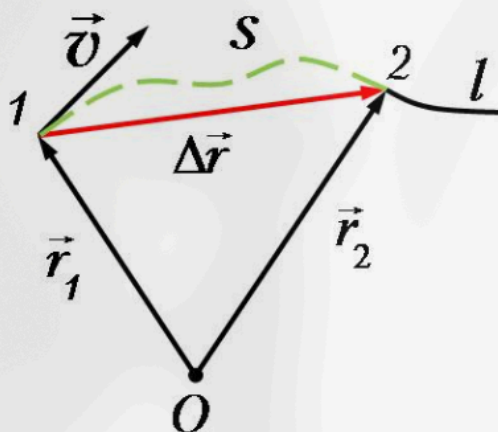


Механика. Практика.

Практика 1.

Основные понятия кинематики.



Пусть за интервал времени от t_1 до t_2 материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2.

O – начало отсчёта.

$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

l – траектория материальной точки.

S – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 .

$\vec{S} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 .

Перемещением материальной точки за интервал времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ называется вектор, проведенный из ее положения в момент времени t_1 в ее положение в момент времени t_2 .

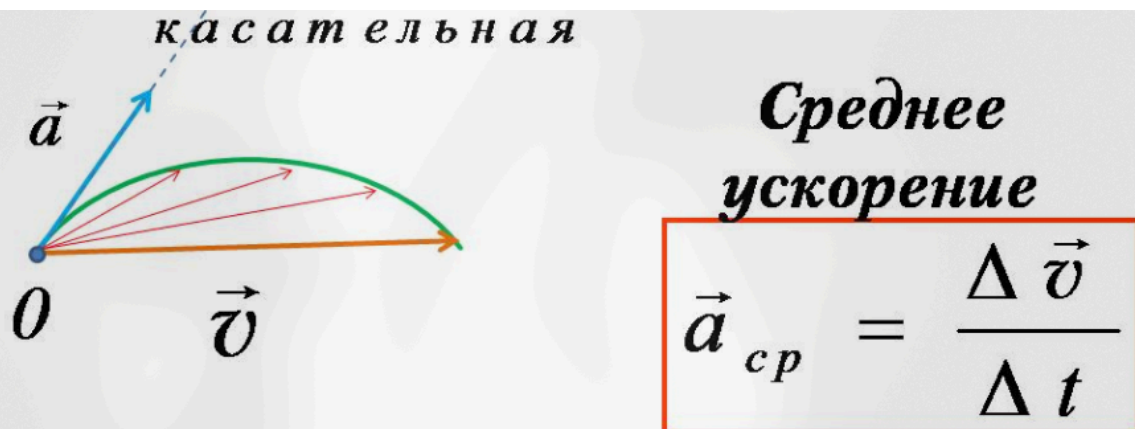
Траекторией материальной точки называется линия, которую она описывает при своем движении.

Длиной пути S называется сумма длин всех участков траектории, пройденных материальной точкой за рассматриваемый промежуток времени.

Скорость и ускорение (повторение).



Мгновенная скорость. Направлена по касательной к траектории

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$


Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Вектор скорости точки в каждый момент времени направлен по касательной к ее пространственной траектории. Для получения траектории в пространстве скоростей необходимо все векторы скорости, относящиеся к выбранному моменту времени, отложить от одной точки-начала отсчета в пространстве скоростей.

Конец, изменяющегося во времени вектора скорости, вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называющуюся годографом вектора скорости. (Гамильтон 1846г.) Вектор мгновенного ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости.

Равномерное прямолинейное движение. Закон сложения скоростей.

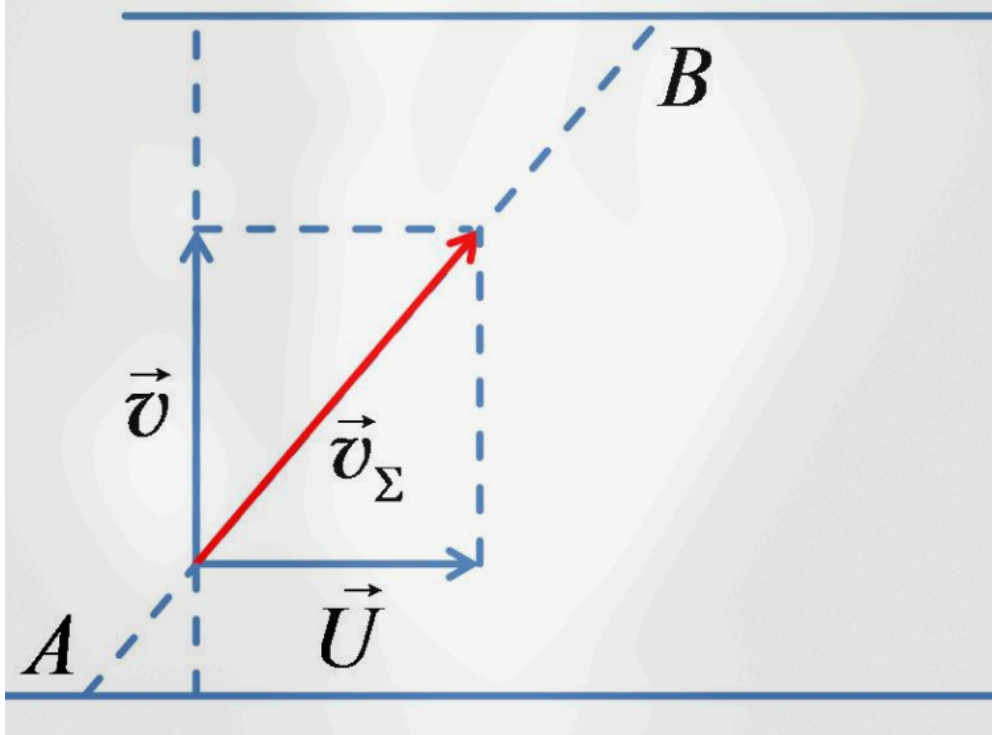
Переправа через реку

Река имеет скорость течения $\vec{U}$ относительно берега в каждой точке, независимо от расстояния до берега.

$\vec{v}$ - собственная скорость лодки (скорость лодки относительно воды)

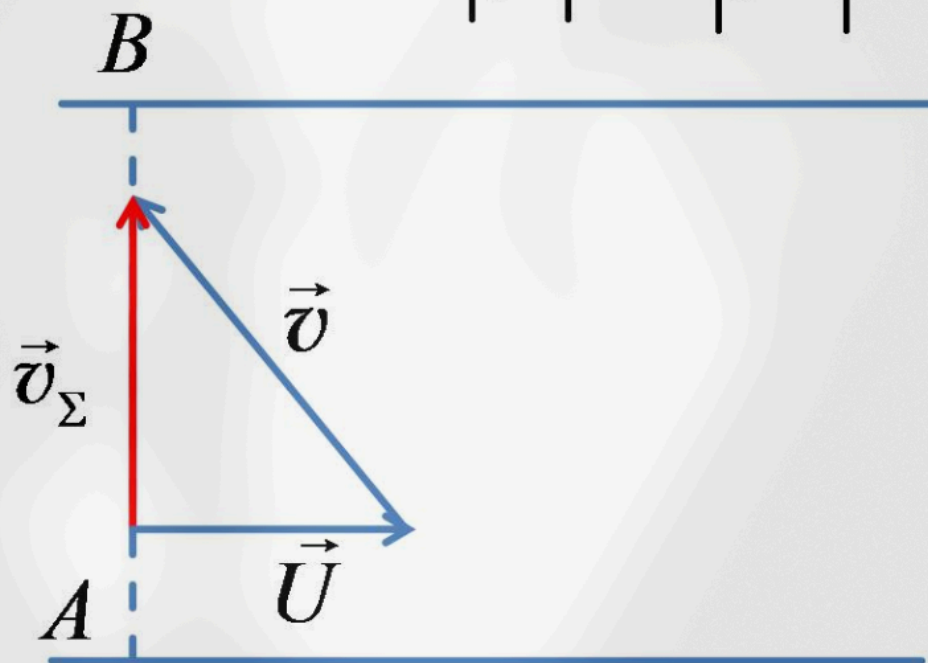
$\vec{v}_\Sigma$ - скорость лодки относительно берега.

1. Переправа за минимальное время.

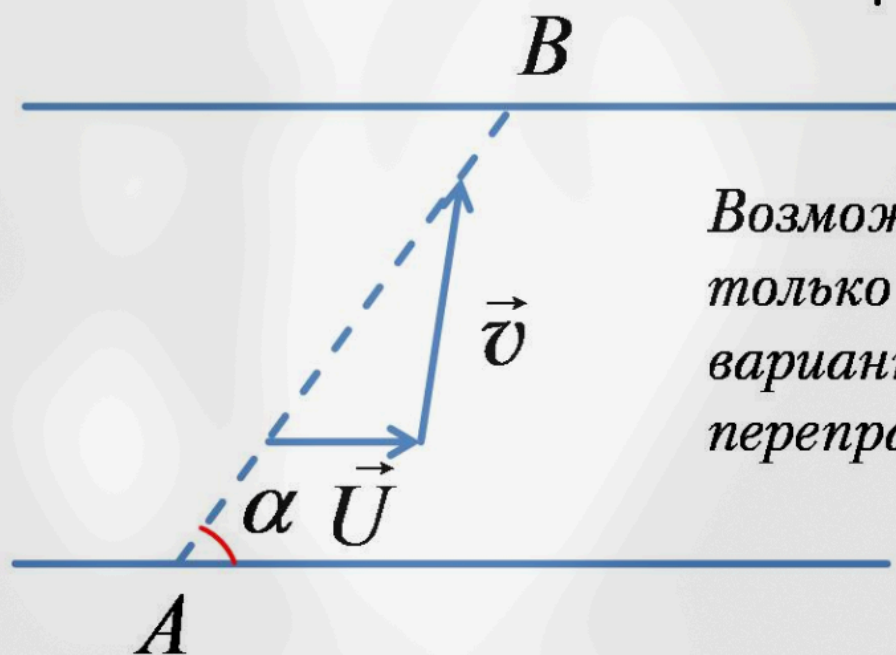


2. Переправа по наикратчайшему пути,
если

$$|\vec{v}| > |\vec{U}|$$



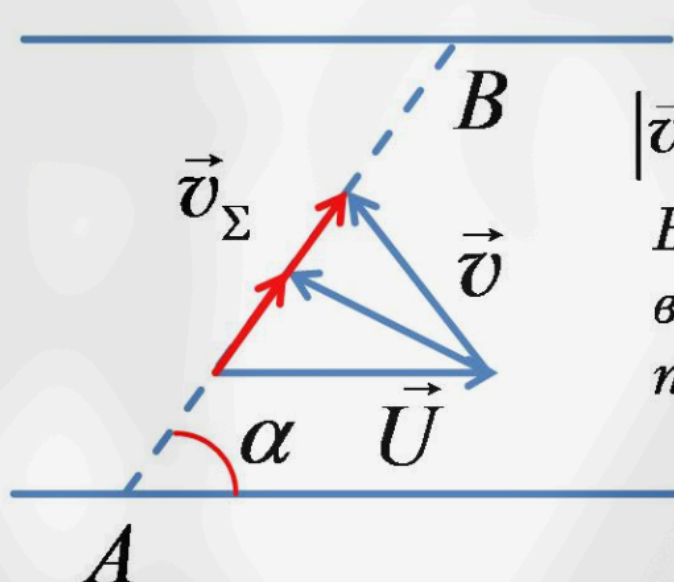
3. Переправа под заданным углом к
линии берега. Если $|\vec{v}| > |\vec{U}|$



Возможен
только один
вариант
переправы

Переправа под заданным углом к линии берега.

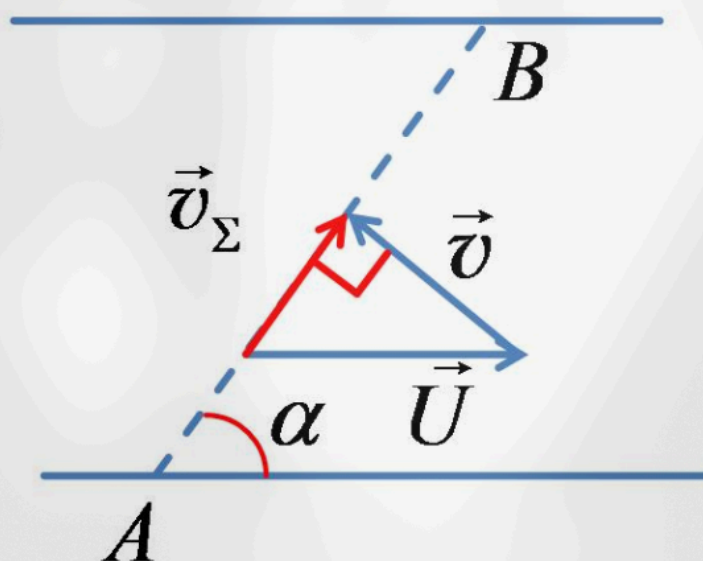
$$|\vec{U}| > |\vec{v}|$$



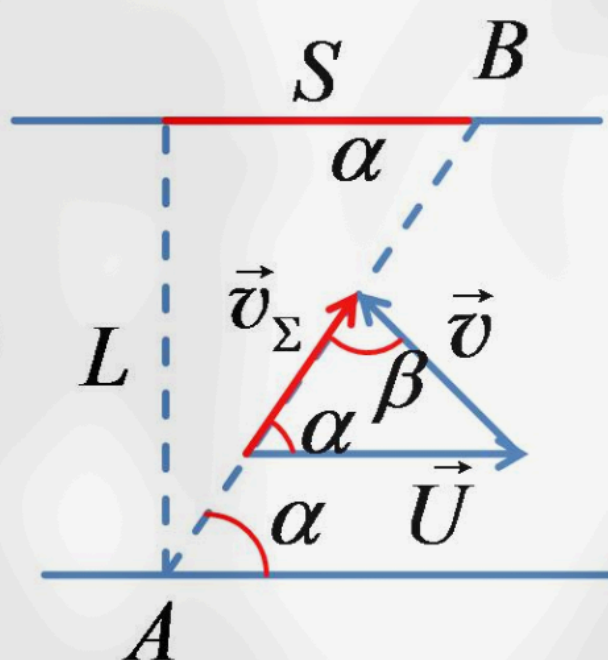
Если
 $|\vec{v}| > |\vec{U}| \sin \alpha$
 Возможны два
 варианта
 переправы

Если $|\vec{v}| = |\vec{U}| \sin \alpha$ -только один.

При $|\vec{v}| < |\vec{U}| \sin \alpha$ переправа под углом α к линии берега невозможна.



4. Минимальный снос. Выясним, как надо переправляться, чтобы лодку снесло как можно меньше. Пусть L - ширина реки.



$$\frac{S}{L} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Для того, чтобы S было как можно меньше, α должно быть как можно больше

По теореме синусов.

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{U}{\sin \beta} \quad \sin \alpha = \frac{v}{U} \sin \beta$$

Максимальное значение α достигается при

$$\sin \beta = 1 \quad \beta = 90^\circ$$

Для достижения минимального сноса скорость лодки относительно берега $\vec{v}_\Sigma$ должна быть перпендикулярна её борту.

Решение задач в движущейся системе отсчета.

Пример. Лодочник плывет вверх по реке. Проезжая под мостом, он роняет в воду багор. Через 0.5 часа он замечает это, возвращается и нагоняет багор на расстоянии 1 км от ниже по течению от моста.

Определите скорость течения реки.

Решение. Система отсчета - багор. Лодка плывет от начала отсчета до поворота и обратно в начало отсчета с собственной скоростью, следовательно, на обратную дорогу лодочник тратит тоже 0.5 часа. Система отсчета - берег. Течение несет багор. Он плывет 1 час и проплывает 1 км относительно берега. Скорость течения реки - 1 км/ч.

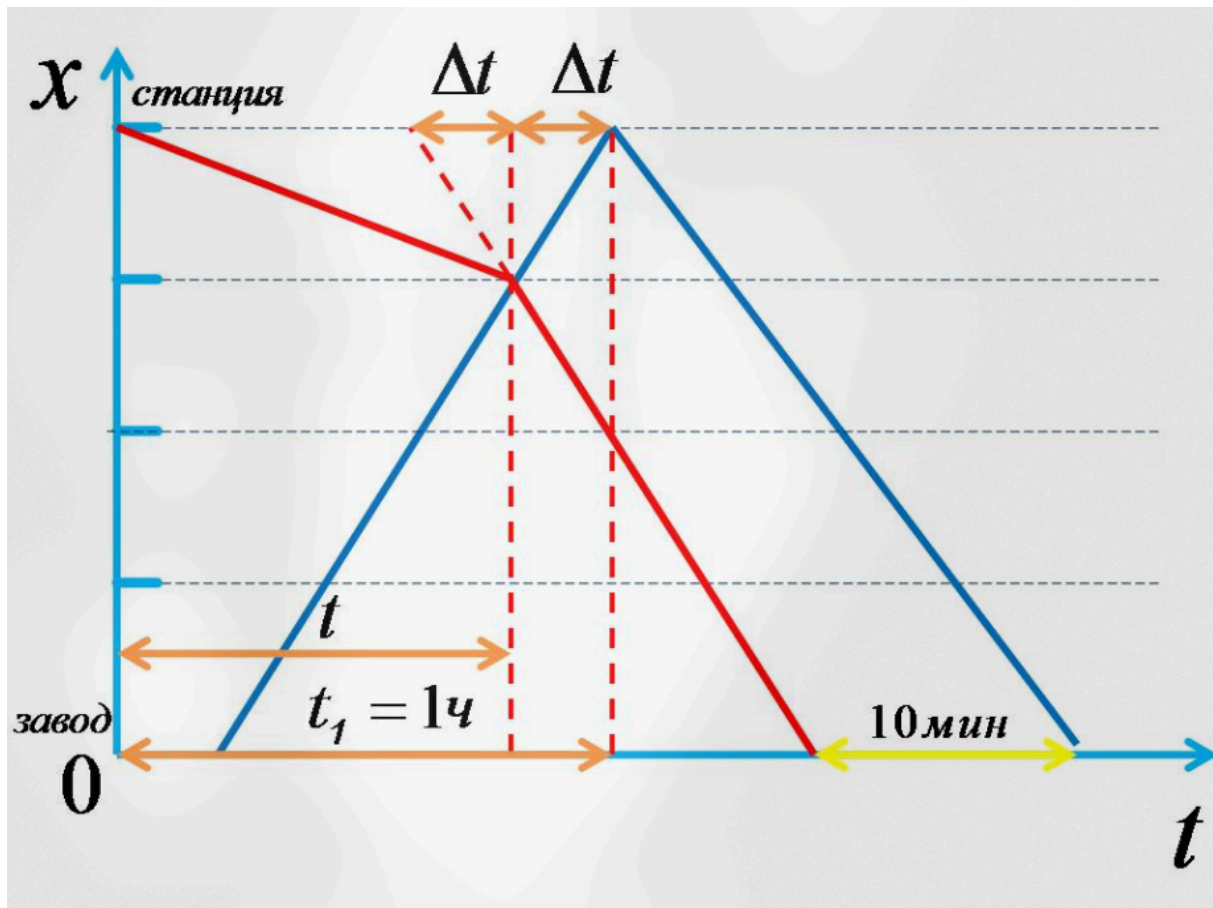
Задача.

Плывущий против течения теплоход, встречает сплавляемые по реке плоты. Через 45 мин после этого он причаливает к берегу, стоянка длится 45 мин. После этого теплоход начинает

двигаться по течению и через 1 час догоняет плоты. Собственная скорость теплохода равна 20 км/ч. Вычислите скорость течения реки. (в м/с)

Графическое решение задач.

