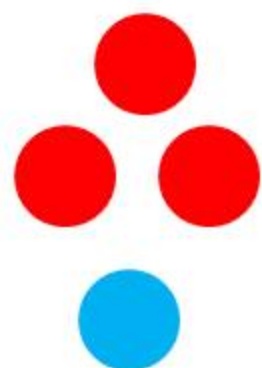


Практика 6

© С. А. Курашова, 2018



-сложные задания

-очень сложные задания

-обязательные задания для всех .

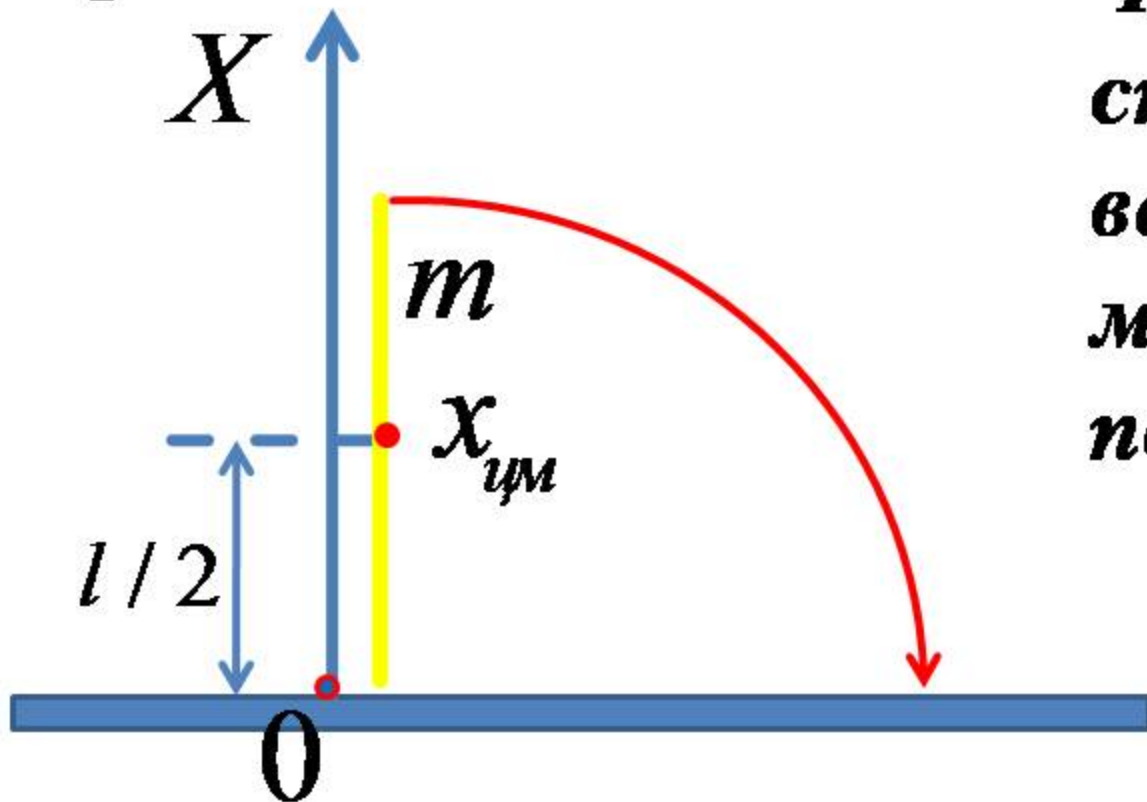
*Выполнение остальных заданий
приветствуется.*

*Ответы будут открыты через 2
недели. Пока у вас есть время
оформить решения, показать мне и
набрать баллы.*

**Пример1 . Однородный стержень
массой m и длиной l , поставленный
вертикально на горизонтальный
шероховатый пол, падает без
проскальзывания.**



