m_0 + kt}$$

Продифференцируем по времени- найдём ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_0 F}{(m_0 + kt)^2}$$

Пример. Кинетическая энергия 
частицы, движущейся по
окружности радиуса R , зависит от
пройденного пути по закону $E = \alpha S^2$
Где α - постоянная, S - пройденный
путь. Найти модуль силы,
действующей на частицу, в
зависимости от S .

Решение. Приращение кинетической
энергии происходит из-за того, что
действующая на частицу сила
совершает работу

$$dE = FdS \quad (1)$$

Вычислим дифференциал от заданного выражения для кинетической энергии

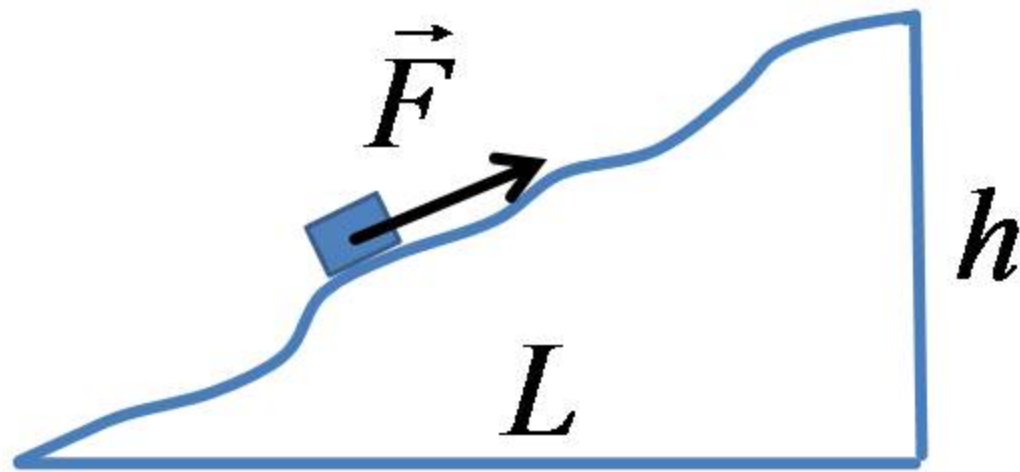
$$dE = 2\alpha SdS \quad (2)$$

Из (1) и (2)

$$F = 2\alpha S$$

Пример . Небольшое тело массой m медленно втащили на ледяную горку, действуя постоянной по модулю силой F , которая в каждой точке направлена по касательной к траектории.

Коэффициент трения равен μ . Найти работу этой силы, если высота горки равна h , а длина основания равна L .



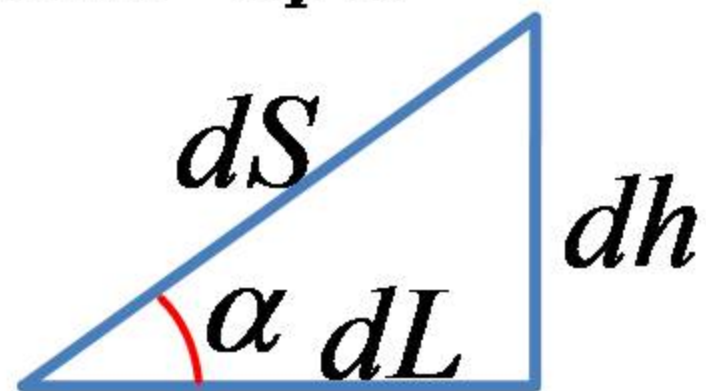
Для того, чтобы втолкнуть тело на горку, нужно совершить работу против силы трения и против силы тяжести.

Элементарная работа силы трения на отрезке пути dS

$$\begin{aligned} -F_{\text{тр}} dS &= -\mu m g \cos \alpha \cdot dS = \\ &= -\mu m g dL \end{aligned}$$

Здесь элементарное перемещение вдоль поверхности горки dS выражено через элементарное перемещение по горизонтали dL .

$$dS = dL / \cos \alpha$$



Работа силы трения за всё время движения

$$A_{\text{тр}} = - \int_S F_{\text{тр}} dS = - \mu m g L$$

Работа силы тяжести $A_{\text{тяж}} = - m g h$

Работа силы F

$$A = \mu m g L + m g h$$

Пример. Какую мощность развивают двигатели ракеты массой m , если она неподвижно висит над поверхностью земли? Скорость истечения газов из сопла ракеты равна u .