Пример. Завод, на котором работает инженер, находится за городом. Каждый раз к приходу поезда на станцию приезжает заводская машина, которая доставляет инженера на место работы. Однажды инженер приехал на станцию на 1 час раньше и, не дожидаясь машины, пошел пешком. По дороге он встретил машину и приехал на завод на 10 мин раньше обычного. Сколько времени шел инженер до встречи с машиной? Во сколько раз скорость машины больше скорости пешехода?

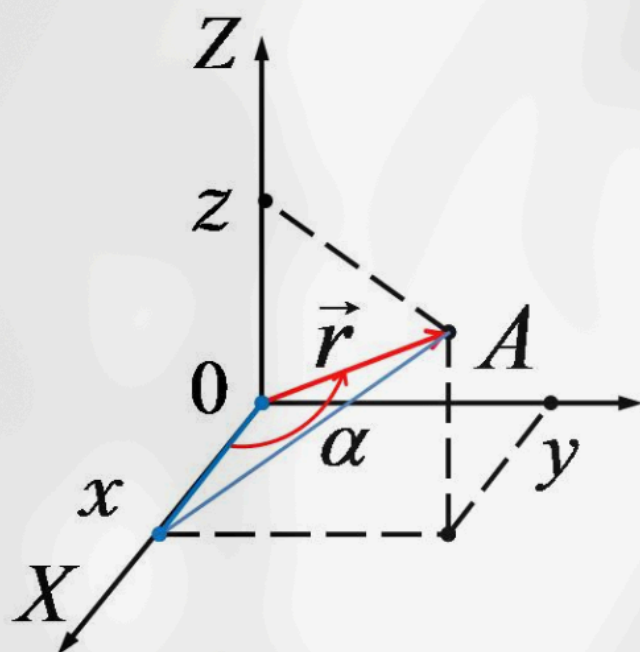


Пример. Трое туристов, обладающих одним двухместным велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время оценивается по последнему прибывшему). Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода равна 4 км/час, а велосипедиста - 20 км/ч. Постройте график движения туристов.

Пример. Двое туристов, обладающих одним одноместным велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время оценивается по последнему прибывшему). Велосипед можно оставлять на трассе. Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода равна 4 км/час, а велосипедиста - 20 км/ч. Постройте график движения туристов.

Мы будем использовать три способа описания движения - векторный, координатный и траекторный.

Радиус-вектор точки - вектор, проведенный из начала координат в данную точку.



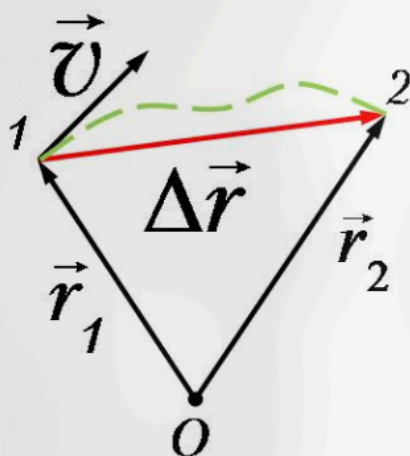
$$r_x = x,$$

$$r_y = y, \quad r_z = z$$

Косинусы углов, которые радиус-вектор составляет с осями Ox , Oy ,

$$\text{Cos } \alpha = \frac{r_x}{|\vec{r}|}; \quad \text{Cos } \beta = \frac{r_y}{|\vec{r}|}; \quad \text{Cos } \gamma = \frac{r_z}{|\vec{r}|}$$

Векторный способ описания движения.



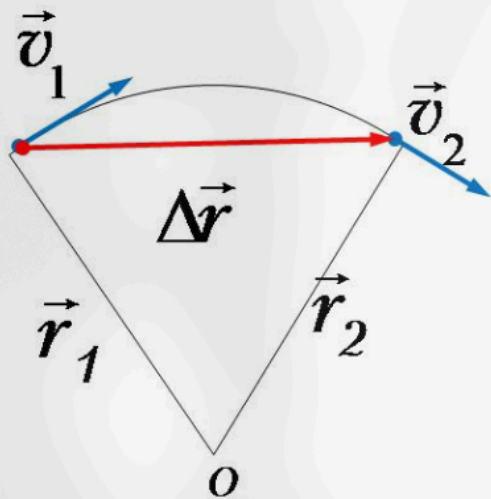
Для того, чтобы описать движение материальной точки, необходимо указать зависимость её радиуса-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad - \text{перемещение}$$

материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 равно приращению её радиуса-вектора за этот интервал времени

Скорость и ускорение материальной точки.



Средняя скорость материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Среднее ускорение материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Скорость материальной точки в момент времени t :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

где $\vec{v}_0$ - скорость материальной точки в момент времени $t = 0$.

Радиус-вектор материальной точки в момент времени t :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

где $\vec{r}_0$ - радиус-вектор материальной точки в момент времени $t = 0$.

Движение с постоянным ускорением

Зависимости скорости материальной точки от времени:

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$\vec{v}_0$ - скорость материальной точки в момент времени $t = 0$.

Зависимость радиуса-вектора материальной точки от времени:

$$\vec{a} = \text{const} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

$\vec{r}_0$ - радиус-вектор материальной точки в момент времени $t = 0$

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t :

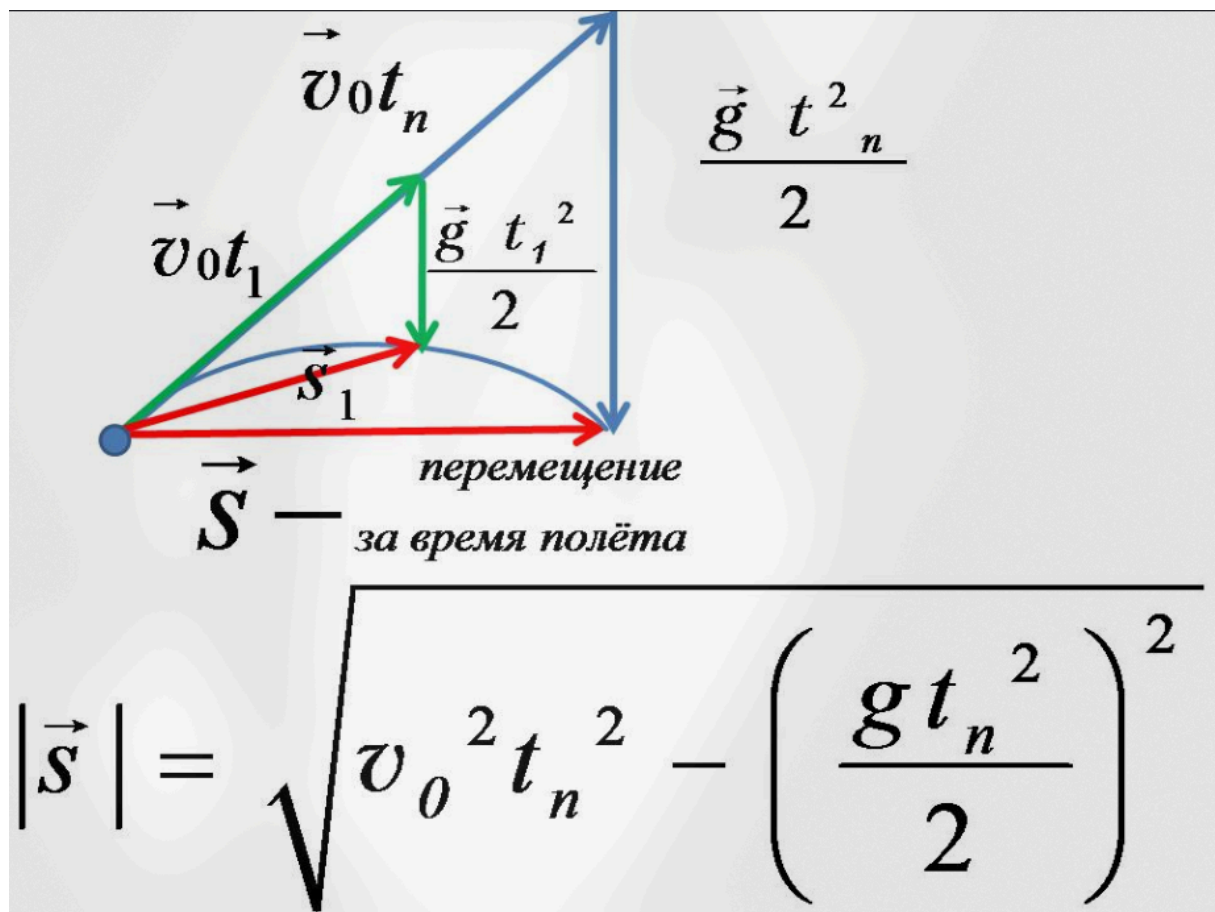
$$\vec{a} = \text{const} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v} dt$$

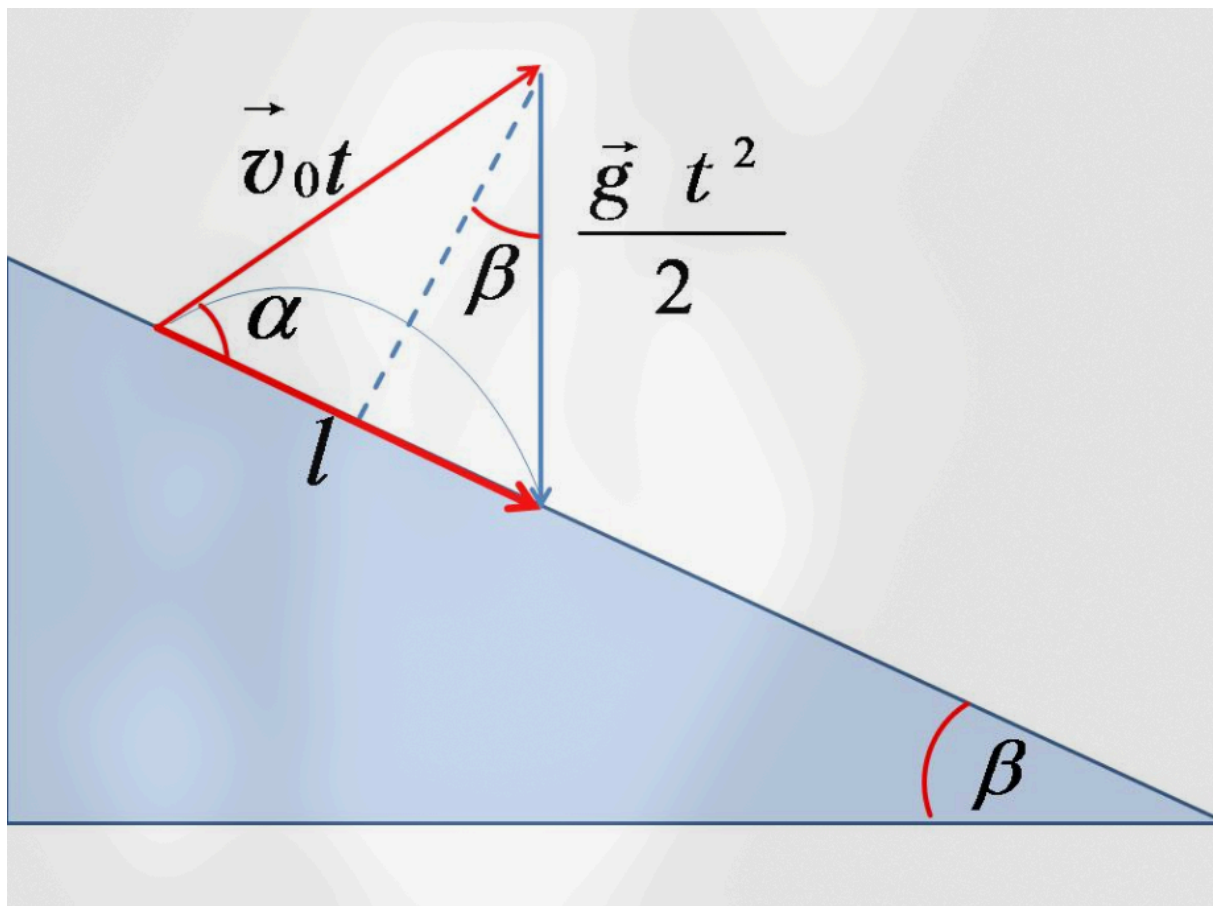
$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Пример. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью v_0 . Он упал на землю спустя t_n секунд. Найдите горизонтальную дальность полета камня.

Решение. Построим векторные диаграммы для произвольного момента времени t_1 и для времени полета t_n . Видно, что задачу можно решать геометрически. По теореме Пифагора:



Пример. Камень брошен со склона горы с начальной скоростью v_0 , направленной под углом α к склону горы, составляющего угол β с горизонтом. На каком расстоянии от точки бросания l упадет камень?



Выразим высоту в треугольнике через модуль каждого из векторов по очереди.

$$v_0 t \sin \alpha = \frac{gt^2}{2} \cos \beta$$

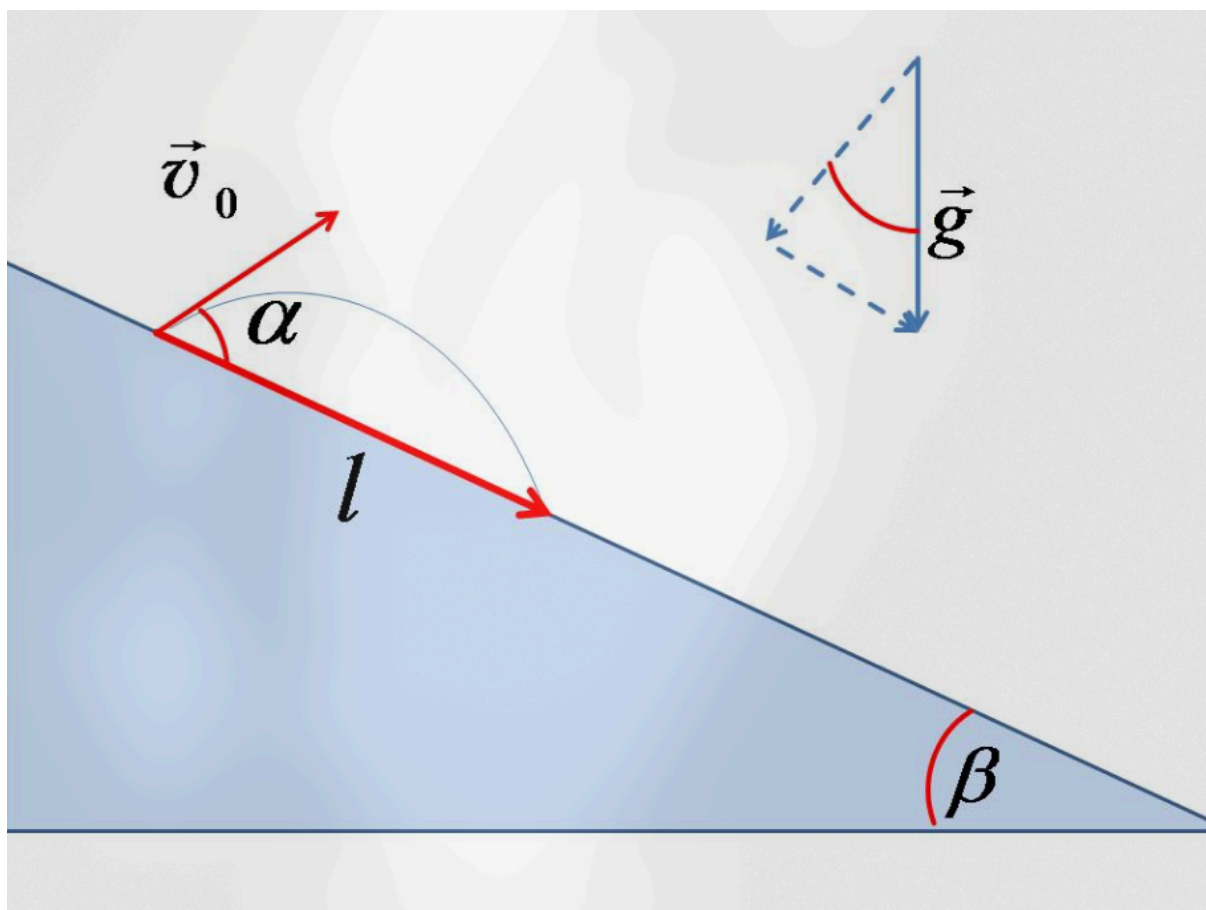
$$t = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) =$$

$$\frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \beta} \cos(\alpha - \beta)$$

Решите эту задачу координатным способом,

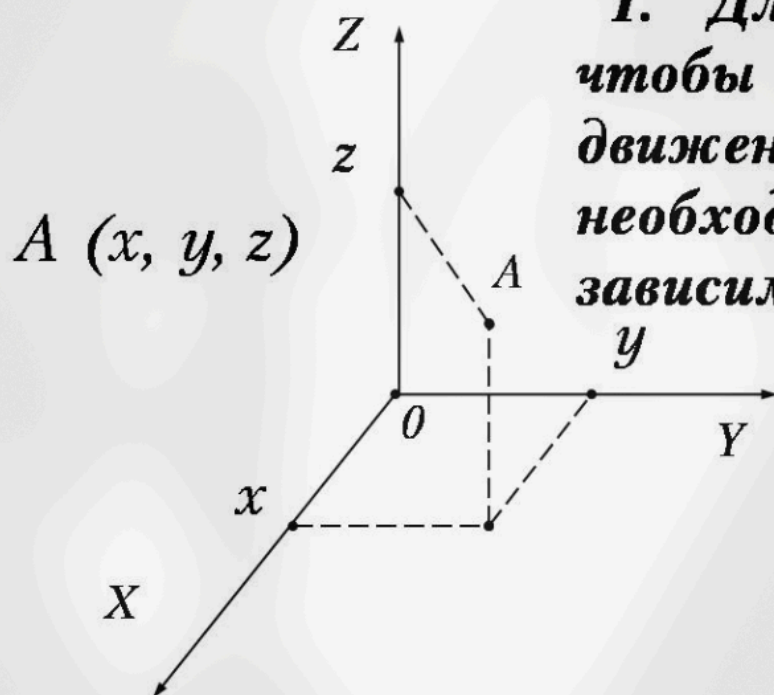
А) ось $0x$ - горизонтальна Б) ось $0x$ направлена вдоль наклонной плоскости

На следующем слайде - подсказка.



Координатный способ описания движения.