**Найти
скорость
верхнего конца в
момент касания
пола.**



Решение

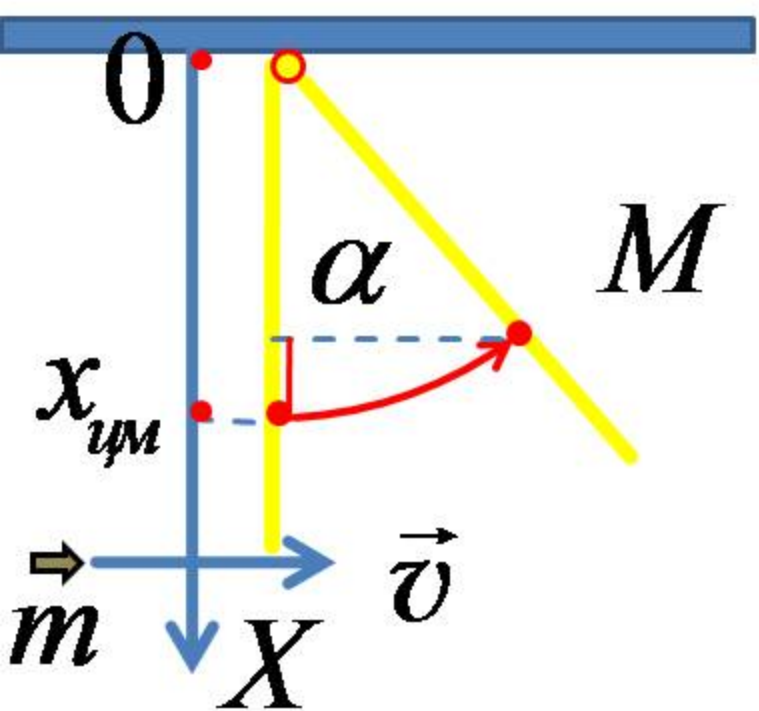
За время падения масс стержня опускается на $l/2$

Потенциальная энергия центра масс переходит в кинетическую энергию вращения стержня.

$$mg \frac{l}{2} = I \frac{\omega^2}{2} = \frac{ml}{3} \frac{\omega^2}{2}$$

$$v = \omega l = \sqrt{3gl}$$

Пример 2 .Однородный стержень массой M и длиной l шарнирно закреплён на потолке. Пуля массой m летит со скоростью $\vec{v}$, попадает в нижний конец стержня и застревает в нём.



Найти угловую скорость вращения стержня сразу после попадания пули. На какой угол повернётся стержень?

По закону сохранения момента импульса найдём угловую скорость вращения стержня сразу после попадания пули

$$mvl = \underbrace{\left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2 \right)}_{I_{\text{системы}}} \omega \quad (1)$$

Найдём координату центра масс системы стержень-пуля

$$x_{цм} (m + M) = M \frac{l}{2} + ml \quad (2)$$

Угол отклонения стержня найдём по закону сохранения энергии.

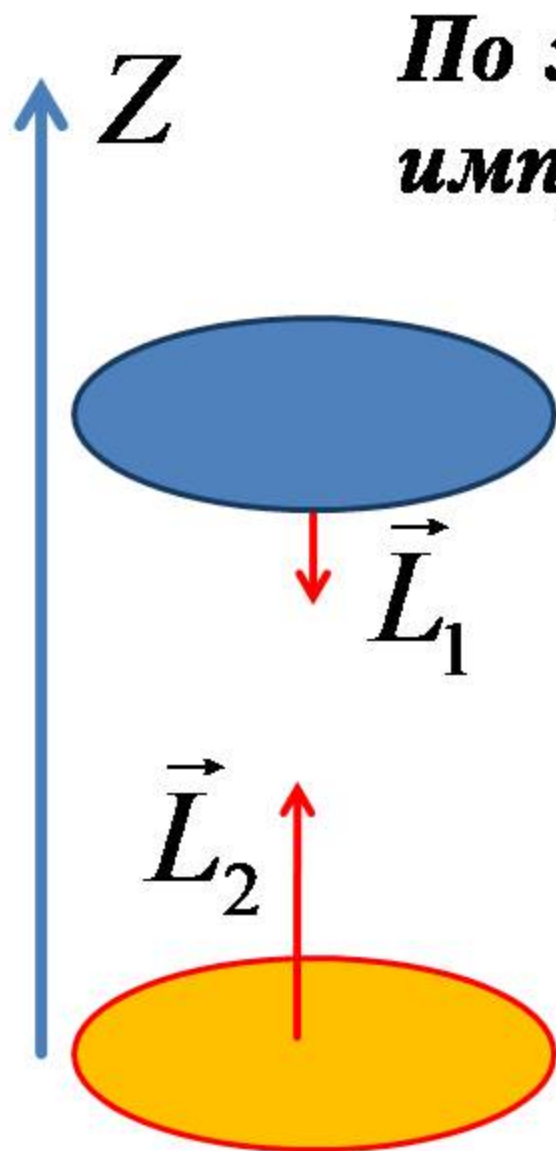
Кинетическая энергия системы переходит в потенциальную (используем высоту центра масс)

$$I \frac{\omega^2}{2} = (m + M) x_{цм} g (1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

Пример 3. Два горизонтальных диска вращаются вокруг вертикальной оси в противоположных направлениях.