Решение: Реактивная сила компенсирует действие силы тяжести

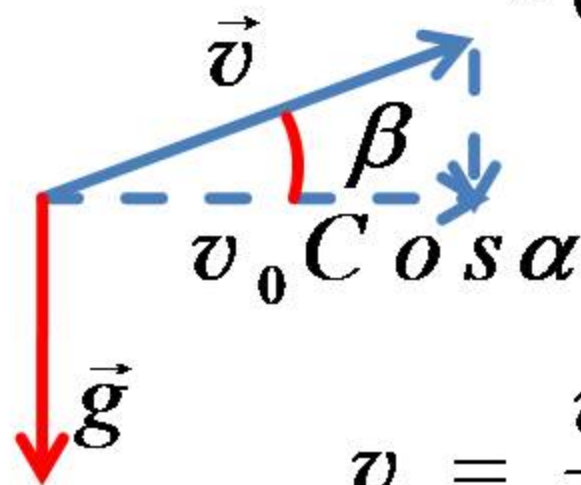
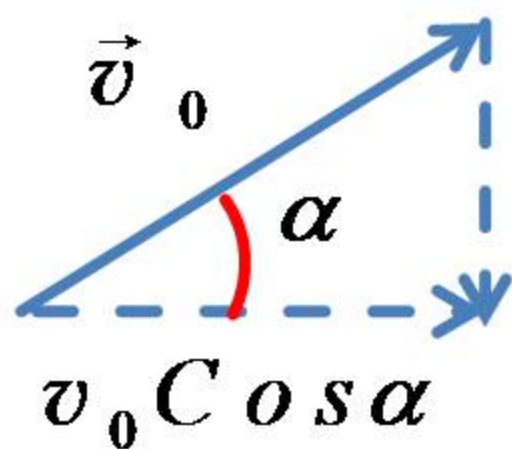
$$\frac{d m}{d t} u = m g$$

Мощность двигателей

$$N = \frac{d m}{d t} \frac{u^2}{2} = \frac{m g u}{2}$$

Пример. Тело массой m , брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти среднюю мощность силы тяжести, развиваемую за всё время движения и мгновенную мощность, как функцию времени.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_0 \sin \alpha - g t}{v_0 \cos \alpha} \quad (1)$$



$$v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (2)$$

$$N = m g \cdot v \cdot \cos(\pi / 2 + \beta)$$

$$N = -m g v \sin \beta = \quad \text{cm} (2)$$

$$= - \frac{m g v_0 \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} = \quad \text{cm} (1)$$

$$= m g (g t - v_0 \sin \alpha)$$

Пример . Человек массой m стоит на носу лодки массой M и длиной L . На какое расстояние S сместится лодка, если человек перейдёт на корму.

Решение.

По закону сохранения импульса при движении человека со скоростью v относительно лодки , лодка приобретёт относительно дна скорость V