И. Для того, чтобы описать движение точки, необходимо указать зависимость



$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

II Вектор скорости материальной точки. Проекции вектора скорости на оси координат.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Модуль вектора скорости:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор скорости составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

III. Ускорение материальной точки.

Проекции вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль вектора ускорения: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Косинусы углов, которые вектор ускорения составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

IV. Перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2

Проекции вектора перемещения на оси координат:

$$(\vec{S})_x = x_2 - x_1$$

$$(\vec{S})_y = y_2 - y_1$$

$$(\vec{S})_z = z_2 - z_1$$

Модуль вектора перемещения:

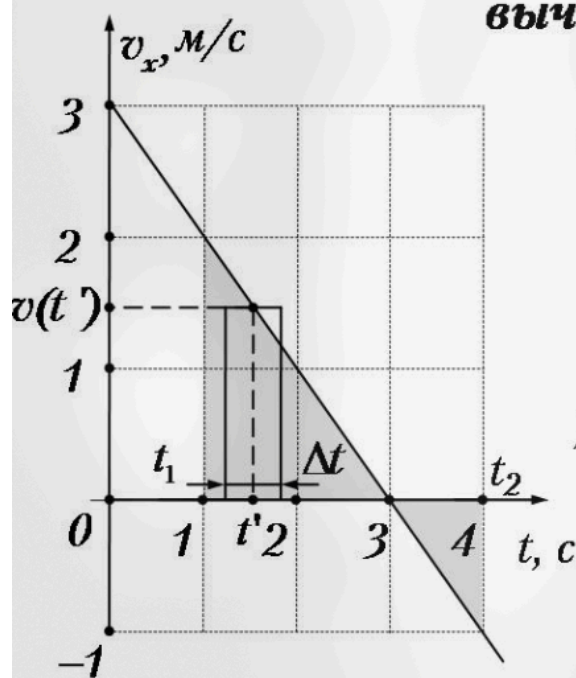
$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор перемещения составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{S_x}{|\vec{S}|}; \quad \cos \beta = \frac{S_y}{|\vec{S}|}; \quad \cos \gamma = \frac{S_z}{|\vec{S}|};$$



Пример Материальная точка движется вдоль оси Ox . По графику зависимости $v_x(t)$ вычислим:



- 1) Путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$S = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м}$$

- 2) Приращение координаты материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :

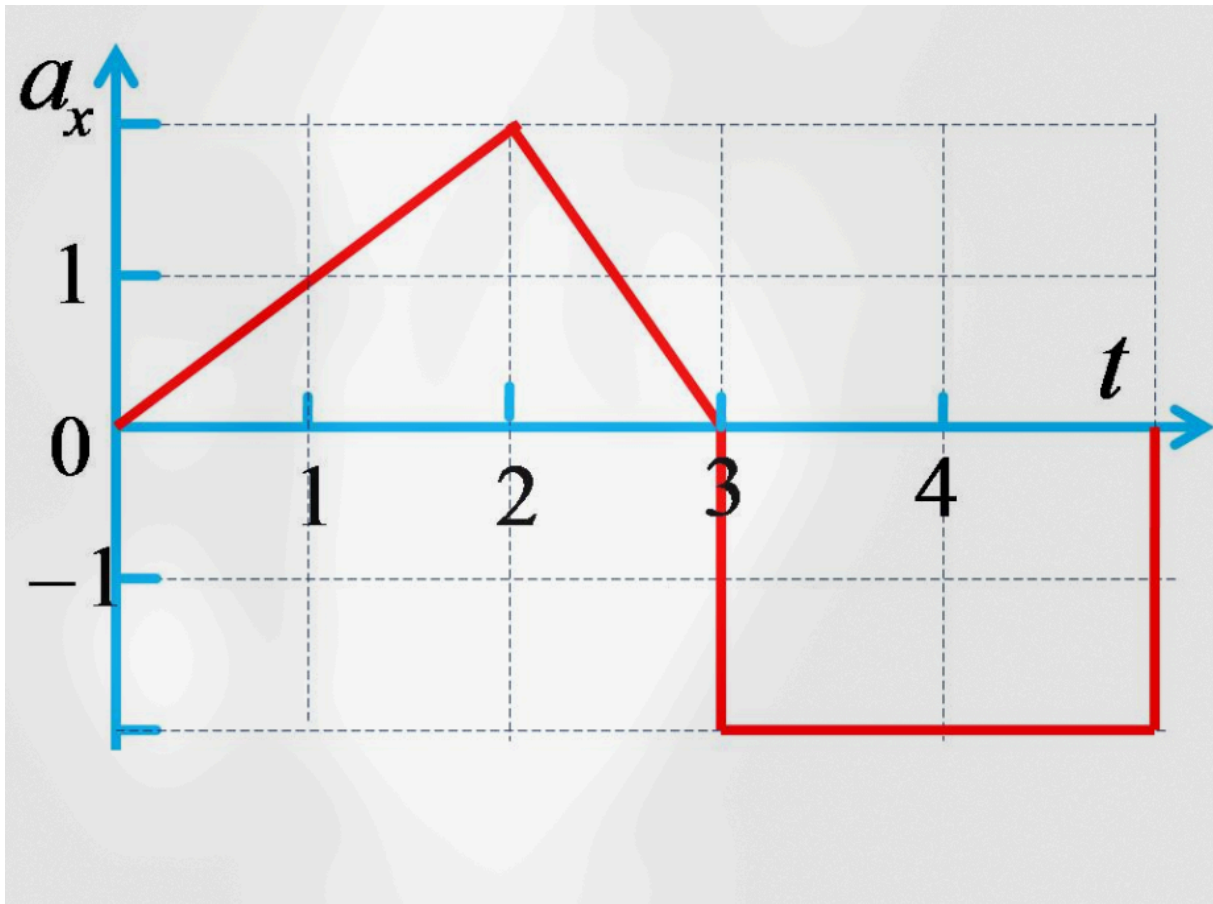
$$x_2 - x_1 = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

3). Проекцию перемещения материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$(\Delta \vec{r})_x = 2 - 0.5 = 1.5 \text{ м}$$

Пример. Материальная точка покоится в начале координат. В момент времени $t = 0$ она начинает движение вдоль оси Ox . На рисунке показан график зависимости проекции её ускорения на ось Ox от времени. Определите:

1. В какие моменты времени модуль скорости точки возрастает
2. В какой момент времени направление движения точки изменяется на противоположное
3. Максимальное значение модуля скорости точки
4. На какое максимальное расстояние точка удалилась от начала координат



Формула для разности квадратов скоростей

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$
$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

Приращение координаты материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Проекция на ось Ox перемещения материальной точки за интервал времени от 0 до t :

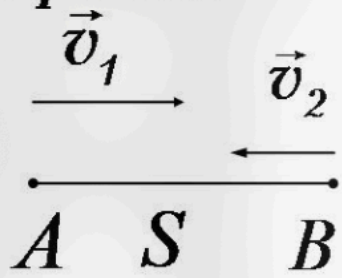
$$(\Delta \vec{r})_x = \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Средняя скорость прохождения отрезка пути.

$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{\Delta t}$$

Средней путевой скоростью движения точки называется скалярная величина равная отношению пути, пройденного точкой за интервал времени Δt , к его продолжительности.

Пример . Материальная точка прошла путь из точки A в точку B со скоростью v_1 и обратно со скоростью v_2 . Вычислите среднюю путевую скорость.



$$v_{cp} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} \right)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Материальная точка движется вдоль оси Oх. По графику зависимости $x(t)$

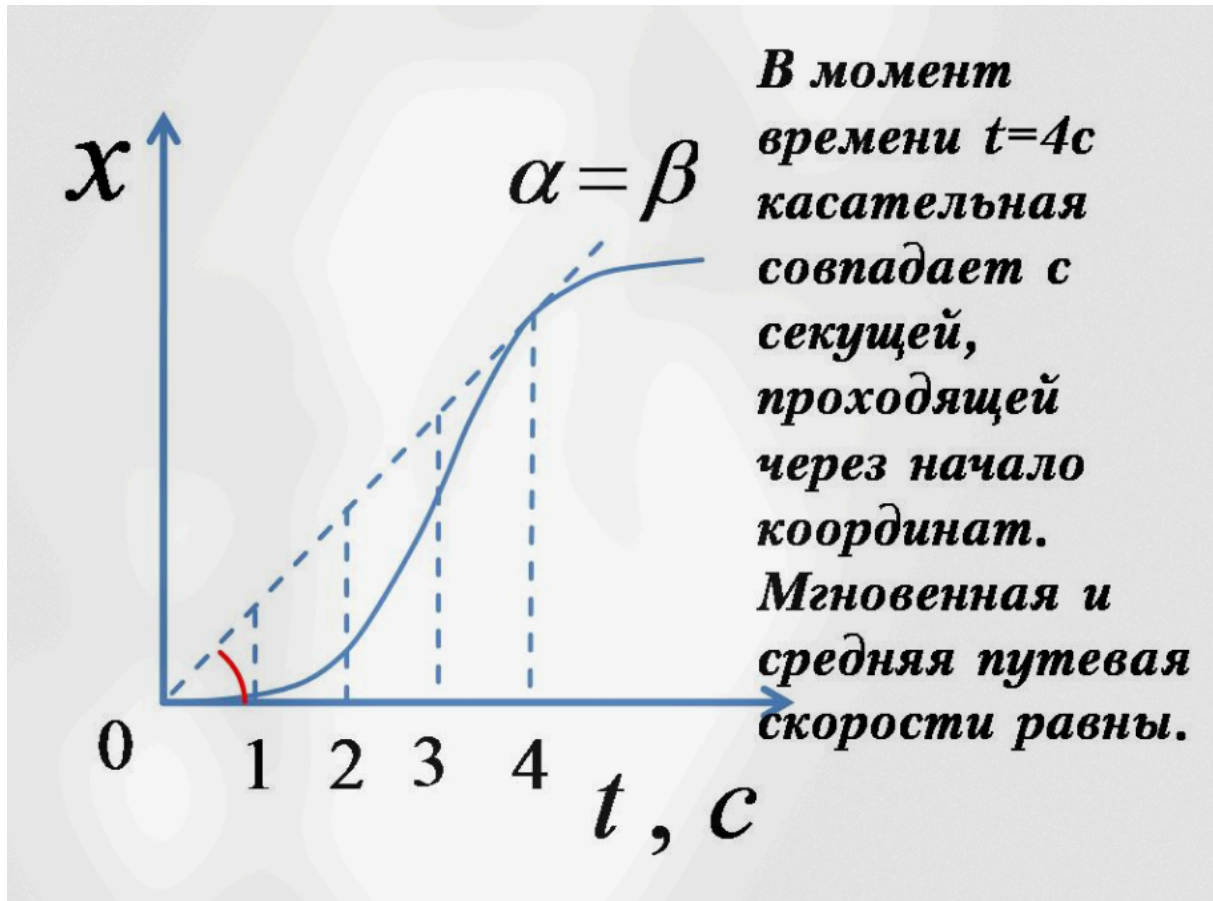
вычислим v_{cp}



Пример.

Материальная точка движется вдоль оси Ox .

1. Укажите момент времени, когда мгновенная скорость точки максимальна.
2. Укажите момент времени t_1 , когда мгновенная скорость совпадает по величине со средней путевой скоростью за интервал времени от 0 до t_1 .



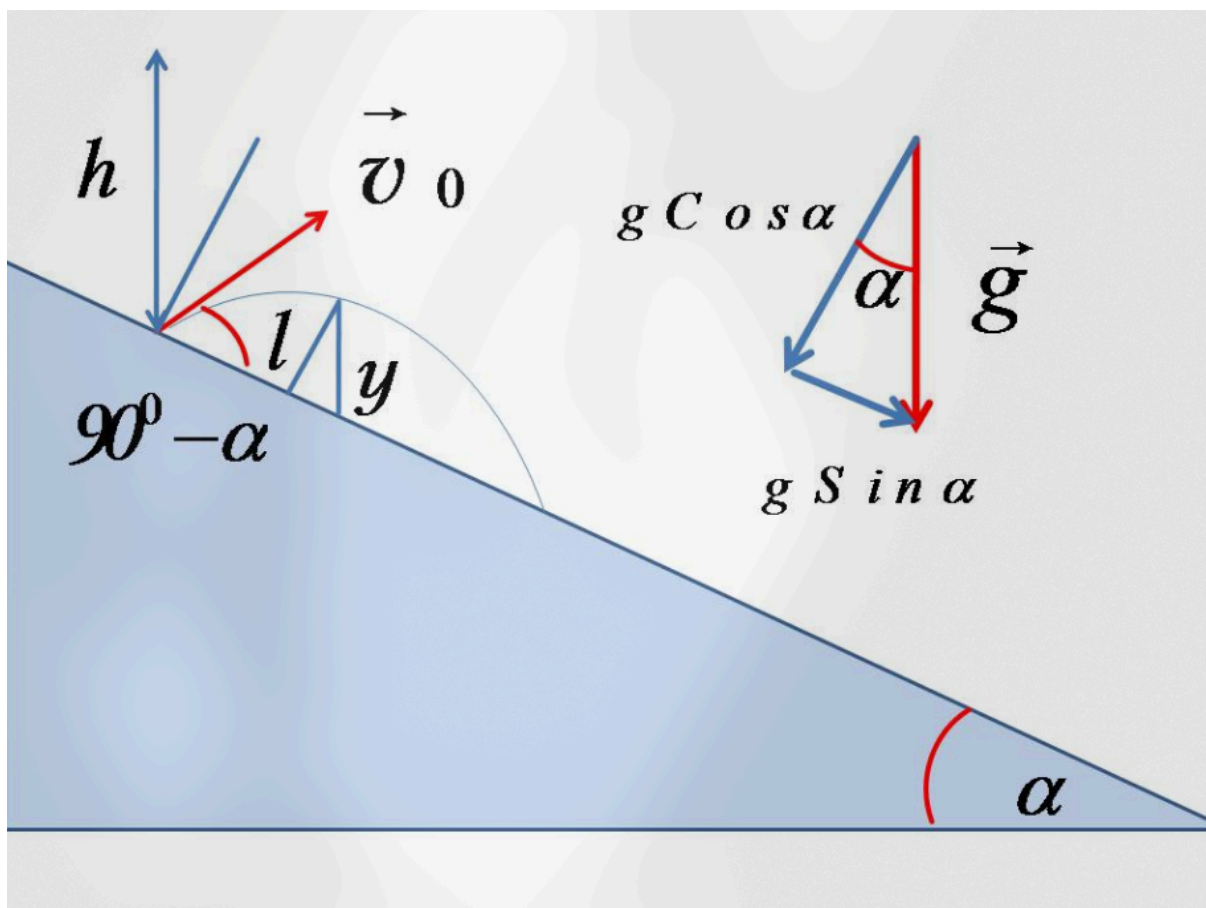
Пример.

Мячик падает с высоты h на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и абсолютно упруго отскакивает от неё.

Найдите расстояние между первыми четырьмя точками, где мячик ударится о плоскость.

Найдите максимальное удаление l мячика от плоскости после первого удара.

Найдите максимальное расстояние по вертикали от плоскости до траектории мячика между двумя первыми ударами (y на рисунке).



Пример. Мячик брошен с поверхности земли со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. Определите максимальную высоту подъема мячика, дальность полета мячика по горизонтали.

Каким должен быть угол α , чтобы обеспечить максимальную дальность полета по горизонтали при заданном значении начальной скорости.

Запишите уравнение траектории мяча.

Пример.

На балконе стоит мешок картошки. Нехороший мальчик кидается картошкой в прохожих. Скорость, которую он может сообщить картофелине при броске, равна v_0

Под каким углом к горизонту должна быть направлена эта скорость, чтобы картофелина упала как можно дальше от места старта? Высота балкона равна h . (Есть в тесте в ЦДО)

Ответ: $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}$

Опишем движение картофелины по горизонтали и по вертикали.

$$0 = h + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

$$L = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad (2)$$

Нужно добиться максимальной дальности полета вдоль земли $-L$.

Выразим t из (2) и подставим в (1)

Учтем, что

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad (3)$$

Мы получим квадратное уравнение для определения $\tan \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gL} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \quad (4)$$

Понятно, что искомый угол существует, поэтому дискриминант должен быть больше или равен нулю.

$$1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \frac{g^2 L^2}{v_0^4} \geq 0 \quad (5)$$

Практически мы уже решили задачу, ведь из (5) следует, что

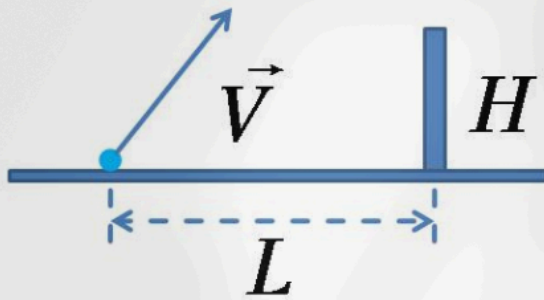
$$L \leq \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (6)$$

Нам нужно максимальное значение L , поэтому мы выбираем равенство.

$$L = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (7)$$

Подставим (7) в (4) и определим угол.

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}$$



Пример. Д/З 5 Из точки, находящейся на расстоянии L от стенки высотой H , необходимо бросить мяч, чтобы он перелетел через стену. Найдите минимальную скорость мяча, при которой это возможно. Под каким углом к горизонту она должна быть направлена?

Ответ.

$$\tan \alpha = \frac{V_0^2}{g \cdot L}$$

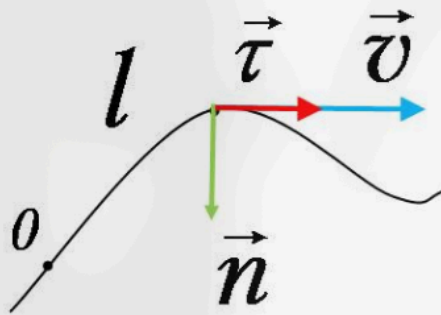
Пример. Пикирующий бомбардировщик сбрасывает бомбу с высоты H , находясь на расстоянии L от цели. Скорость бомбардировщика равна v . Под каким углом к горизонту он должен пикировать?

Ответ

$$S = L^2 - H^2$$

$$\tan \alpha = -\frac{v^2}{gS} \cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{v^2}{gS}\right)^2 + \frac{2Hv^2}{gS^2} - 1}$$

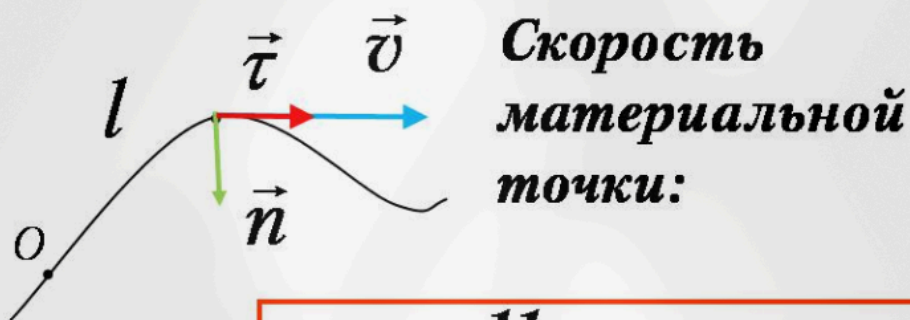
Траекторный способ описания движения



Используется ,
когда траектория
движения
материальной
точки известна
заранее.

Положение материальной точки
задаётся с помощью дуговой
координаты l , отсчитываемой от
выбранного на траектории начала.

$$l = l(t)$$



$$\vec{v} = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{\tau} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.