Первый диск имеет массу m_1 , радиус R_1 и угловую скорость ω_1 второй диск — массу m_2 , радиус R_2 и угловую скорость ω_2 . Верхний диск падает на нижний. Из-за трения они начинают вращаться вместе. Найдите их общую угловую скорость.

По закону сохранения момента импульса

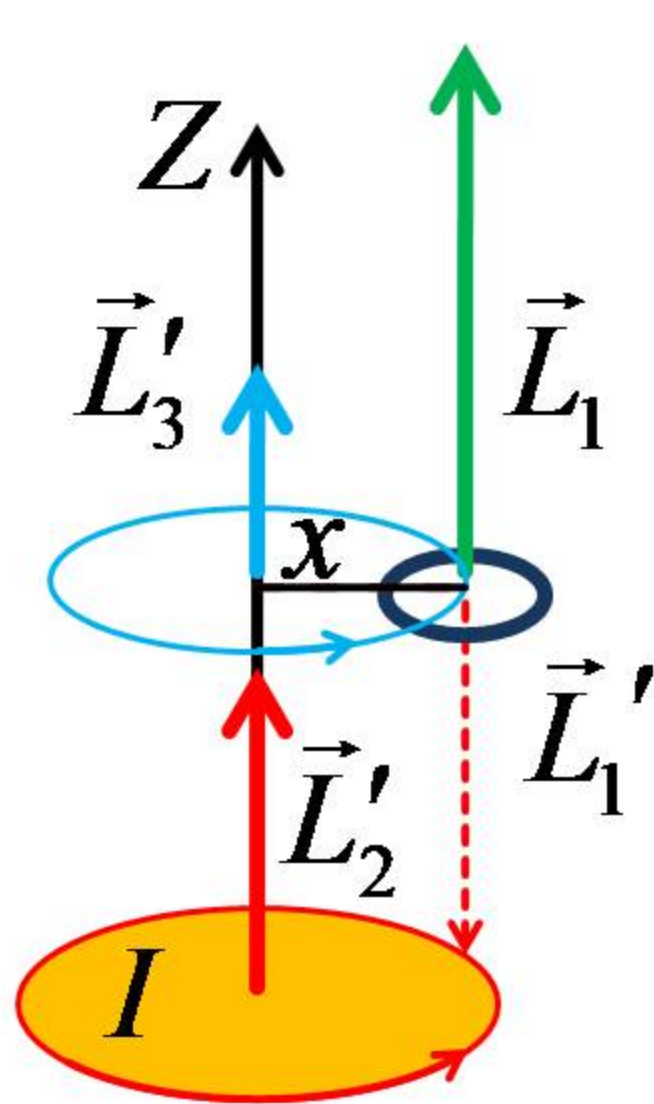


The diagram illustrates two disks, one blue (top) and one yellow (bottom), with angular momentum vectors $\vec{L}_1$ and $\vec{L}_2$ respectively. A vertical Z -axis is shown on the left.

$$-\frac{m_1 R_1^2}{2} \omega_1 + \frac{m_2 R_2^2}{2} \omega_2 =$$
$$= \left(\frac{m_1 R_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{2} \right) \omega_z$$

Вычислите сами, какое количество теплоты выделилось из-за трения

Пример 4. Человек стоит в центре неподвижной скамейки Жуковского и держит на вытянутых руках на расстоянии x от оси скамейки колесо массой m и радиусом r . Ось колеса вертикальна, колесо вращается с угловой скоростью ω_1 . Человек резко поворачивает ось колеса на 180° градусов. Угловая скорость колеса становится равной ω_2 . Вычислите угловую скорость скамейки. Момент инерции человека и скамейки I .