$$0 = m(v - V) - MV$$
$$V = \frac{mv}{m + M}$$

Человек перейдёт на корму за время

$$t = \frac{L}{v}$$

Лодка за это время сместится на расстояние

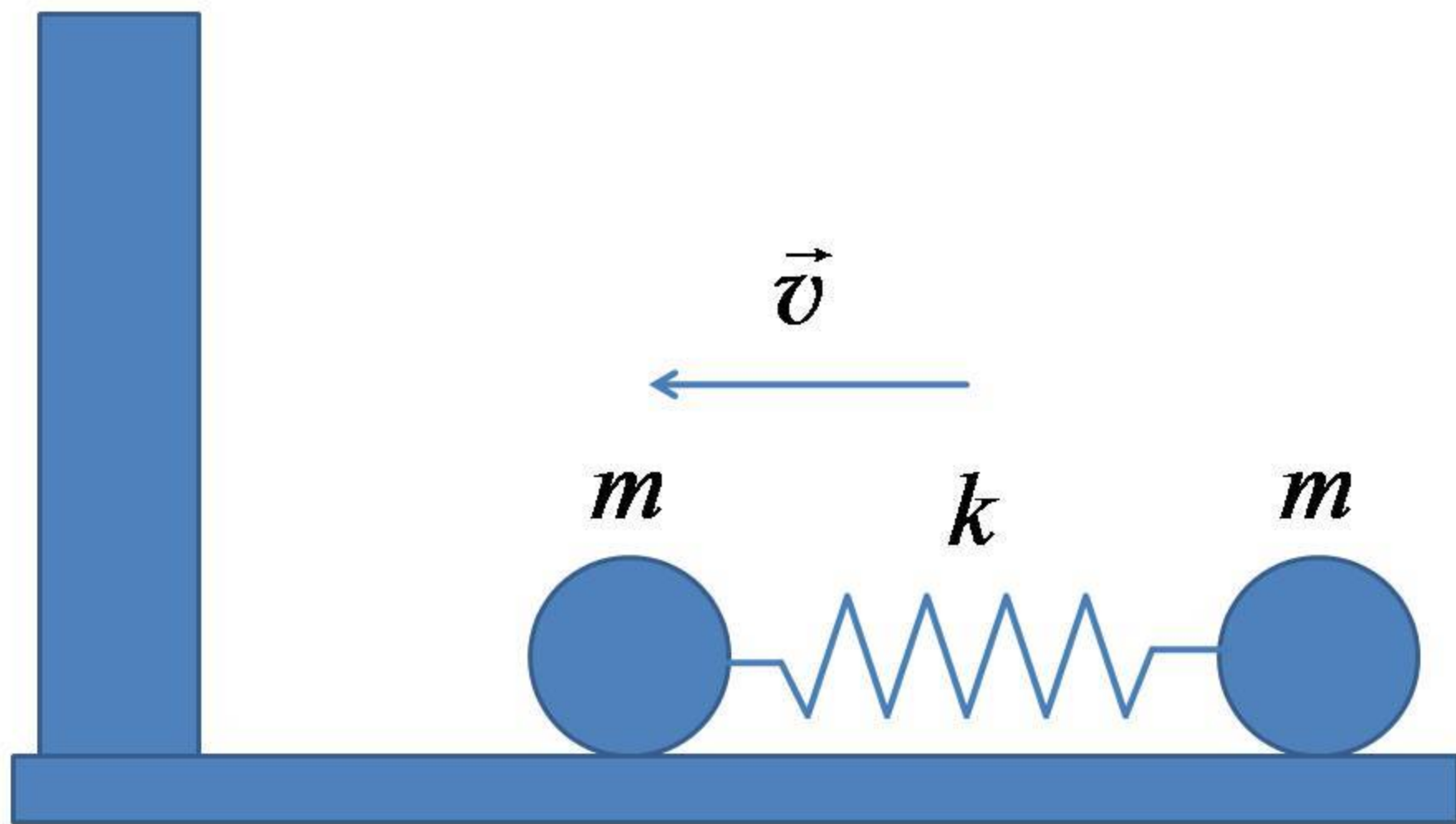
$$S = Vt = \frac{mL}{m + M}$$

***Система человек-лодка замкнута.
Её центр масс не может сместиться
относительно земли.***

Д/З Решите задачу этим методом.

Пример . Два одинаковых шарика массой m соединены пружиной жёсткостью k . Шарик скользит по идеально гладкой горизонтальной поверхности и один из них абсолютно упруго ударяется о стену. Сколько времени будет продолжаться колебание шариков. Опишите движение шариков после прекращения колебаний.





Решение . В момент удара левого шарика о стену скорость его меняется на противоположную. Центр масс системы останавливается. Поскольку после этого внешние силы на систему не действуют – начинается колебание шариков относительно неподвижного центра масс. Каждый шарик движется, как пружинный маятник на пружине жёсткостью $2k$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

***Спустя половину периода левый шарик
опять ударяется о стену и меняет
скорость на противоположную. В этот
момент скорости обоих шариков
направлены вправо, система начинает
двигаться вправо со скоростью v , без
колебаний.***

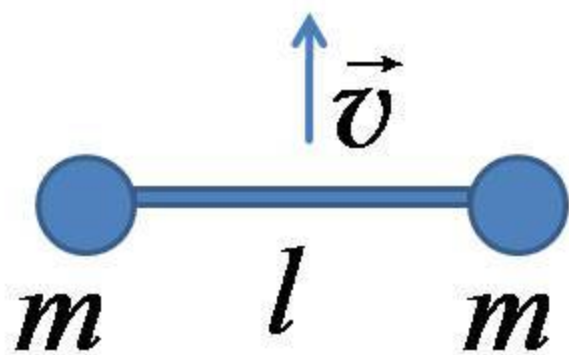
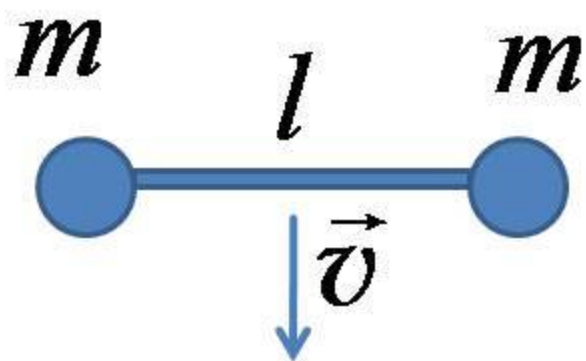
Д/З Допустим теперь, что левый шарик был тяжелее. В момент удара о стену он изменит скорость на противоположную - центр масс системы начнёт двигаться направо! Вычислите его скорость.