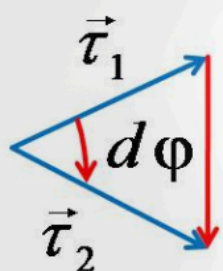
Через перемещение

$$|\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\vec{S}}{dt} \right|$$

Через путь

$$|\vec{v}| = \frac{dl}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Вычислим производную от вектора $\vec{\tau}$ по времени



$$|\vec{\tau}| = 1$$

$$d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \vec{n} \quad |d\vec{\tau}| = d\varphi$$

$$d\vec{\tau} = d\varphi \vec{n}$$

Орт $\vec{n}$ лежит в той же плоскости, в которой поворачивается вектор $\vec{\tau}$, направлен в ту же сторону, в которую происходит вращение.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}$$

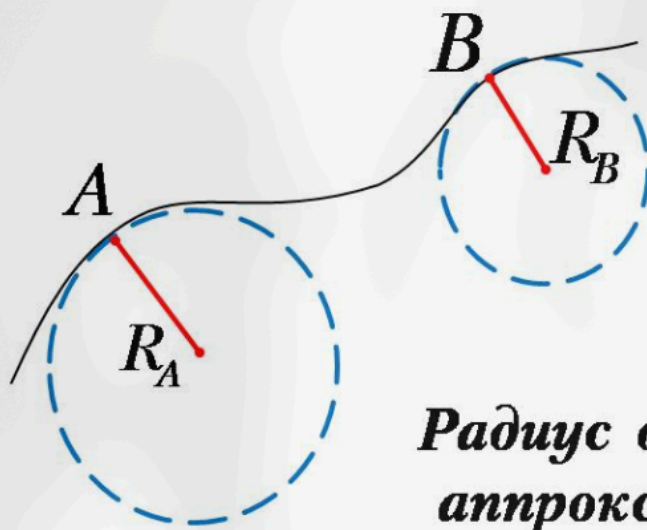
Полное ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{\frac{|\vec{v}| \cdot d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{|\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Если $|\vec{v}| \uparrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$ Если $|\vec{v}| \downarrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

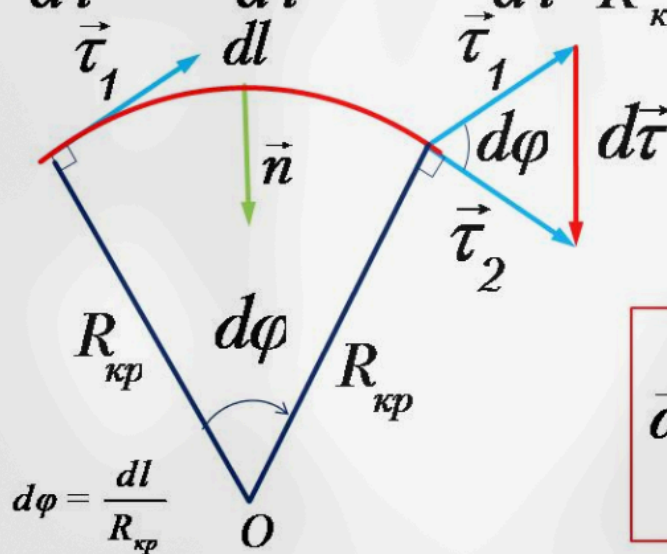
Радиус кривизны траектории



*Радиус окружности,
аппроксимирующей
траекторию
в данной точке*

Выразим нормальное ускорение материальной точки через радиус кривизны её траектории:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = \frac{dl}{dt} \frac{1}{R_{кр}} \vec{n} = |\vec{v}| \frac{1}{R_{кр}} \vec{n}$$



$$\vec{a}_n = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

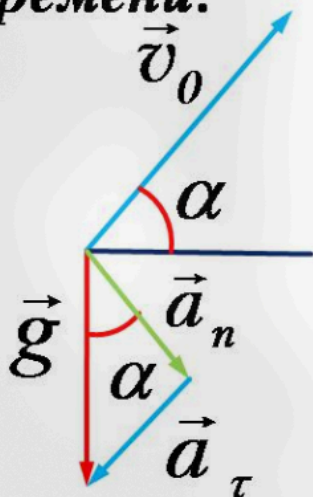
Тангенциальное ускорение отвечает за скорость изменения **модуля** скорости

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Нормальное ускорение пропорционально скорости изменения **направления** вектора скорости

$$\vec{a}_n = |\vec{v}| \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = |\vec{v}|^2 \frac{1}{R} \vec{n}$$

Пример 1. Камень брошен со скоростью $\vec{v}_0$ под углом к горизонту. Определите его нормальное и тангенциальное ускорение, и радиус кривизны траектории в начальный момент времени.



$$a_n = g \cos \alpha$$

$$a_\tau = g \sin \alpha$$

$$R = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}$$

Пример 2. Камень брошен с башни горизонтально со скоростью $\vec{v}_0$

Определите нормальное и тангенциальное ускорения камня в момент через t секунд полета. Вычислите радиус его траектории в этот момент времени.

Пример 3. Камень брошен со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. Найти зависимость его нормального, тангенциального ускорения и радиуса кривизны траектории от угла β , который скорость составляет с линией горизонта.

Пример. Камень брошен с поверхности земли со скоростью V_0 под углом α к горизонту. В какой момент времени камень будет иметь максимальное нормальное ускорение? Вычислите его. Определите нормальное и тангенциальное ускорения камня в момент, когда он поднимется на половину максимальной высоты? Вычислите радиус его траектории в этот момент времени.

Пример. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы

1. Радиус кривизны начала его траектории был в N раз больше, чем в вершине.
2. Центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности

Ответы

$$\cos \alpha = \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\tan \alpha = \sqrt{2} \quad \alpha = 54.7^\circ$$

Пример 4

Точка движется в плоскости так, что ее тангенциальное ускорение $a_\tau = \alpha$. А нормальное ускорение $a_n = \beta t^4$. α и β положительные постоянные. В момент начала отсчета времени точка покоилась. Найдите радиус кривизны траектории и ее полное ускорение как функции пройденного пути S .

$$v = \int_0^t a_\tau dt = \alpha t + 0 \quad \text{начальное условие}$$

$$S = \int_0^t v dt = \int_0^t \alpha t dt = \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 t^2}{\beta t^4} = \frac{\alpha^3}{\beta 2S}$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}}$$

$$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^8} = \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\beta 4S^2}{\alpha^3}\right)^2}$$

Пример 5 Частица движется в плоскости XY со скоростью $\vec{v} = \alpha \vec{i} + \beta x \vec{j}$. Где α и β - положительные постоянные. В начальный момент времени частица находилась в начале координат. Найти:

1. Уравнение траектории частицы
2. Радиус кривизны траектории как функцию x .

$$v_x = \alpha \quad (1)$$

$$x = \int_0^t \alpha \, dt = \alpha t + 0 \quad (2)$$

$$v_y = \beta x = \alpha \beta t \quad (3)$$

$$y = \int_0^t \alpha \beta t \, dt = \frac{\alpha \beta t^2}{2} + 0 \quad (4)$$

выразим t из (2) и подставим в (4), получим уравнение траектории

$$y = \frac{\beta x^2}{2\alpha}$$

Из (1) и (3) найдем модуль скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta x)^2} \quad (5)$$

Тангенциальное ускорение - скорость изменения модуля скорости

$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{\beta^2 2x}{2\sqrt{\alpha^2 + (\beta x)^2}} \alpha \quad (6)$$

Из (1) и (3) найдем проекции ускорения на координатные оси.

$$a_x = 0 \quad (7)$$

$$a_y = \alpha \beta \quad (8)$$

Полное ускорение точки

$$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \beta \alpha \quad (9)$$

Радиус кривизны траектории

$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{a_n} = \frac{|\vec{v}|^2}{\sqrt{a_{\text{полн}}^2 - a_\tau^2}}$$

Из (5), (6) и (9)

$$R = \frac{\alpha^2 + (\beta x)^2}{\sqrt{(\alpha \beta)^2 - \left(\frac{\alpha \beta^2 x}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta x)^2}} \right)^2}}$$

Сделаем преобразования

$$R = \frac{(\alpha^2 + (\beta x)^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\alpha \beta)^2 (\alpha^2 + (\beta x)^2) - \alpha^2 \beta^4 x^2}}$$

$$R = \frac{(\alpha^2 + (\beta x)^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2 \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \left(\frac{\beta x}{\alpha} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

Пример. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна v_0

Из-за ветра шар приобретает горизонтальную компоненту скорости

$$v_x = \alpha y$$

α -постоянная, y -высота подъёма.

Найдите зависимость от высоты подъёма

1. Сноса шара
2. Полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

Ответы

$$S = \frac{\alpha}{2v_0} y^2$$

$$a_{\text{полн}} = \alpha v_0$$

$$a_{\tau} = \frac{\alpha^2 y}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha y}{v_0} \right)^2}}$$

$$a_n = \frac{\alpha v_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha y}{v_0} \right)^2}}$$

Пример 6. Точка движется по окружности со скоростью $v = \alpha t$, где α - положительная постоянная. Найти полное ускорение точки в момент, когда она пройдет N -ю часть длины окружности после начала движения.

$$v = \alpha t$$

$$\text{Пройденный путь } l = \int_0^t v \, dt = \frac{\alpha t^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{По условию задачи } l = 2\pi RN \quad (2)$$

$$\text{Из (1) и (2) выразим время движения точки } t_{\text{дв}} = \sqrt{\frac{4\pi RN}{\alpha}} \quad (3)$$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^2 t_{\text{дв}}^2}{R} = (\text{см 3}) = \alpha 4\pi N$$

$$a_{\text{полн}} = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2} = \alpha \sqrt{1 + (4\pi N)^2}$$

Пример. Точка движется в положительном направлении оси Ox так, что её скорость меняется по закону $v = \alpha \sqrt{x}$

Где α - положительная постоянная. В момент времени $t = 0$ точка находилась в начале координат. Определите:

1. Скорость и ускорение точки как функцию времени

2. Среднюю скорость за время, в течение которого она пройдет первые S метров пути.

$$v = \alpha\sqrt{x} \quad \frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x}$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt$$

$$2\sqrt{x} = \alpha t + \text{const}$$

Постоянную определим из начальных условий

$$t = 0 \quad x = 0 \Rightarrow \text{const} = 0$$

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}$$

Вычислим скорость и ускорение точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha^2 t}{2} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2}{2}$$

Определим среднюю путевую скорость точки. Время, которое было затрачено на прохождение S метров пути

$$t_1 = \frac{2\sqrt{S}}{\alpha}$$

$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{t_1} = \frac{\sqrt{S}\alpha}{2}$$

Пример. Точка движется по прямой, замедляясь, с ускорением, модуль которого зависит от её скорости по закону

$$a = \alpha\sqrt{v}$$

В начальный момент времени скорость точки равна v_0

Какой путь пройдет она до остановки и за какое время?

$$a_x = -\alpha\sqrt{v} \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\alpha dt$$

Проинтегрируем уравнение с учетом начальных условий

$$2\sqrt{v} = -\alpha t + \text{const}$$

$$v = -\frac{\alpha^2 t^2}{4} + v_0$$

Определим время движения точки до остановки

$$v_0 = \frac{\alpha^2 t_{\text{дв}}^2}{4} \quad t_{\text{дв}} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{v_0}$$

Путь, пройденный прямолинейно двигавшейся точкой

$$l = \int_0^{t_{\text{дв}}} v(t) dt = -\frac{\alpha^2 t_{\text{дв}}^3}{12} + v_0 t_{\text{дв}} = \frac{4(v_0)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha}$$

Пример. Тогда движется по дуге окружности $v = \alpha\sqrt{S}$. Радиуса R . Её скорость где S - пройденный путь, α -положительная постоянная.

Найти угол между вектором скорости и полного ускорения как функцию S .

Пусть $v = \alpha\sqrt{S}$ где α -коэффициент пропорциональности

$$\frac{dS}{dt} = \alpha\sqrt{S}$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dS}{\sqrt{S}} = \alpha dt \quad s\sqrt{S} = \alpha t$$

Зависимость пройденного пути от времени

$$S = \alpha^2 \frac{t^2}{4} \quad (1)$$

Зависимость скорости точки от времени

$$v = \frac{dS}{dt} \quad v = \alpha^2 \frac{t}{2}$$

Найдем тангенциальное ускорение точки

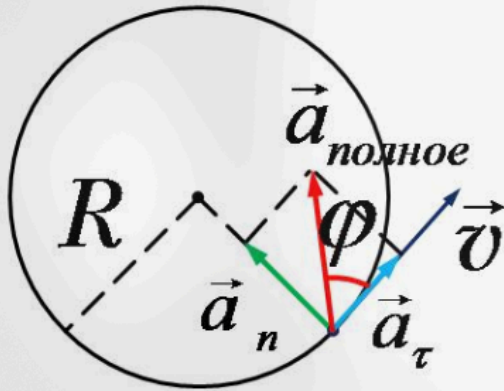
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \alpha^2 \frac{1}{2} \quad (2)$$

Найдем нормальное ускорение точки. И выразим его через путь S , используя (1).

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^4 t^2}{4R} = \frac{\alpha^2}{R} S \quad (3)$$

Тангенс угла между скоростью и полным ускорением равен отношению нормального ускорения к тангенциальному (см. рис). Согласно (2) и (3)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 S}{R}$$

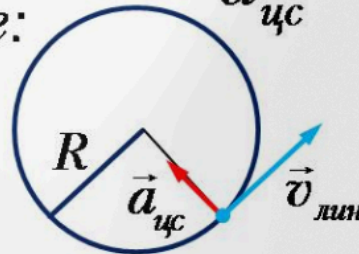


Кинематика равномерного вращения материальной точки по окружности

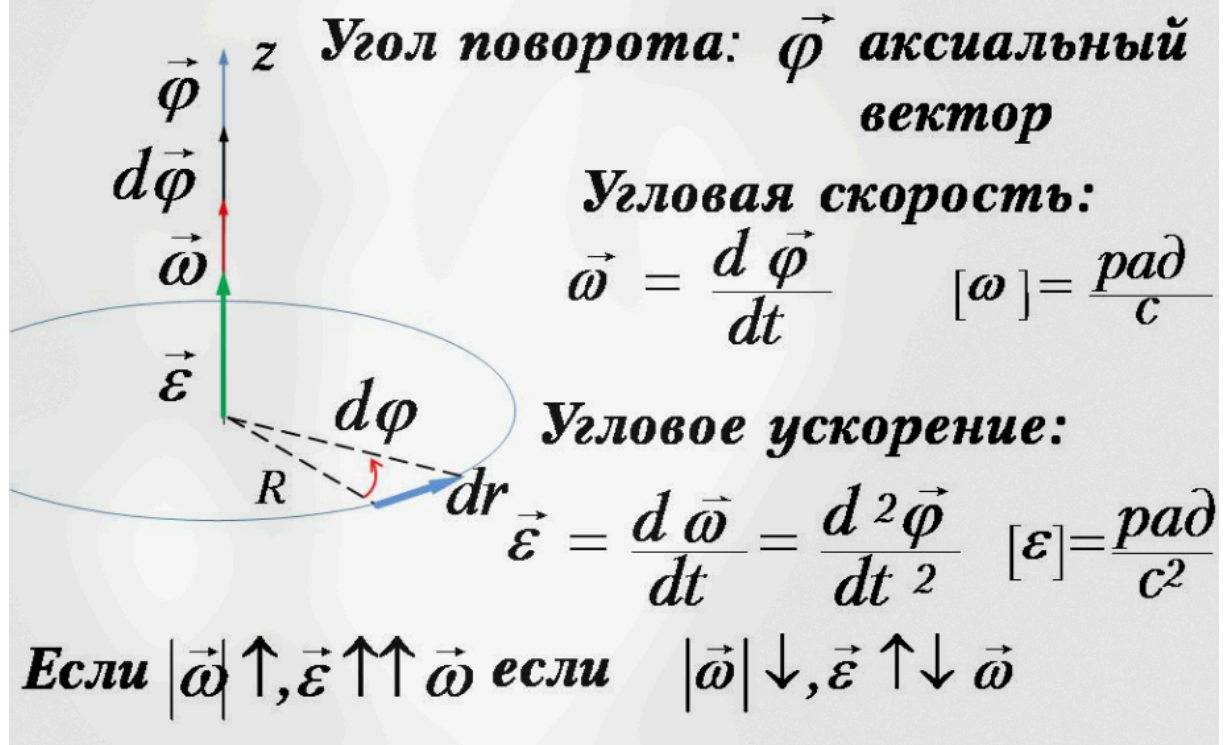
Период обращения точки: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ $[T] = c$

Частота обращения точки: $\nu = \frac{1}{T}$ $[\nu] = c^{-1}$

Центростремительное ускорение: $a_{\text{цс}} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

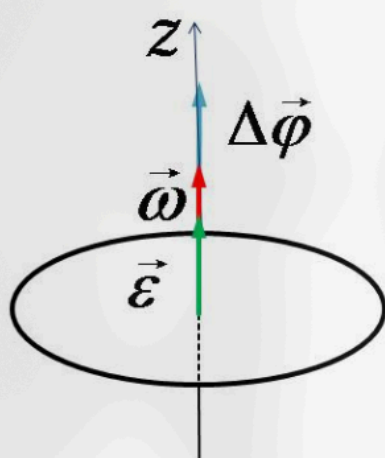


Кинематика вращения материальной точки вокруг неподвижной оси.



Направление вектора угла поворота определяют по правилу правого винта: если смотреть вдоль вектора угла поворота, то мы будем видеть поворот, совершающимся по часовой стрелке.

Равноускоренное движение материальной точки по окружности.



Зависимость угловой скорости от времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t$$

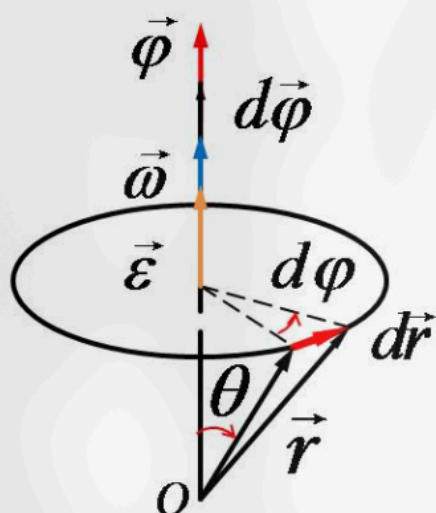
Зависимость приращения угла поворота от времени:

$$\Delta\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t$$

$$\Delta\varphi_z = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}$$

Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



Для точек твёрдого тела начало отсчёта в общем случае не совпадает с центром окружности, по которой движется точка

Угол поворота: $\vec{\varphi}$

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Угловое ускорение:

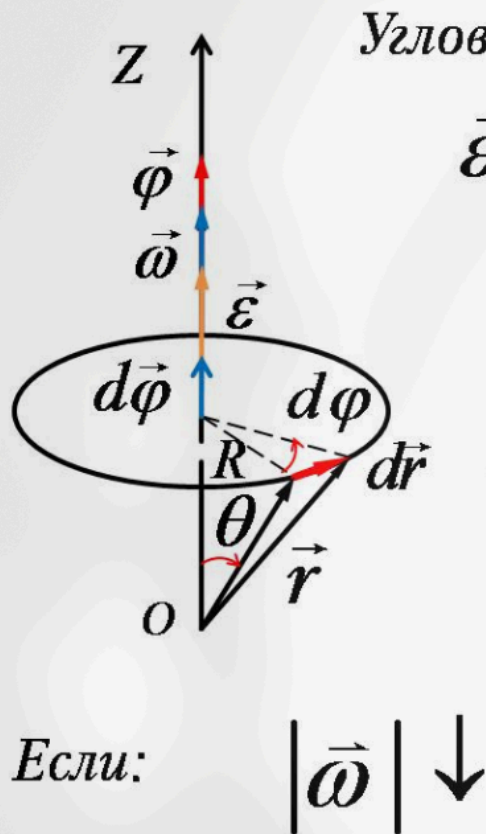
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{c^2}$$

Если:

$$|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

Если:

$$|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$$


Связь линейных и угловых величин.