**По закону сохранения
момента импульса**

до поворота

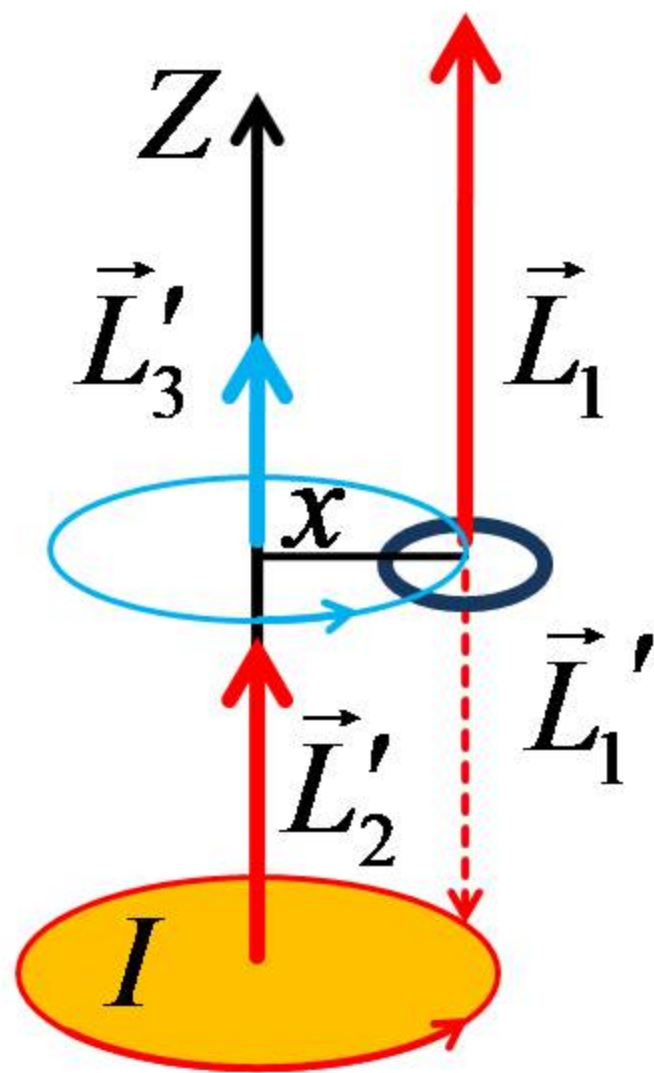
$$L_{1z} =$$

$$= L'_{1z} + L'_{2z} + L'_{3z}$$

после поворота

$$mr^2\omega_1 =$$

$$= \underbrace{-mr^2\omega_2}_{\text{red dashed}} + \underbrace{I\omega}_{\text{red solid}} + \underbrace{mx^2\omega}_{\text{blue solid}}$$