Шарики будут совершать колебания относительно центра масс. Не забудьте, что жёсткости соответствующих частей пружины - от шарика до центра масс надо вычислить по их длинам. Найдите период колебаний шариков, скорость центра масс и зависимость скорости шариков относительно центра масс от времени.

Пример .Две гантели состоят из шариков массой m и невесомых стержней длиной l . Гантели движутся навстречу друг другу со скоростью v (см. рис). Считая удар шариков мгновенным и абсолютно упругим

- 1. Охарактеризовать движение гантелей после столкновения**
- 2. Найти угловую скорость вращения гантелей**
- 3. Сколько времени будут вращаться гантели**
- 4. Как будут двигаться гантели после прекращения вращения**



В момент удара скорости столкнувшихся шариков меняются на противоположные. Центры масс каждой из гантелей останавливаются. Обе гантели начинают вращаться по часовой стрелке относительно оси, проходящей через их середину с угловой скоростью.

$$\omega = \frac{v}{l / 2}$$

Каждый шарик проходит половину окружности за время .

$$t = \frac{\pi l}{2v}$$

В этот момент уже другая пара шариков сталкивается и обменивается скоростями. Скорости обоих шариков правой гантели оказываются направленными вниз, а шариков левой- вверх.

Гантели прекращают вращение и движутся поступательно со скоростями , направленными, как до первого столкновения

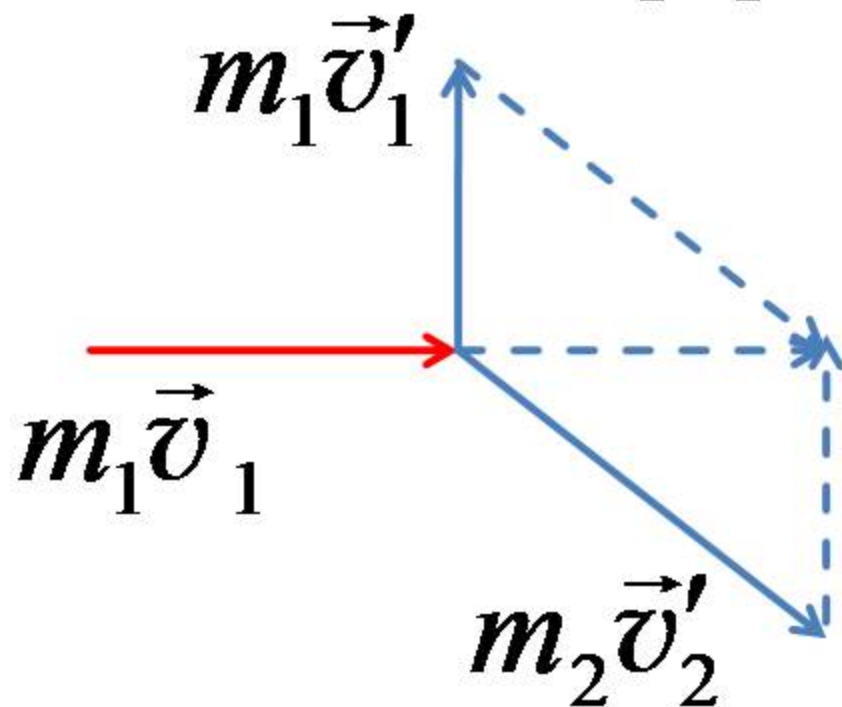
Пример. Частица массой m_1 испытала
Абсолютно упругое столкновение с
покоящейся частицей массой m_2
Какую часть своей первоначальной
энергии потеряла частица, если она
отскочила под прямым углом к своему
первоначальному направлению
движения.



Решение.

ЗСИ (см рис) $m_2^2 v_2'^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v_1'^2$

ЗСЭ $m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$



$$v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) = v_1'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

Относительные потери энергии 1 тела

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1^2} = \frac{2m_1}{m_2 + m_1}$$

Пример Д/З. Снаряд , выпущенный со скоростью $v_0 = 100 \text{ м / с}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту разорвался в верхней точке траектории на 2 одинаковых осколка.

Один осколок упал на землю прямо под точкой взрыва со скоростью $v_1 = 97 \text{ м / с}$
С какой скоростью и на каком расстоянии от первого осколка упал на землю второй осколок?



Пример Д/З. Пушка массой M начинает свободно скользить вниз по гладкой плоскости, составляющей угол с горизонтом. α Когда пушка прошла путь S , произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом p в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда, найдите продолжительность выстрела.

Ответ

$$\tau = (p \cos \alpha - M \sqrt{2gS \cdot \sin \alpha}) / Mg \sin \alpha$$