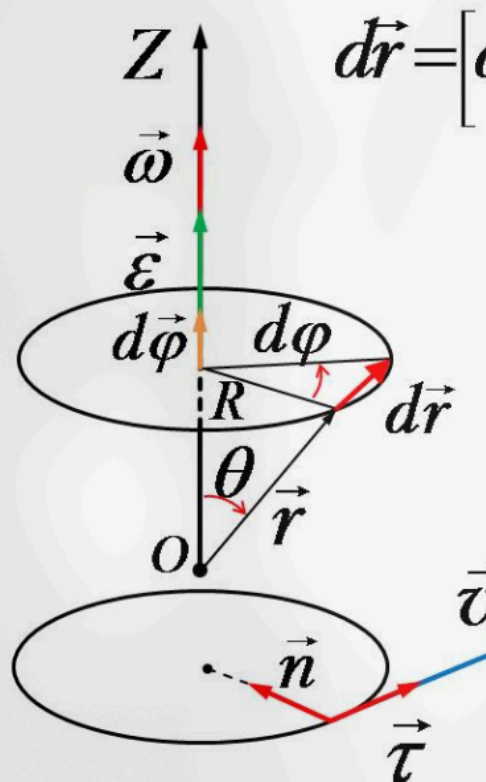
При вращении вокруг неподвижной оси R не изменяется, поэтому дифференцируем только первый сомножитель

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$R = r \sin \theta$$

$$v = \omega R$$

Подробное объяснение (доп. материал) в конце лекции

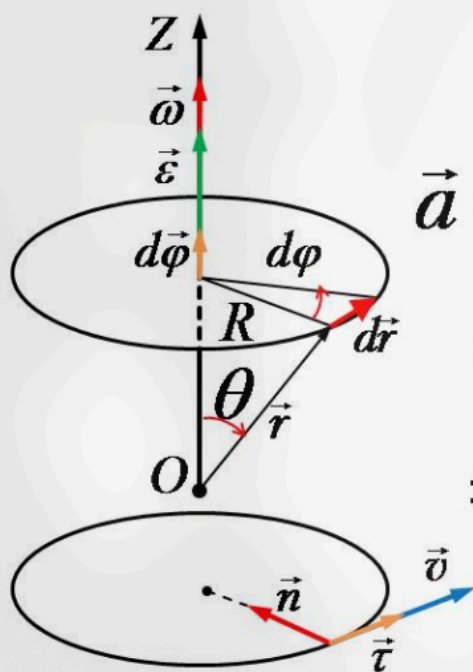


При рассмотрении таких векторов, как радиус-вектор, скорость или сила и.т.п., вопрос о выборе их направления не возникает - оно вытекает естественным образом из природы этих величин. Такие векторы называют полярными или истинными. Векторы, направление которых связано с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами.

При изменении условия, определяющего направление псевдовекторов, например, переходе от правой системы координат к левой псевдовекторы меняют направление на противоположное, а полярные остаются без изменений. Если оба вектора в векторном произведении полярные (или аксиальные), то векторное произведение - аксиальный вектор.

Произведение полярного вектора на аксиальный будет полярным вектором. Изменение условия, определяющего направление псевдовекторов на обратное приведет в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед аксиальным вектором. В итоге направление векторного произведения не изменится.

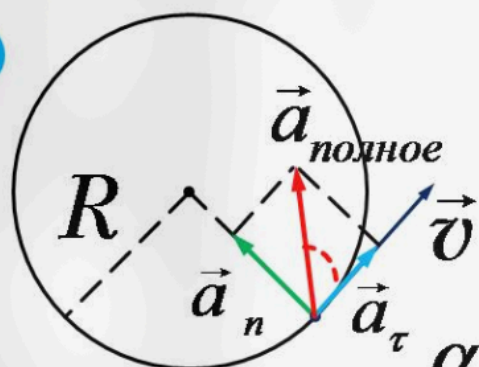
Продифференцируем скорость по времени- найдём ускорение



$$\begin{aligned}\vec{v} &= [\vec{\omega}, \vec{r}] \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \\ &= \varepsilon \cdot R \cdot \vec{\tau} + \omega^2 \cdot R \cdot \vec{n} = \\ &= \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n\end{aligned}$$

Пример. Материальная точка начинает движение по окружности радиусом R с постоянным угловым ускорением ε . Вычислите угол между векторами её скорости и полного ускорения через t секунд после начала движения.

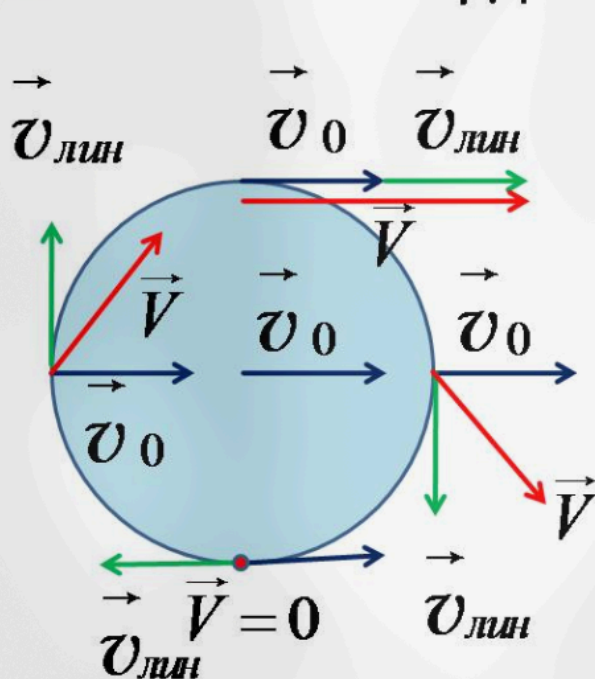
$$a_{\tau} = \varepsilon R$$



$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$$

$$\alpha = \arctg \frac{a_n}{a_{\tau}} = \arctg \varepsilon t^2$$

Плоское движение абсолютно твёрдого тела.



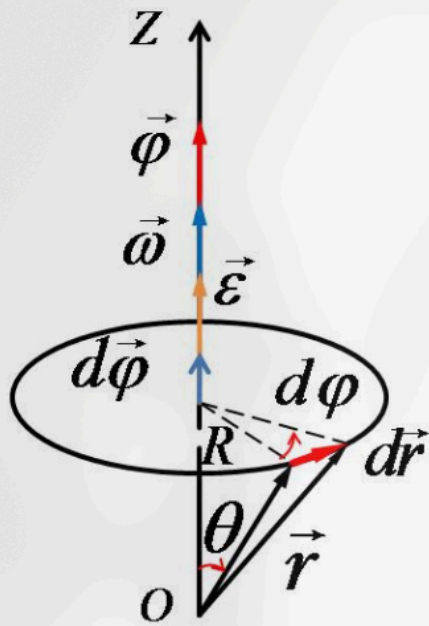
$\vec{v}_0$ – скорость центра колеса относительно земли

$\vec{v}_{лин}$ – скорость точки колеса относительно центра колеса

$\vec{V}$ – скорость точки колеса относительно земли

Вращение с постоянным угловым ускорением

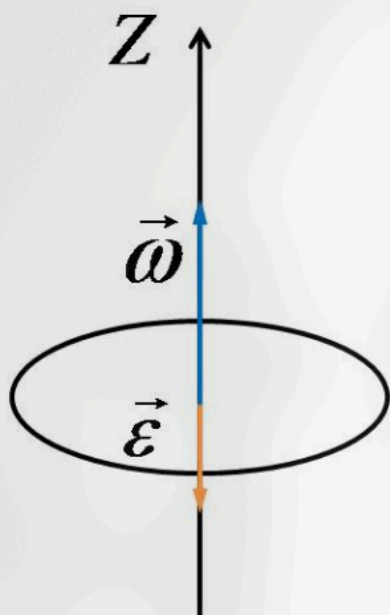
$$\vec{\varepsilon} = \text{const},$$



$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t,$$

$$\Delta \vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0 \cdot t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

Пример. Колесо вращалось с угловой скоростью ω_0 , стало тормозить и остановилось спустя $t_{\text{дв}}$ секунд. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов с момента начала торможения до остановки.



В проекции на ось Z

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon \cdot t$$

В момент времени $t_{\text{дв}}$ угловая скорость колеса становится равной нулю.

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t_{\text{дв}}} \quad (1)$$

$$\varphi_{\text{конечн}} = \omega_0 t_{\text{дв}} - \frac{\varepsilon t_{\text{дв}}^2}{2} \quad (2)$$

Из (1) и (2)

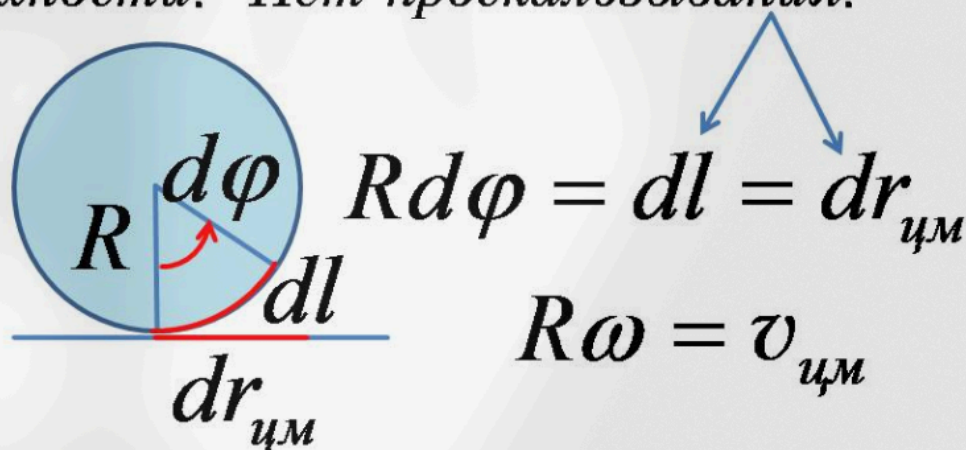
$$\varphi_{\text{конечн}} = \frac{\omega_0 t_{\text{дв}}}{2}$$

Число оборотов до остановки

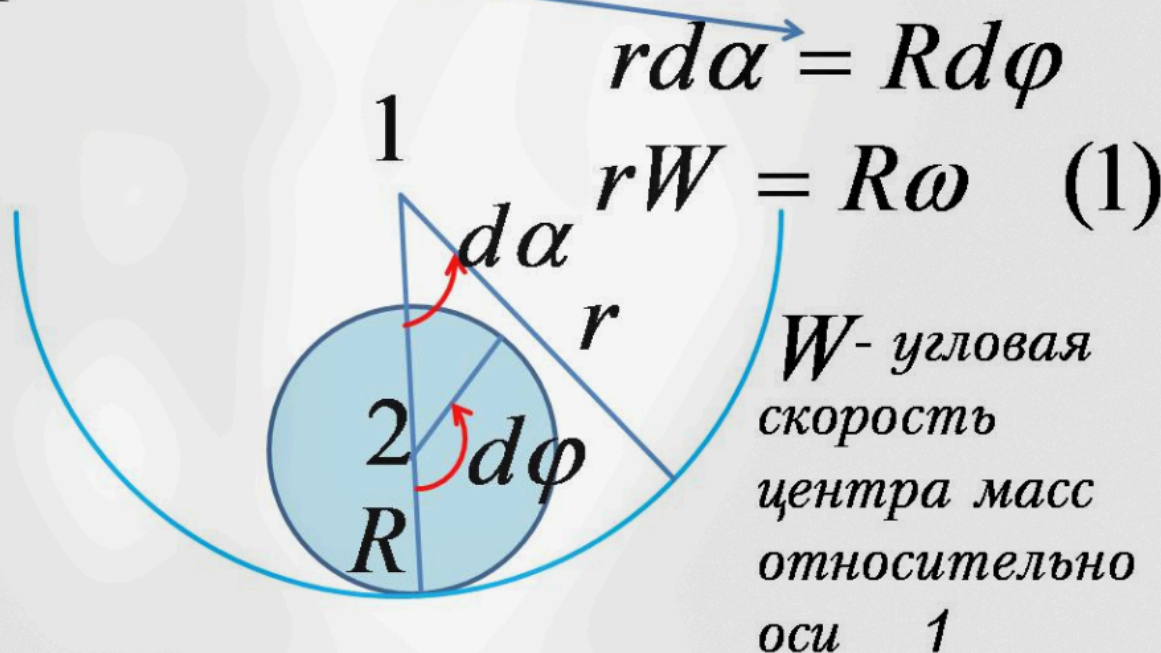
$$N = \frac{\varphi_{\text{конечн}}}{2\pi} = \frac{\omega_0 t_{\text{дв}}}{4\pi}$$

Пример. Найти связь между угловой скоростью вращения шарика вокруг своей оси ω и линейной скоростью движения его центра масс, если:

1. Шарик катится по ровной поверхности. Нет проскальзывания.



2. Шарик катится по вогнутой сферической поверхности радиуса R . Нет проскальзывания



Поскольку центр масс шарика движется по окружности радиусом $r - R$,

$$v_{\text{цм}} = W(r - R) \quad (2)$$

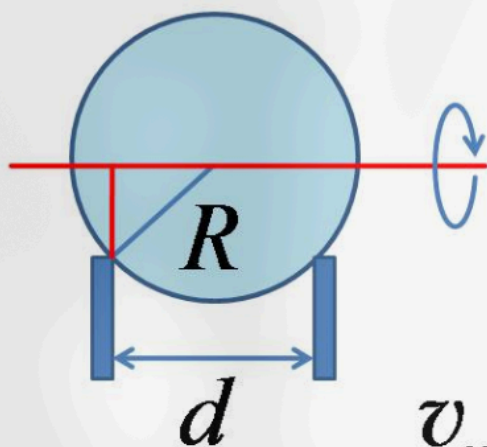
Из (1) и (2)

$$v_{\text{цм}} = \frac{R\omega}{r}(r - R)$$

3. Если шарик катится по горке радиусом r , то

$$v_{\text{цм}} = R\omega \left(1 + \frac{R}{r}\right)$$

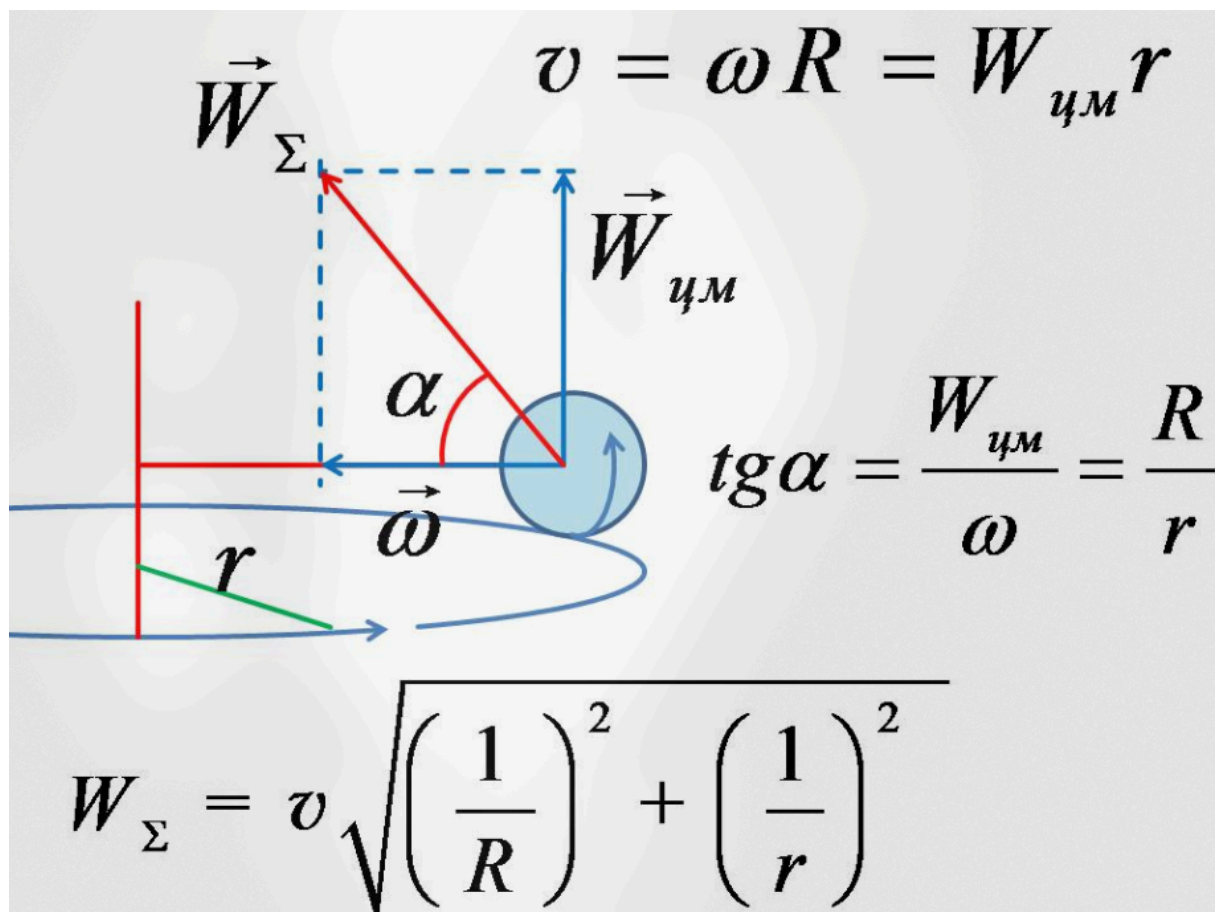
4. Если шарик катится по рельсам, расположенным на расстоянии d друг от друга



$$v_{\text{цм}} = \omega \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

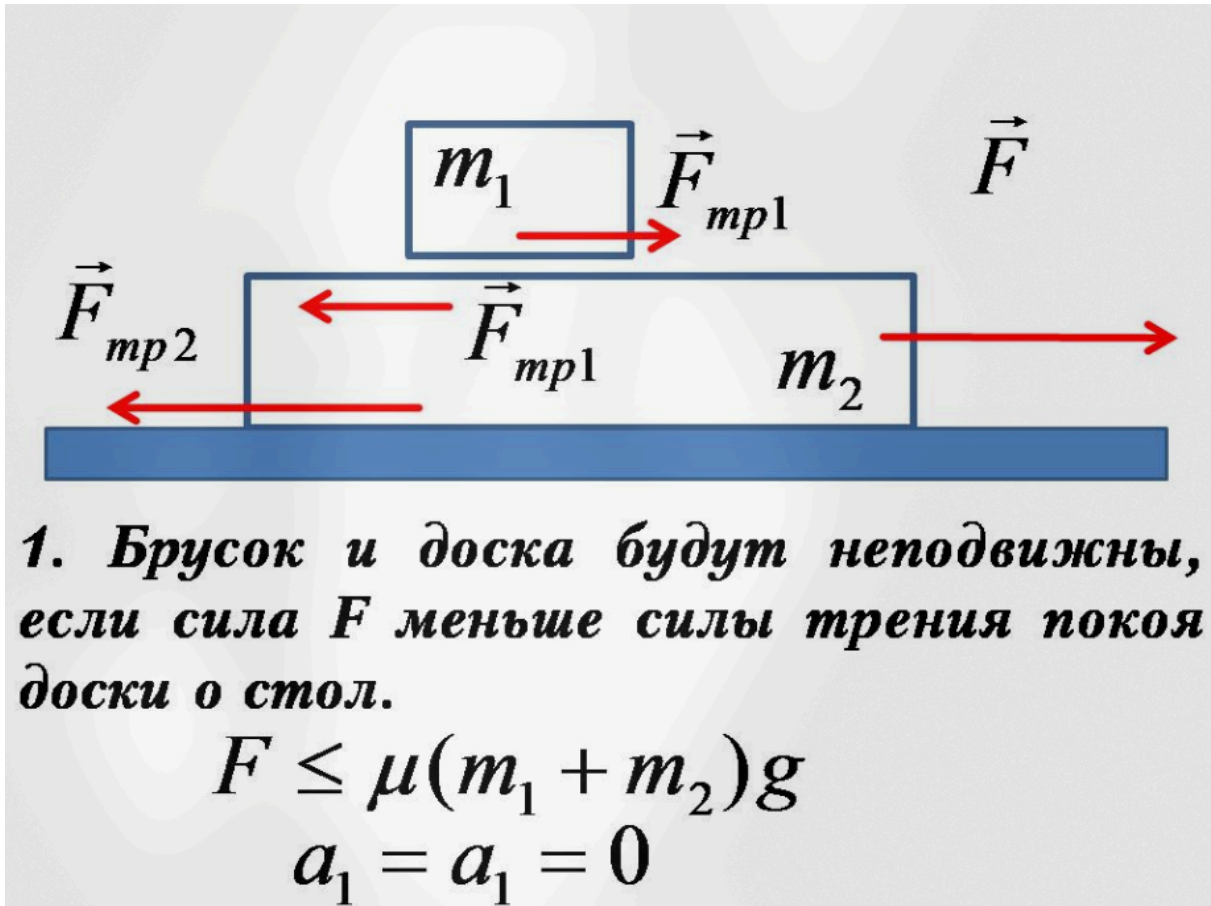
Сложение угловых скоростей.