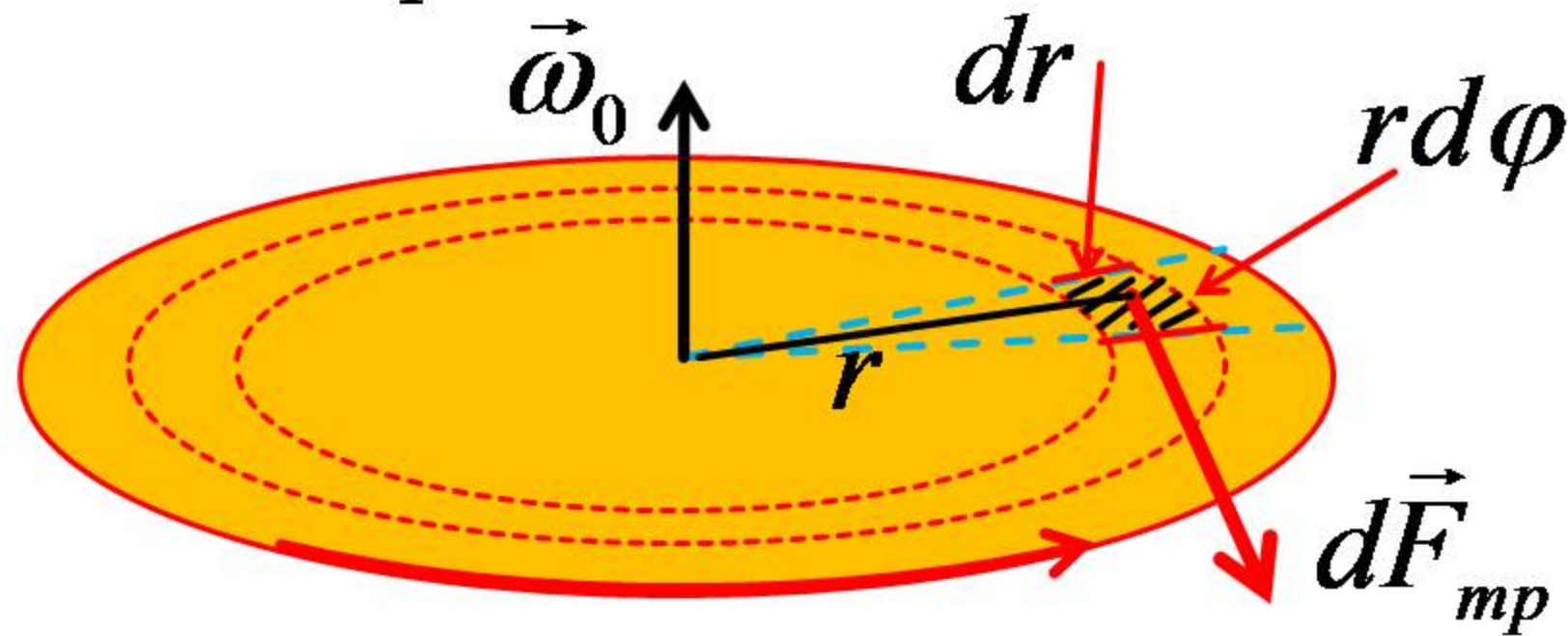


$$mr^2\omega_1 =$$

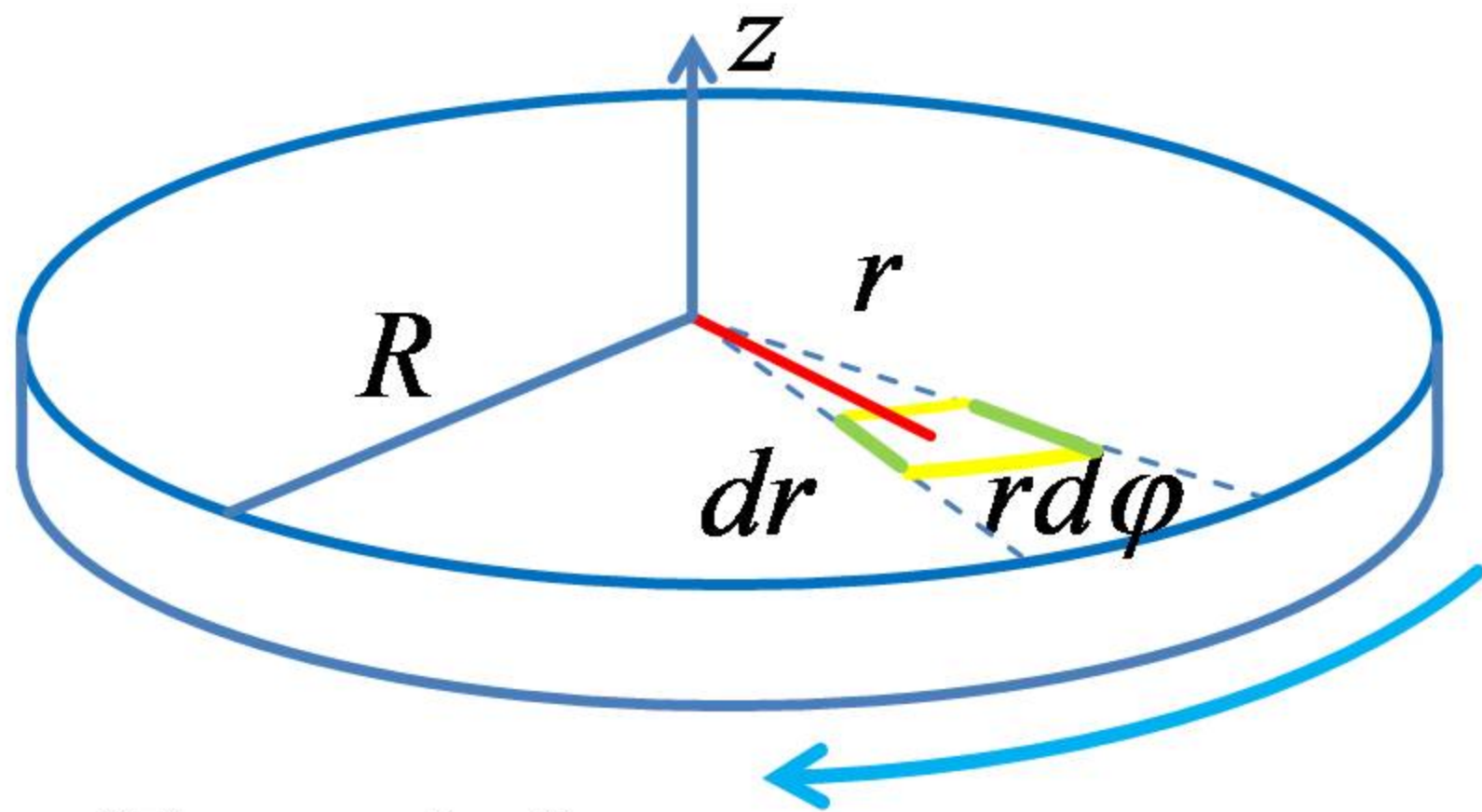
$$= -mr^2\omega_2 + I\omega + \underline{mx^2\omega}$$

Это слагаемое
учитывает то, что при
вращении скамейки
центр масс колеса
движется по
окружности радиусом x

Пример 5. Диск массой m и радиусом R вращающийся с угловой скоростью ω_0 кладут на шероховатую поверхность. Коэффициент трения равен μ . За какое время диск остановится?



Вычислите работу силы трения за всё время торможения.



$$dS = r dr d\phi$$

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r dr d\phi$$

**Вычислим момент силы трения.
Выделим элемент площадью**

$$dS = r dr d\varphi$$

Его масса

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r dr d\varphi$$

**На этот элемент будет действовать
сила трения**

$$dF = \mu \frac{mg}{\pi R^2} r dr d\varphi$$

$$dM = \mu \frac{mg}{\pi R^2} r^2 dr d\varphi$$

Её момент

**Момент силы трения, действующий на
весь диск,**

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu \frac{mg}{\pi R^2} r^2 dr d\varphi = \frac{2}{3} \mu mg R$$

Суммарная работа момента силы трения

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi$$

равна приращению кинетической энергии. Момент силы трения не зависит от угла поворота, поэтому нет необходимости интегрировать по углу. За всё время торможения диск повернулся на угол φ такой, что

$$M_z \cdot \varphi = -I \frac{\omega_0^2}{2}$$

$$-\frac{2}{3} m \mu R g \cdot \varphi = -\frac{m R^2}{2} \frac{\omega_0^2}{2}$$

***Угол поворота диска за всё время
торможения***

$$\varphi = \frac{3\omega_0^2 R}{8\mu g}$$

Можно воспользоваться законом динамики вращательного движения. Получится несколько дольше. Запишем закон динамики вращательного движения диска

$$I \varepsilon_z = M_z$$
$$\frac{mR^2}{2} \varepsilon = \frac{2}{3} \mu mgR$$

Угловое ускорение диска

$$\varepsilon = \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}$$

Вычислим время торможения диска

$$\omega_0 - \varepsilon t = 0 \qquad t = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}$$

За это время диск повернётся на угол

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{3\omega_0^2 R}{8\mu g}$$

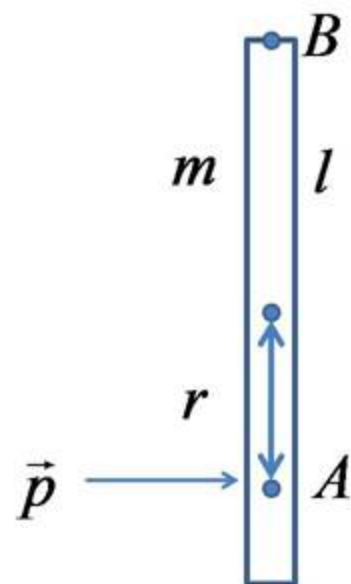
Пример. Тонкий стержень массой m и длиной l лежит на горизонтальной гладкой поверхности. За очень малый интервал времени он получает импульс p , приложенный к точке A , находящейся на расстоянии r от центра стержня. Найдите



- 1. Скорость центра масс стержня сразу после удара.**
- 2. Угловую скорость вращения стержня сразу после удара**

3. Найдите скорость точки B , расположенной на конце стержня сразу после удара.

4. Каким должно быть расстояние r , чтобы сразу после удара точка B оставалась неподвижной?



Решение.

1. По закону сохранения импульса

$p = m v_c$,
где v_c - скорость центра масс сразу
после удара. $v_c = \frac{p}{m}$

**2. По закону сохранения момента
импульса стержень будет вращаться
вокруг вертикальной оси, проходящей
через центр масс с угловой скоростью ω**

$$p r = \frac{m l^2}{12} \omega$$

3. Скорость точки В сразу после удара.

$$\begin{aligned} v_B &= -\omega \frac{l}{2} + v_c = \\ &= -\frac{12pr}{ml^2} \frac{l}{2} + \frac{p}{m} = \frac{p}{m} \left(1 - 6 \frac{r}{l} \right) \end{aligned}$$