Шарик радиусом R насажен на горизонтальную ось, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Шарик при этом катится по горизонтальной поверхности со скоростью v , описывая окружность радиусом r . Вычислите полную угловую скорость шарика и её наклон к горизонту.



Практика 4.

Пример 1. Брусок массой m_1 лежит на доске массой m_2 . Коэффициент трения между доской и столом и между бруском и доской равен μ . На доску начинает действовать горизонтальная сила F , величина которой увеличивается со временем. Опишите варианты движения бруска и доски.



2. Проскальзывание бруска относительно доски начнётся, если ускорение доски превысит ускорение бруска под действием силы трения скольжения.

$$a_2 > a_1 \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = F - \mu(2m_1 + m_2)g \quad (2)$$

$$m_1 a_1 = \mu m_1 g \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) определяем

$$F_{\text{пред}} > 2\mu(m_1 + m_2)g$$

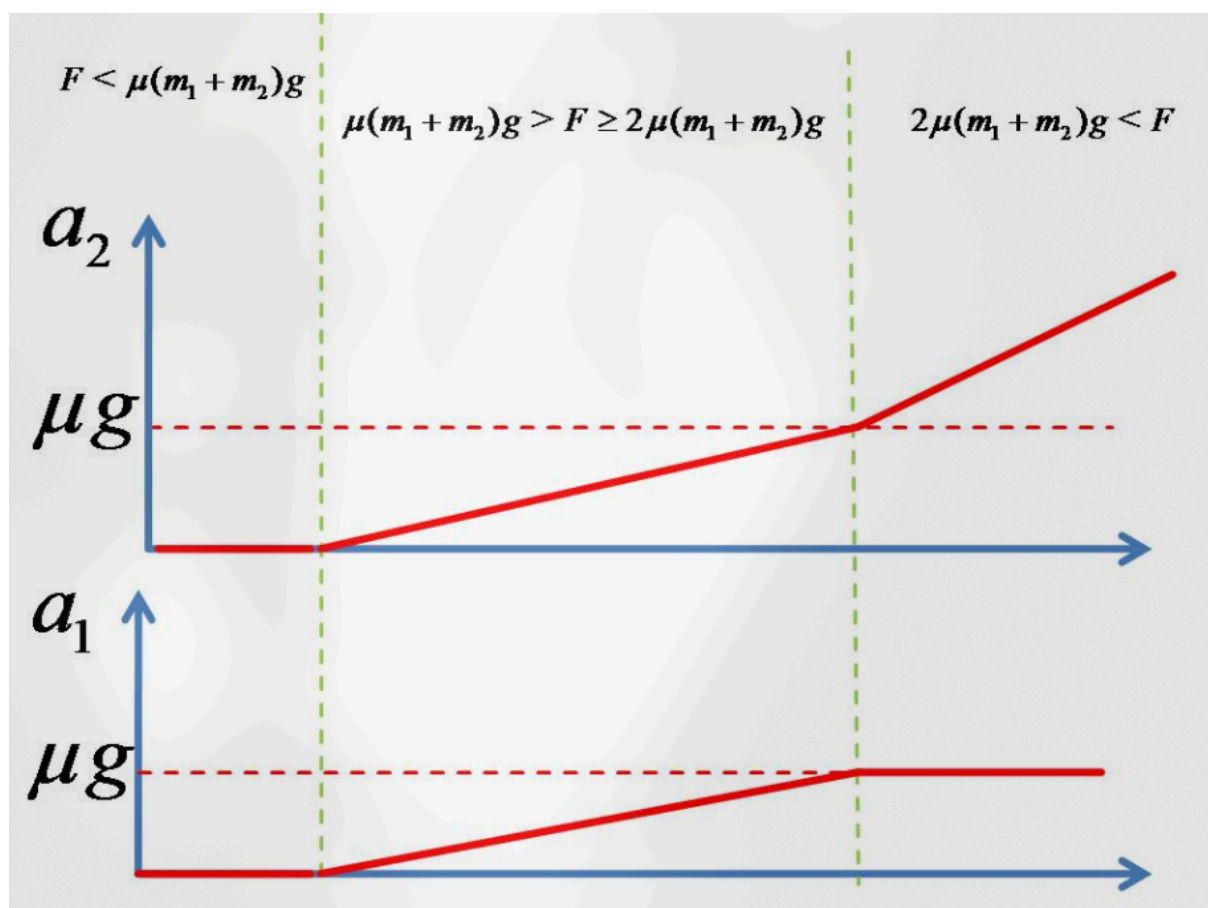
3. Пока сила будет изменяться в таких пределах

$$\mu(m_1 + m_2)g > F \geq 2\mu(m_1 + m_2)g$$

доска и брусок будут двигаться вместе, пока не начнется соскальзывание бруска с доски.

Их ускорение в этом случае можно определить так

$$(m_1 + m_2)a = F - \mu(m_1 + m_2)g$$



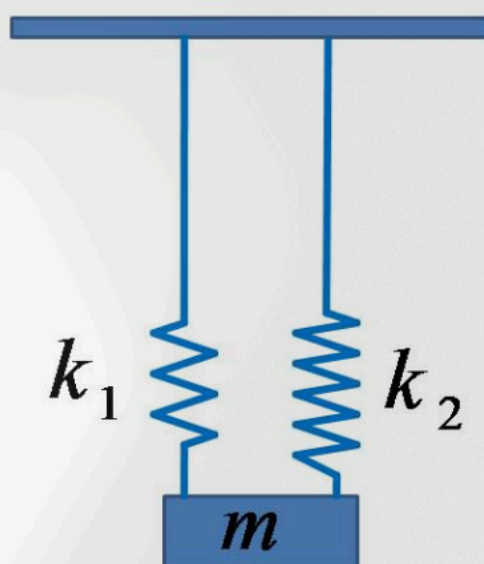
Параллельное соединение пружин.

$$x_1 = x_2$$

$$F = k_1 x_1 + k_2 x_2 =$$

$$= (k_1 + k_2) x$$

$$k_{\text{экв}} = (k_1 + k_2)$$



Последовательное соединение пружин.

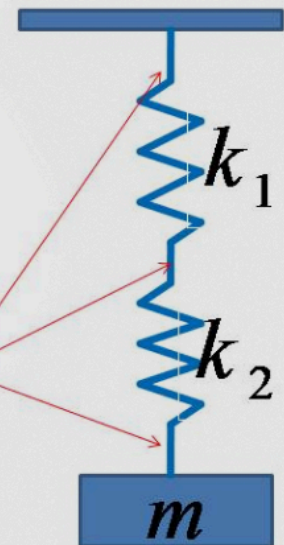
$$x_{\text{экв}} = x_1 + x_2$$

Одинаковые упругие
натяжения возникают во всех
сечениях системы .

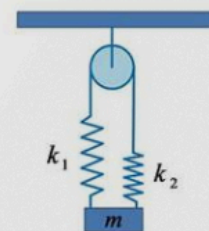
$$F = k_1 x_1 \quad F = k_2 x_2$$

$$F = k_{\text{экв}} (x_1 + x_2)$$

$$k_{\text{экв}} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$



Пример 2. Пружины жёсткостью k_1 и k_2 соединены нитью, перекинутой через блок. Снизу к пружинам прикреплён груз массой m . Нить достаточно длинная, чтобы пружины не задевали блока при колебании груза. Найдите эквивалентную жёсткость пружины.



$$F = k_1 x + k_2 x = k_{\text{экв}} x$$

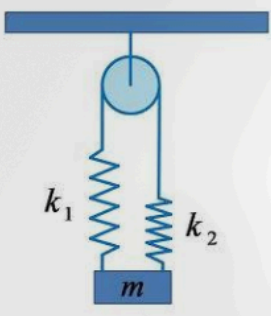
$$k_{\text{экв}} = k_1 + k_2$$

Параллельное соединение пружин

Одинаковые упругие напряжения возникают в любом сечении связки

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_{\text{экв}} (x_1 + x_2)$$

$$k_{\text{экв}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$



The diagram shows a pulley system. A blue horizontal bar is at the top. A blue pulley is attached to it. A blue rope goes over the pulley. On the left side of the rope, there is a blue spring labeled k_1 . On the right side, there is a blue spring labeled k_2 . Both springs are attached to a blue rectangular mass labeled m .

$$mg / 2 = k_1 x_1 \quad (1)$$

$$mg / 2 = k_2 x_2 \quad (2)$$

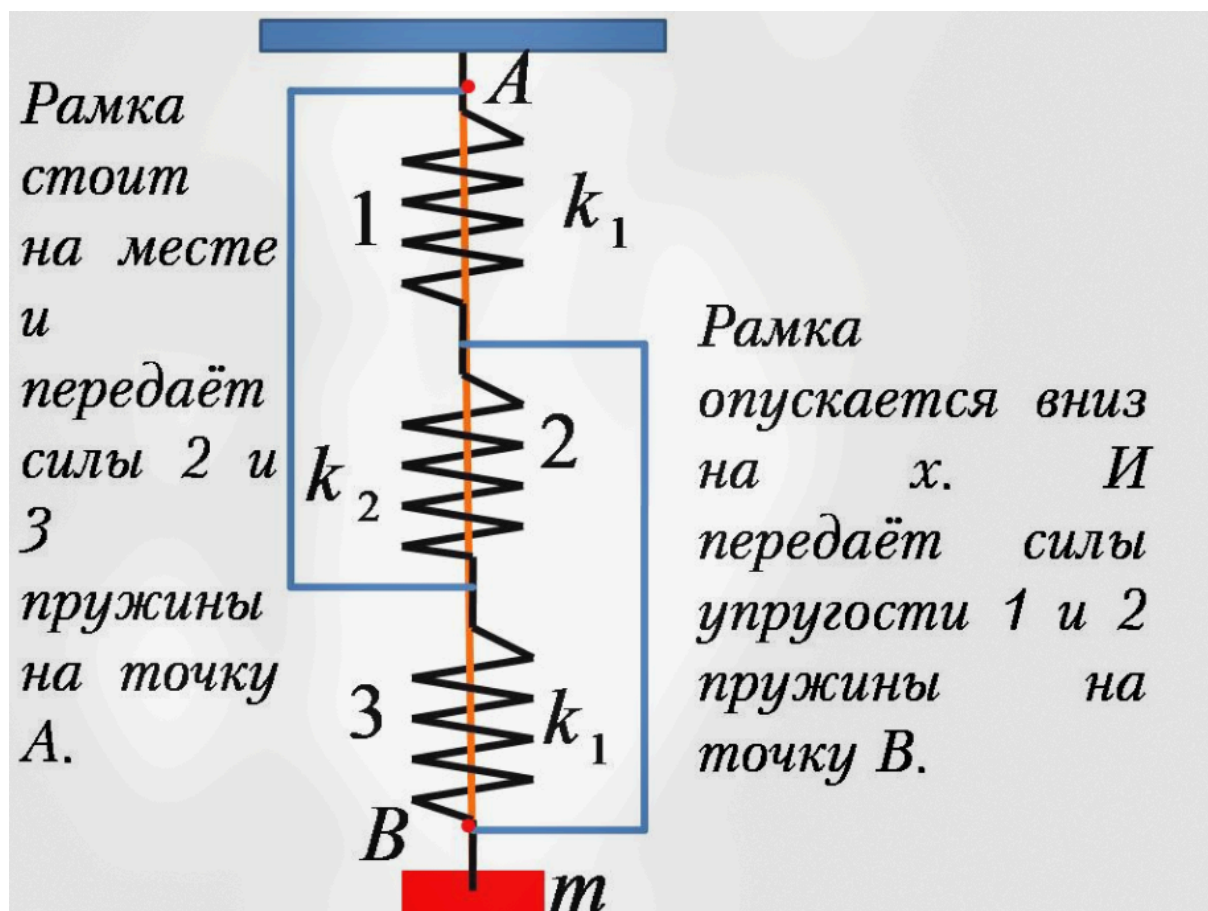
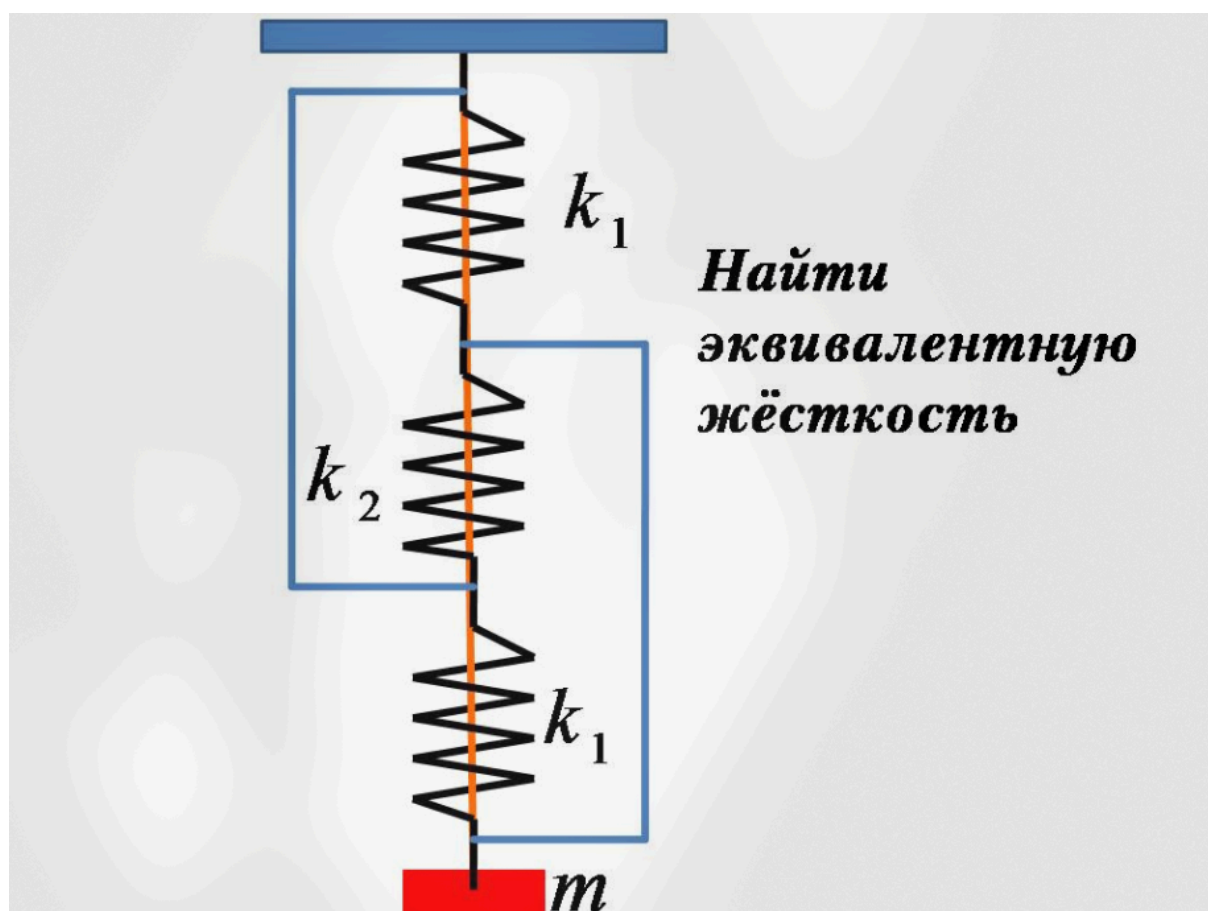
$$mg = k_{\text{экв}} (x_1 + x_2) / 2 \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) определяем

$$k_{\text{экв}} = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Пример. Три пружины соединены между собой, верхняя пружина закреплена на потолке. Пружины надеты на закрепленный на потолке стержень, к нижней пружине прикреплен груз, который может двигаться, не задевая стержень. К системе прикреплены две невесомые жесткие скобки (показаны синим цветом).

Определите эквивалентную жёсткость системы.

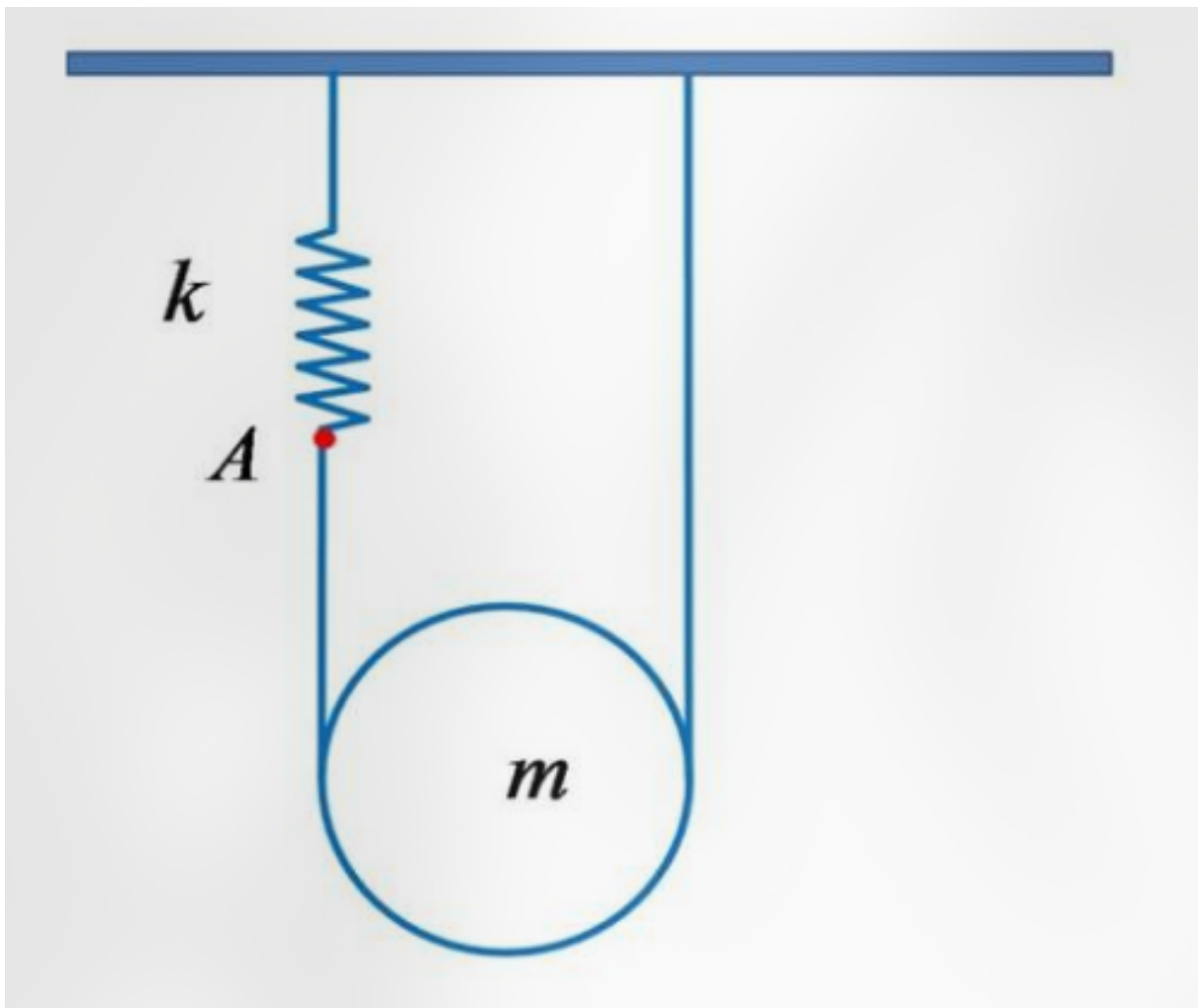


Средняя пружина сжимается, верхняя и нижняя растягиваются на одинаковую величину x . Силы упругости всех трёх пружин приложены к точке A и к точке B . Такое соединение эквивалентно параллельному соединению пружин.

$$k_{\text{экв}} = 2k_1 + k_2$$

Пример. (самостоятельная работа)

По ободу тонкого кольца массой m и радиусом R сделан паз, внутрь которого вставлен трос. При движении троса колесо поворачивается без проскальзывания. Один конец троса закреплен на потолке, второй - присоединен к пружине жесткостью k . Сначала колесо удерживают неподвижным, прикладывая некоторую силу в точке A , чтобы пружина не была деформированной, затем отпускают. В системе возникают колебания. Потерями механической энергии можно пренебречь.