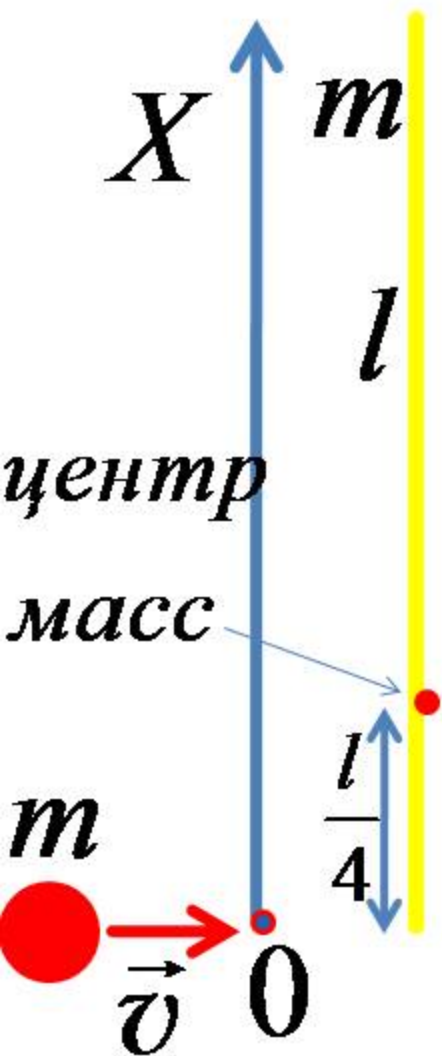
Для того, чтобы точка В сразу после удара осталась неподвижной, расстояние r должно быть равно $\frac{l}{6}$.

Пример 6 . Тонкий стержень массой m и длиной l лежит на горизонтальной. Абсолютно гладкой поверхности.  Маленький кусок замазки массой m (такой же) летит со скоростью v перпендикулярно к нему и попадает в конец стержня. Вычислите

- 1. Скорость центра масс до и после удара**
- 2. Чему равен момент импульса стержня до и после удара**

3. Чему равна угловая скорость вращения стержня относительно центра масс после прилипания замазки

4. На сколько уменьшится кинетическая энергия системы при столкновении.



$$x_{\text{цм}} = \frac{ml / 2 + 0}{m + m} = \frac{l}{4}$$

Система замкнута, скорость центра масс до удара и после не может измениться. После удара система будет двигаться поступательно так, чтобы скорость центра масс не изменилась и вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс.

Скорость центра масс

$$v_{\text{цм}} = \frac{mv + 0}{m + m} = \frac{v}{2}$$

**Начальный момент импульса системы-
момент импульса кусочка замазки
относительно центра масс.**

$$L = \frac{mvl}{4}$$

После попадания замазки момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно к стержню,

$$I = \left(\frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right) + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 = \frac{5}{24} ml^2$$

По закону сохранения момента импульса

$$L = L' \qquad \frac{m\omega l}{4} = \frac{5}{24} ml^2 \omega$$

Угловая скорость вращения стержня

$$\omega = \frac{6v}{5l}$$

Кинетическая энергия системы после удара складывается из энергии поступательного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через центр масс

$$E = \frac{2m}{2} (v_{цм})^2 + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E = \frac{2m}{2} \left(\frac{v}{2} \right)^2 + \frac{5}{24} ml^2 \frac{36v^2}{25l^2} \frac{1}{2} =$$