Определите:

1. Величину силы F , которую надо было прикладывать к точке A .
2. Величину максимальной деформации пружины ΔX в процессе движения колеса.
3. Скорость V центра колеса, когда он в первый раз пройдет положение равновесия.
4. Максимальную угловую скорость W_{max} вращения колеса вокруг оси, проходящей через его центр, перпендикулярно его плоскости.

5. Полную кинетическую энергию E тела, когда его центр опустился на расстояние L относительно начального положения.

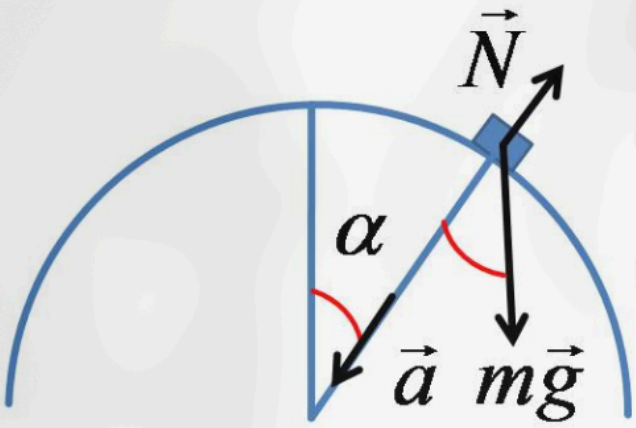
Пример .

С верхней точки полусферы, радиуса R начинает соскальзывать без трения небольшое тело массой m . Найти угол между нормалью к поверхности полусферы и вертикалью в той точке, где тело оторвётся от поверхности.



Тело оторвется от поверхности полусферы, когда вся составляющая силы тяжести, направленная вдоль радиуса, будет расходоваться на создание центростремительного ускорения. Сила реакции опоры в этот момент обратится в нуль.

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \alpha - N$$



$$m \frac{v^2}{R} = m g \cos \alpha \quad (1)$$

Скорость тела можно определить по закону сохранения энергии

$$m \frac{v^2}{2} = m g R (1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

Из (1) и (2)

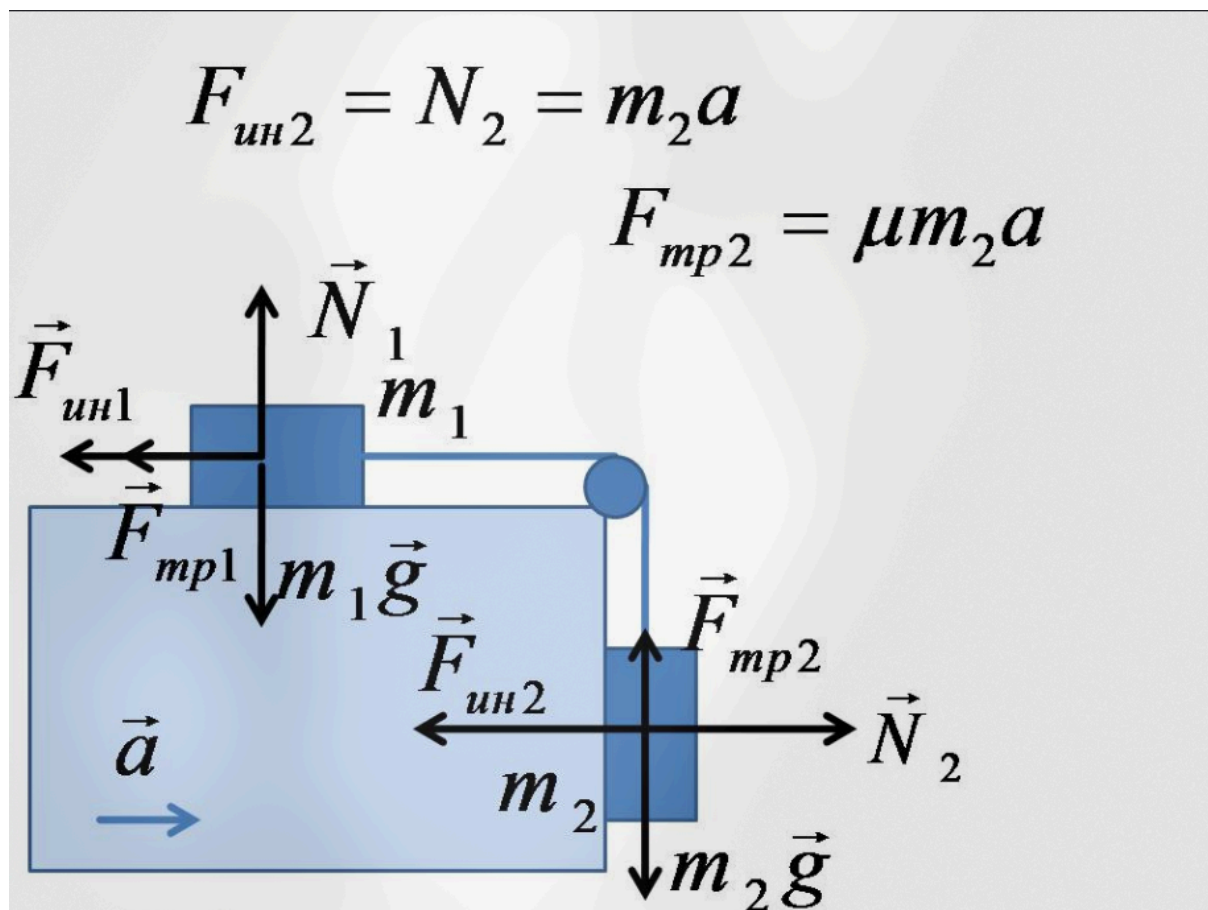
$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

Пример. На краю массивной подставки закреплен невесомый блок. Грузы, массой m_1 и m_2 связаны нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения грузов о подставку равен μ . Подставка движется вправо с ускорением a . Правый груз опускается. Вычислите ускорение грузов относительно подставки.

Д/З. С каким ускорением должна двигаться подставка, чтобы правый груз начал подниматься.

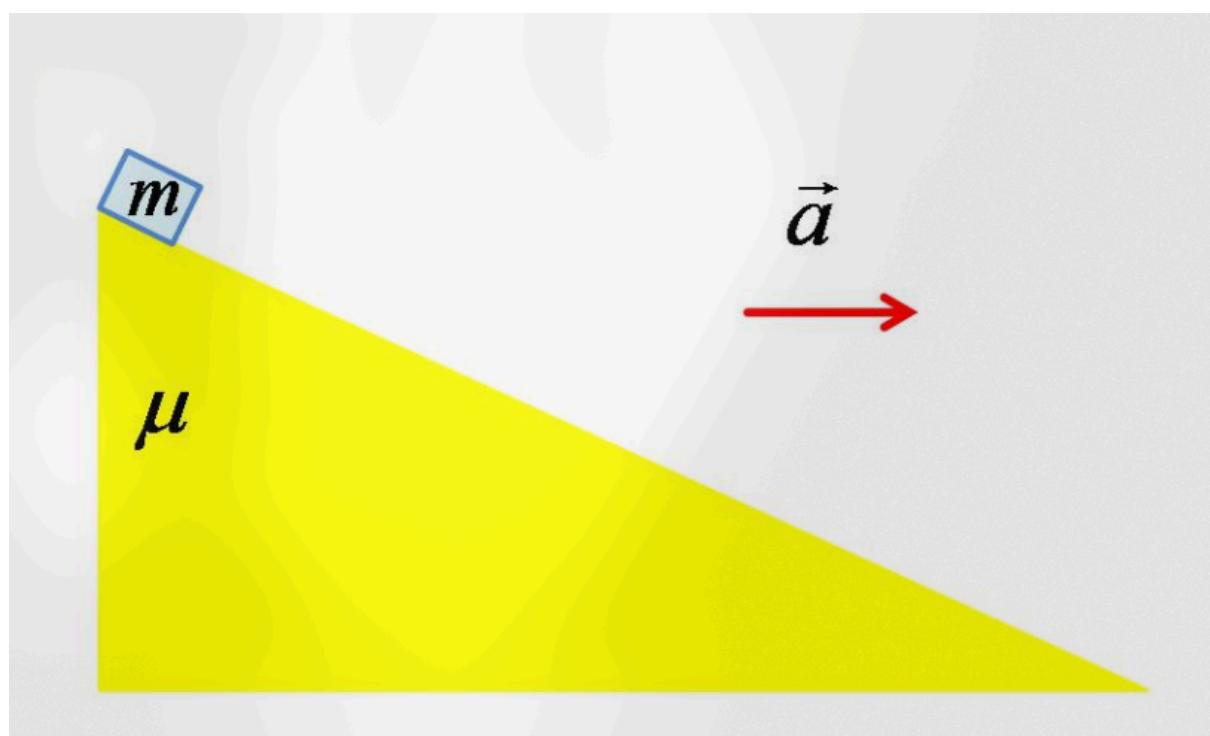
Решение

Будем решать задачу в неинерциальной системе отсчета. На грузы действует поступательная сила инерции. Она прижимает второй груз к подставке и определяет силу трения скольжения.



$$(m_1 + m_2)a_1 = m_2 g - \mu m_1 g - \mu m_2 a - m_1 a$$

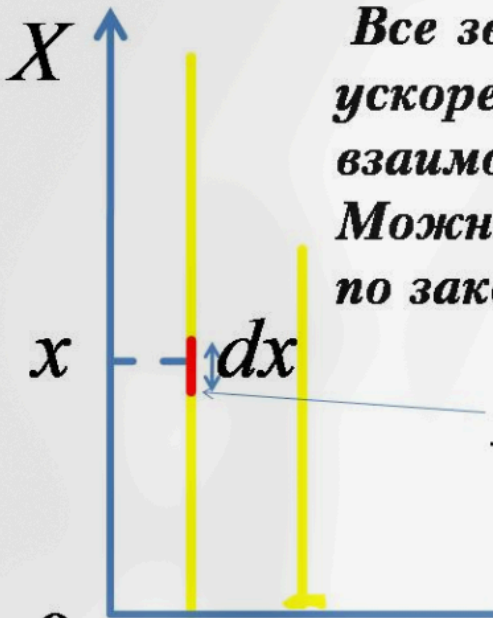
Пример. Брусок массой m поставили на клин, движущийся вправо с ускорением a и отпустили. Найти ускорение бруска относительно клина. Коэффициент трения между поверхностями равен μ .



Практика 5.

Пример. Цепочка массой m и длиной l висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити она упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

Решение. После пережигания нити все звенья цепочки начинают падать с ускорением g . Рассмотрим звено цепи массой dm , изначально находившееся на высоте x . Определим, какую скорость оно имеет в момент касания стола



Все звенья падают с ускорением g , не взаимодействуя друг с другом. Можно найти скорость звена по закону сохранения энергии

$$\frac{dm \cdot v^2}{2} = dm \cdot gx$$

Скорость звена, падающего с высоты x , в момент касания стола

$$v = \sqrt{2gx}$$

Звено передает столу импульс

$$dp = v dm = \sqrt{2gx} \frac{m}{l} dx$$

Суммарный импульс, который цепочка передаст столу

$$p = \int_0^l \sqrt{2gx} \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \sqrt{2g} \frac{2l^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2m}{3} \sqrt{2gl}$$

Пример. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F , сонаправленной с её скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью k кг/с.

Найти скорость и ускорение тележки, если в момент начала отсчета времени масса тележки с песком равна m_0 , а скорость равна нулю.

Решение. Запишем закон движения платформы.

$$(m - kt) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$a = \frac{F}{m - kt}$$

$$dv = \frac{F dt}{m - kt}$$

$$dv = \frac{F dt}{m_0 - kt}$$

Для того, чтобы решить уравнение, сделаем замену переменных:

$$m_0 - kt = z \quad dt = -\frac{dz}{k} \quad dv = -\frac{F dz}{kz}$$

Учитываем начальные условия:

$$v = -\frac{F}{k} \ln(m_0 - kt) + \frac{F}{k} \ln m_0$$

$$v = \frac{F}{k} \ln \frac{m_0}{(m_0 - kt)}$$

Пример. Платформа массой m_0 начинает двигаться вправо под действием горизонтальной силы F . Из неподвижного бункера на неё высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна k кг / с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы при погрузке



Решение. Запишем закон движения платформы с учетом реактивной силы.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt}$$

Спроектируем на горизонтальную ось

$$m \frac{dv}{dt} = F - v \frac{dm}{dt}$$

$$m dv + v dm = F dt$$

$$d(mv) = F dt$$

$$d(mv) = F dt \quad p = Ft + 0$$

Подставим зависимость массы от времени - найдем скорость

$$v = \frac{Ft}{m_0 + kt}$$

Продифференцируем по времени - найдем ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_0 F}{(m_0 + kt)^2}$$

Пример. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиуса R , зависит от пройденного пути по закону $E = \alpha S^2$ где α -постоянная, S -пройденный путь. Найти модуль силы, действующей на частицу, в зависимости от S .

Решение. Приращение кинетической энергии происходит из-за того, что действующая на частицу сила совершает работу

$$dE = F dS \quad (1)$$

Вычислим дифференциал от заданного выражения для кинетической энергии

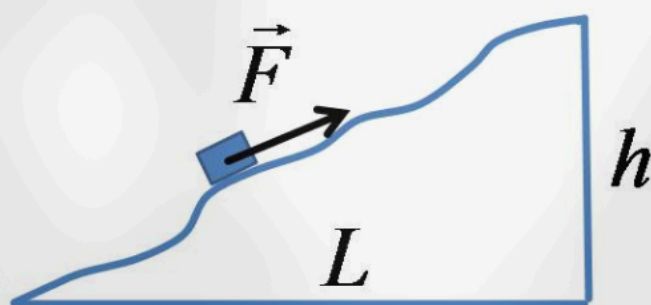
$$dE = 2\alpha S dS \quad (2)$$

Из (1) и (2)

$$F = 2\alpha S$$

Пример . Небольшое тело массой m медленно втащили на ледяную горку, действуя постоянной по модулю силой F , которая в каждой точке направлена по касательной к траектории.

Коэффициент трения равен μ . Найти работу этой силы, если высота горки равна h , а длина основания равна L .



Для того, чтобы втащить тело на горку, нужно совершить работу против силы трения и против силы тяжести.

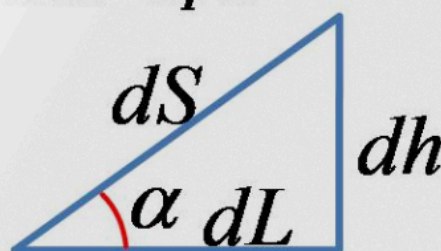
Элементарная работа силы трения на отрезке пути dS

$$- F_{\text{тр}} dS = - \mu m g \cos \alpha \cdot dS =$$

$$- \mu m g dL$$

Здесь элементарное перемещение вдоль поверхности горки dS выражено через элементарное перемещение по горизонтали dL .

$$dS = dL / \cos \alpha$$



Работа силы трения за все время движения

$$A_{\text{тр}} = - \int_S F_{\text{тр}} dS = -\mu mgL$$

Работа силы тяжести $A_{\text{тяж}} = -mgh$

Работа силы F

$$A = \mu mgL + mgh$$

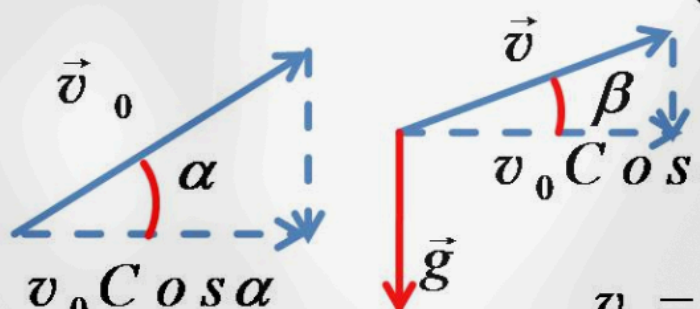
Пример. Какую мощность развивают двигатели ракеты массой m , если она неподвижно висит над поверхностью земли? Скорость истечения газов из сопла ракеты равна u .

Решение: Реактивная сила компенсирует действие силы тяжести $\frac{dm}{dt}u = mg$

Мощность двигателей

$$N = \frac{dm}{dt} \frac{u^2}{2} = \frac{mgu}{2}$$

Пример. Тело массой m , брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти среднюю мощность силы тяжести, развиваемую за всё время движения и мгновенную мощность, как функцию времени.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha} \quad (1)$$

$$v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (2)$$

$$N = mg \cdot v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$$

$$N = -mgv \sin \beta =$$

$$= -\frac{mgv_0 \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} =$$

$$mg(gt - v_0 \sin \alpha)$$

Пример. Человек массой m стоит на носу лодки массой M и длиной L . На какое расстояние S сместится лодка, если человек перейдет на корму.