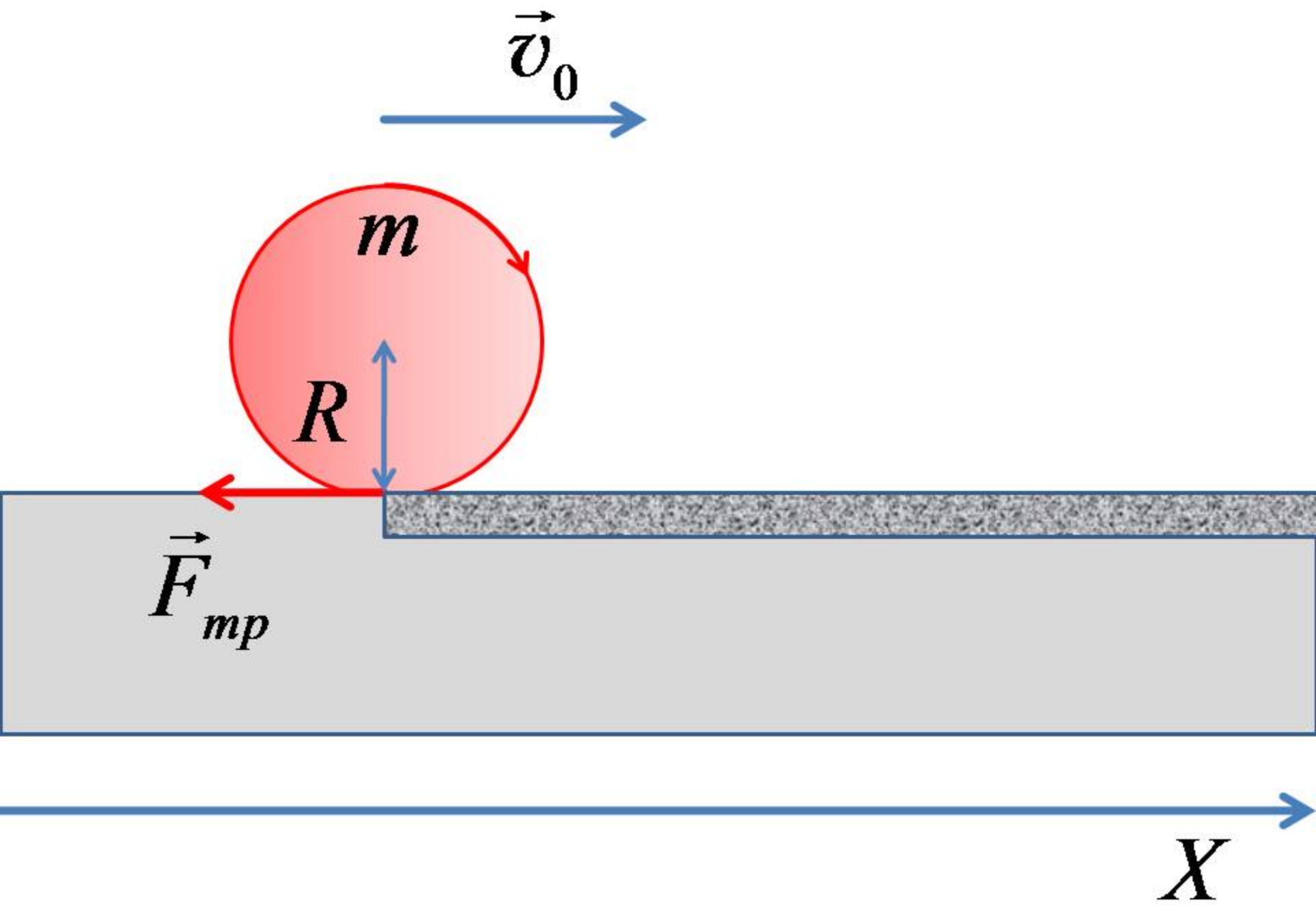
$$= \frac{2}{5} mv^2$$

Выделившееся при ударе количество теплоты равно убыли кинетической энергии системы

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{2}{5} mv^2 = \frac{1}{10} mv^2$$

Пример 7 . Шар массой m и радиусом R скользит по гладкой, горизонтальной поверхности и наезжает на шероховатую полосу, где коэффициент трения равен μ . Спустя какой промежуток времени после этого шар будет катиться без проскальзывания? Какую работу совершит сила трения скольжения за всё время движения шара?





Решение. Когда шар наезжает на шероховатую полосу, на него начинает действовать сила трения скольжения. Эта сила тормозит центр масс шара

$$\begin{aligned} ma_x &= -\mu mg \\ v_{цм} &= v_0 - \mu gt \quad (1) \end{aligned}$$

и раскручивает шар $I\varepsilon = M_{\text{трения}}$

$$\frac{2}{5}mR^2\varepsilon = \mu mgR \quad (2)$$

Из (2) определим угловое ускорение точек шара

$$\varepsilon = \frac{5\mu g}{2R}$$

Угловая скорость этих точек линейно увеличивается со временем

Линейная скорость

$$\omega = \varepsilon t = \frac{5\mu g}{2R} t \quad (3)$$

вращения точек поверхности шара относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс,

$$v_{\text{лин}} = \omega R = \frac{5\mu g}{2} t \quad (4)$$

Таким образом, в начале движения по шероховатой поверхности шар проскальзывает из-за того, что скорость поступательного движения его центра масс (1) превосходит линейную скорость вращения точек его поверхности относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс(4).

$$v_0 - \mu g t > \frac{5 \mu g}{2} t$$

Проскальзывание прекратится в момент времени

$$t = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}, \quad (5)$$

когда эти скорости сравняются.

Скорость центра масс шара в этот момент определим из (1) и (5):

$$v = \frac{5}{7} v_0 \quad (6)$$

Работа силы трения скольжения равна приращению кинетической энергии шара

$$\begin{aligned} A &= E_k - E_{k0} = \quad \text{см(6)} \\ &= \frac{7}{10}mv^2 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{1}{7}mv_0^2 \end{aligned}$$