Решение. По закону сохранения импульса придвижении человека со скоростью v относительно лодки, лодка приобретет относительно дна скорость V

$$0 = m(v - V) - MV$$

$$V = \frac{mv}{m + M}$$

Человек перейдет на корму за время

$$t = \frac{L}{v}$$

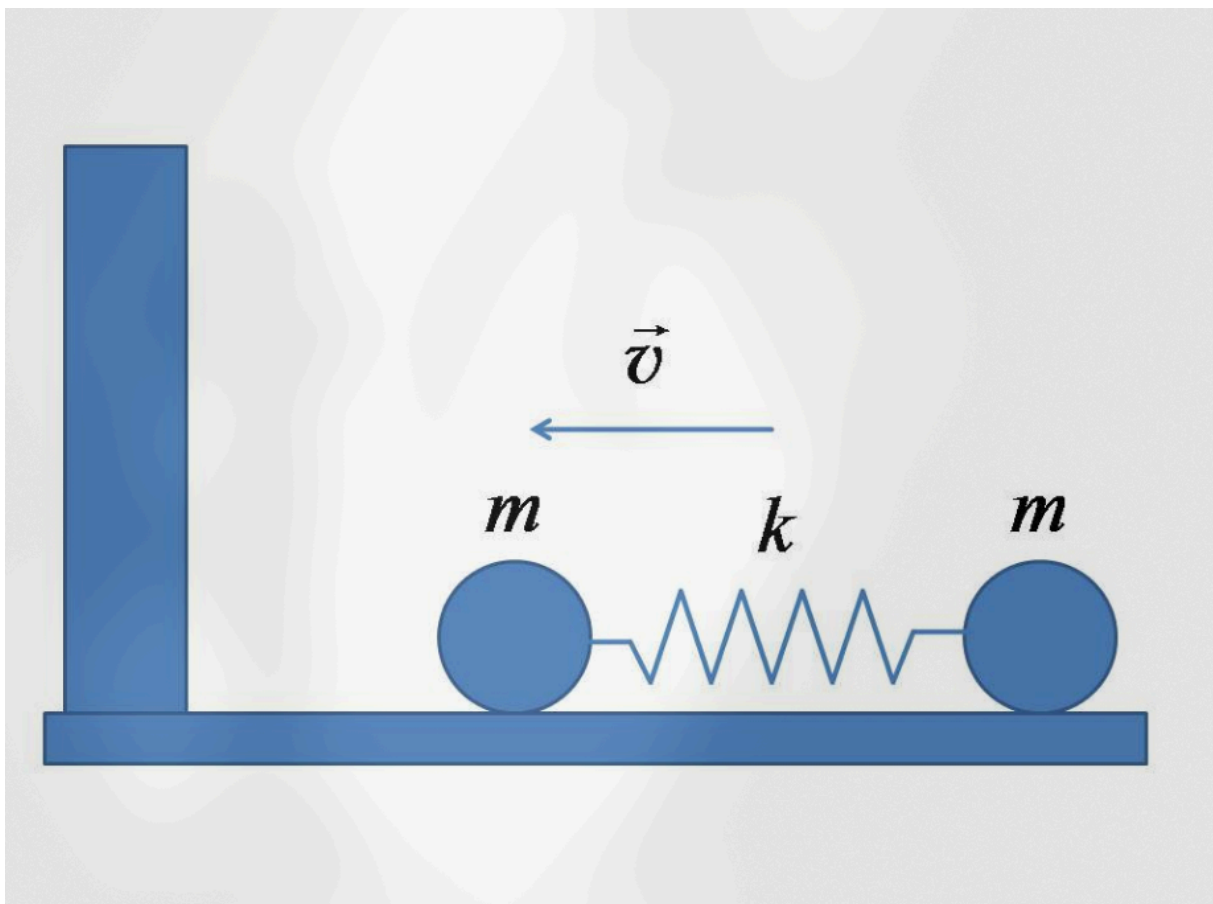
Лодка за это время сместится на расстояние

$$S = Vt = \frac{mL}{m + M}$$

Система человек-лодка замкнута. Ее центр масс не может сместиться относительно земли.

Д/З Решите задачу этим методом.

Пример. Два одинаковых шарика массой m соединены пружиной жесткостью k . Шарiki скользят по идеально гладкой горизонтальной поверхности и один из них абсолютно упруго ударяется о стену. Сколько времени будет продолжаться колебание шариков после прекращения колебаний.



Решение. В момент удара левого шарика о стену скорость его меняется на противоположную. Центр масс системы останавливается. Поскольку после этого внешние силы на систему не действуют - начинается колебание шариков относительно неподвижного центра масс. Каждый шарик движется, как пружинный маятник на пружине жесткостью $2k$.

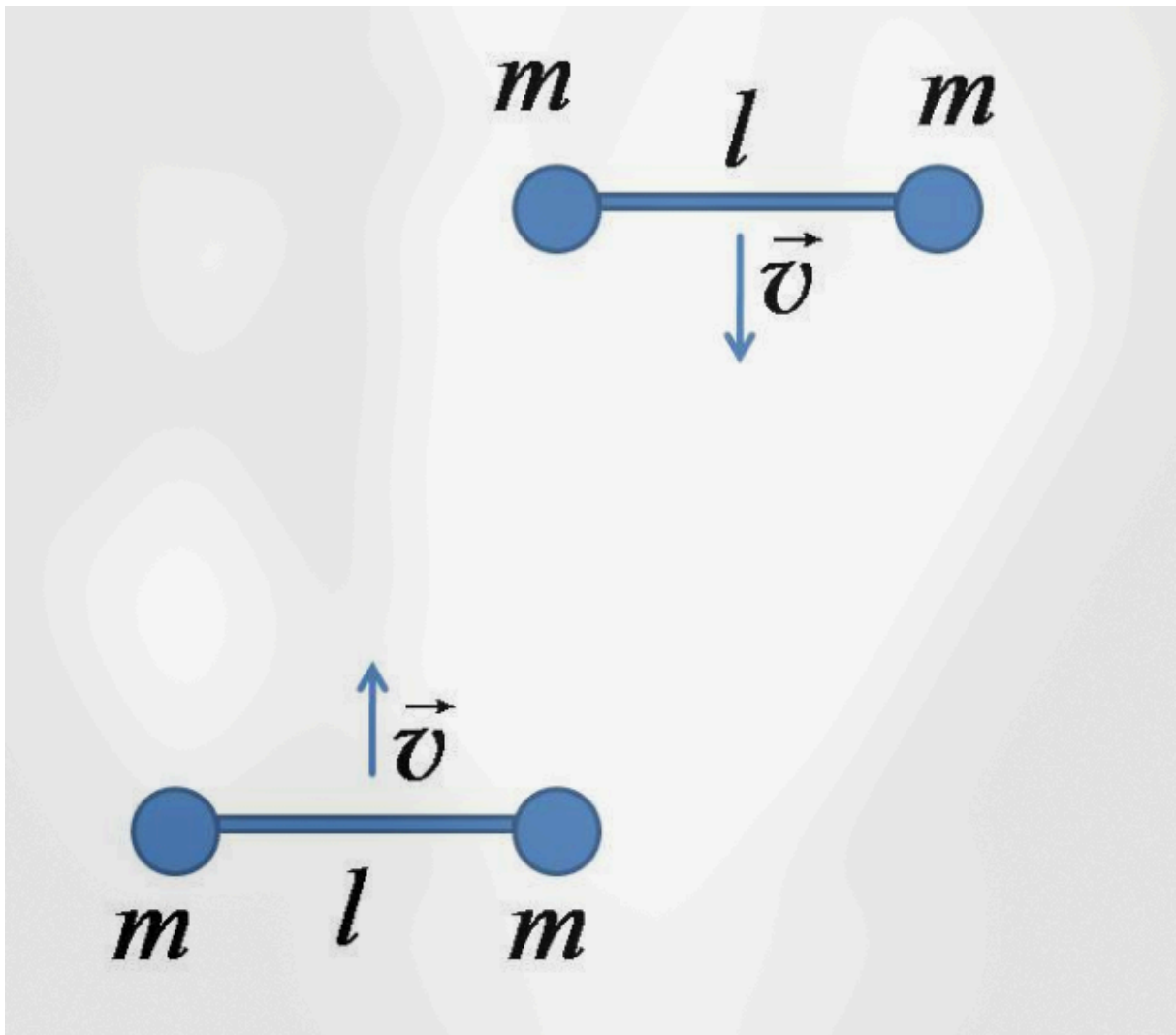
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Спустя половину периода левый шарик опять ударяется о стену и меняет скорость на противоположную. В этот момент скорости обоих шариков направлены вправо, система начинает двигаться вправо со скоростью v , без колебаний.

Д/З Допустим теперь, что левый шарик был тяжелее. В момент удара о стену он изменит скорость на противоположную - центр масс системы начнет двигаться направо! Вычислите его скорость. Шарики будут совершать колебания относительно центра масс. Не забудьте, что жесткости соответствующих частей пружины - от шарика до центра масс надо вычислить их по длинам. Найдите период колебаний шариков, скорость центра масс и зависимость скорости шариков относительно центра масс от времени.

Пример. Две гантели состоят из шариков массой m и невесомых стержней длиной l . Гантели движутся навстречу друг другу со скоростью v (см. рис). Считая удар шариков мгновенным и абсолютно упругим

1. Охарактеризовать движение гантелей после столкновения
2. Найти угловую скорость вращения гантелей
3. Сколько времени будут вращаться гантели
4. Как будут двигаться гантели после прекращения вращения



В момент удара скорости столкнувшихся шариков меняются на противоположные. Центры масс каждой из гантелей останавливаются. Обе гантели начинают вращаться по часовой стрелке относительно оси, проходящей через их середину с угловой скоростью.

$$\omega = \frac{v}{\frac{l}{2}}$$

Каждый шарик проходит половину окружности за время.

$$t = \frac{\pi l}{2v}$$

В этот момент уже другая пара шариков сталкивается и обменивается скоростями. Скорости обоих шариков правой гантели оказываются направленными вниз, а шариков левой - вверх.

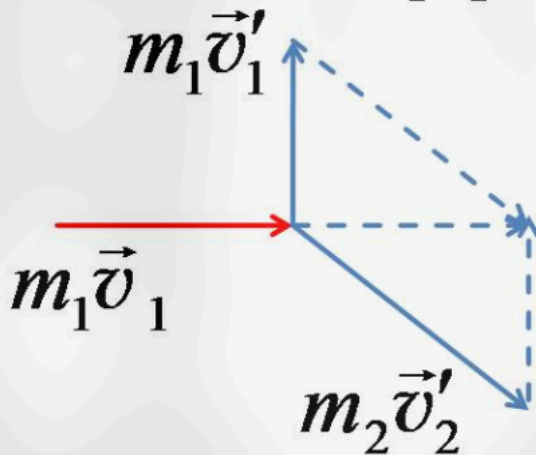
Гантели прекращают вращение и движутся поступательно со скоростями, направленными, как до первого столкновения.

Пример. Частица массой m_1 испытала абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей массой m_2 . Какую часть своей первоначальной энергии потеряла частица, если она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения.

Решение.

ЗСИ (см рис) $m_2^2 v_2'^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v_1'^2$

ЗСЭ $m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$



$$v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) = v_1'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Относительные потери энергии 1 тела

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1^2} = \frac{2m_1}{m_2 + m_1}$$

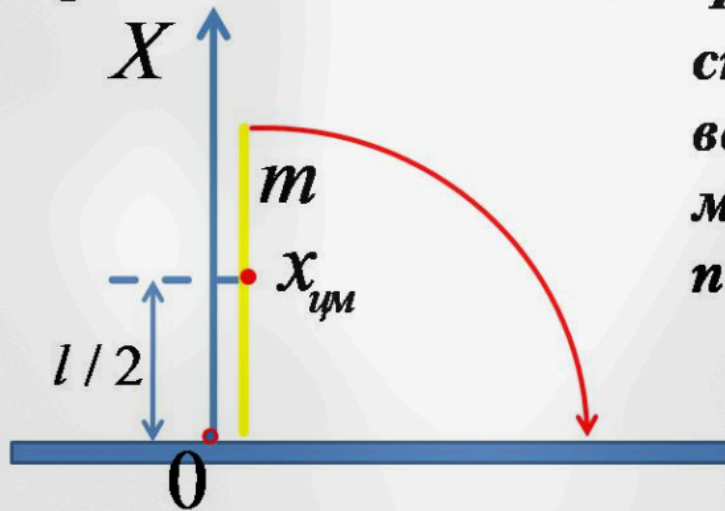
Пример. Снаряд, выпущенный со скоростью $v_0 = 100$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту разорвался в верхней точке траектории на 2 одинаковых осколка. Один осколок упал на землю прямо под точкой взрыва со скоростью $v_1 = 97$ м/с. С какой скоростью и на каком расстоянии от первого осколка упал на землю второй осколок?

Пример. Пушка массой M начинает свободно скользить вниз по гладкой плоскости, составляющей угол с горизонтом α . Когда пушка прошла путь S , произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом p в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда, найдите продолжительность выстрела.

Ответ: $\tau = \frac{p \cos \alpha - M \sqrt{2gS \cdot \sin \alpha}}{Mg \sin \alpha}$

Пример1 . Однородный стержень массой m и длиной l , поставленный вертикально на горизонтальный шероховатый пол, падает без проскальзывания.

Найти скорость верхнего конца в момент касания пола.



Решение

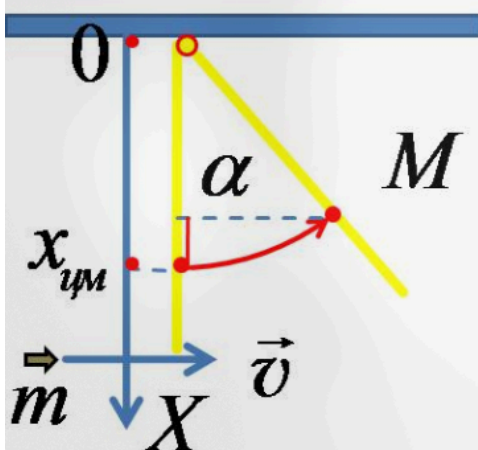
За время падения масс стержня опускается на $\frac{l}{2}$

Потенциальная энергия центра масс переходит в кинетическую энергию вращения стержня.

$$mg \frac{l}{2} = I \frac{\omega^2}{2} = \frac{ml}{3} \frac{\omega^2}{2}$$

$$v = \omega l = \sqrt{3gl}$$

Пример 2 .Однородный стержень массой M и длиной l шарнирно закреплён на потолке. Пуля массой m летит со скоростью $\vec{v}$, попадает в нижний конец стержня и застревает в нём.



Найти угловую скорость вращения стержня сразу после попадания пули. На какой угол повернётся стержень?

По закону сохранения момента импульса найдём угловую скорость вращения стержня сразу после попадания пули

$$mvl = \underbrace{\left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2 \right)}_{I_{\text{системы}}} \omega \quad (1)$$

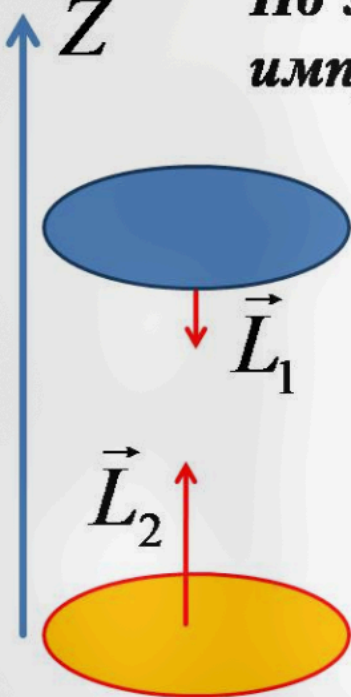
Найдем координату центра масс системы стержень-пуля

$$x_{\text{цм}}(m + M) = M \frac{l}{2} + ml \quad (2)$$

Угол отклонения стержня найдем по закону сохранения энергии. Кинетическая энергия системы переходит в потенциальную (используем высоту центра масс)

$$I \frac{\omega^2}{2} = (m + M) x_{\text{цм}} g (1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

Пример. Для горизонтальных диска вращаются вокруг вертикальной оси в противоположных направлениях. Первый диск имеет массу m_1 , радиус R_1 и угловую скорость ω_1 второй диск - массу m_2 , радиус R_2 и угловую скорость ω_2 . Верхний диск падает на нижний. Из-за трения они начинают вращаться вместе. Найдите их общую угловую скорость.



По закону сохранения момента импульса

$$-\frac{m_1 R_1^2}{2} \omega_1 + \frac{m_2 R_2^2}{2} \omega_2 =$$

$$= \left(\frac{m_1 R_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{2} \right) \omega_z$$

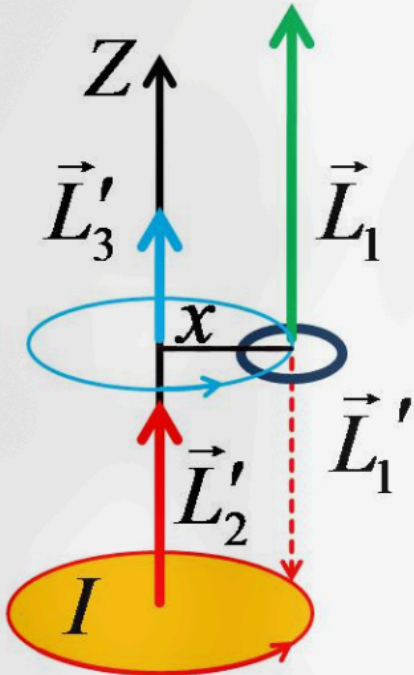
Вычислите сами, какое количество теплоты выделилось из-за трения

Пример. Человек стоит в центре неподвижной скамейки Жуковского и держит на вытянутых руках на расстоянии x от оси скамейки колесо массой m и радиусом r . Ось колеса вертикальна, колесо вращается с угловой скоростью ω_1 . Человек резко поворачивает ось колеса на 180° градусов. Угловая скорость колеса становится равной ω_2 . Вычислите угловую скорость скамейки. Момент инерции человека и скамейки I .

По закону сохранения момента импульса

до поворота

после поворота



The diagram shows a wheel of mass m and moment of inertia I rotating about a vertical Z -axis. The center of mass is at a horizontal distance x from the axis. Before a rotation, the angular momentum vector $\vec{L}_1$ is vertical. After a rotation, the angular momentum vector $\vec{L}_1'$ is tilted. The new angular momentum is the sum of the original angular momentum and the angular momentum of the center of mass motion: $\vec{L}_1' = \vec{L}_1 + \vec{L}_2' + \vec{L}_3'$.

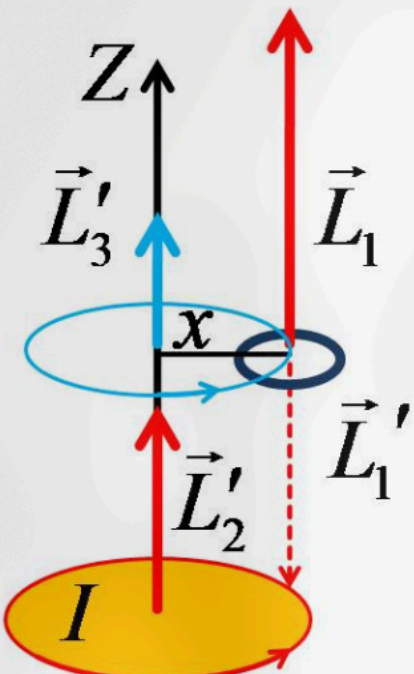
$$L_{1z} = L'_{1z} + L'_{2z} + L'_{3z}$$

$$mr^2\omega_1 = -mr^2\omega_2 + I\omega + mx^2\omega$$

$mr^2\omega_1 =$

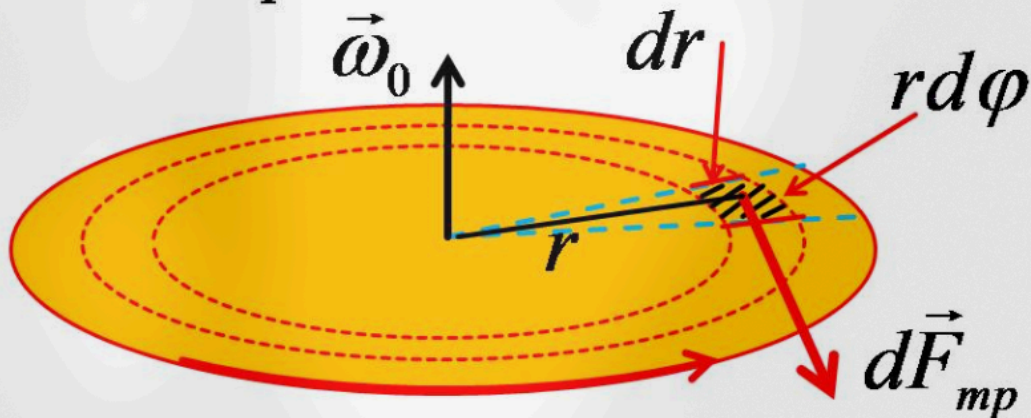
$= -mr^2\omega_2 + I\omega + \underline{mx^2\omega}$

Это слагаемое учитывает то, что при вращении скамейки центр масс колеса движется по окружности радиусом x

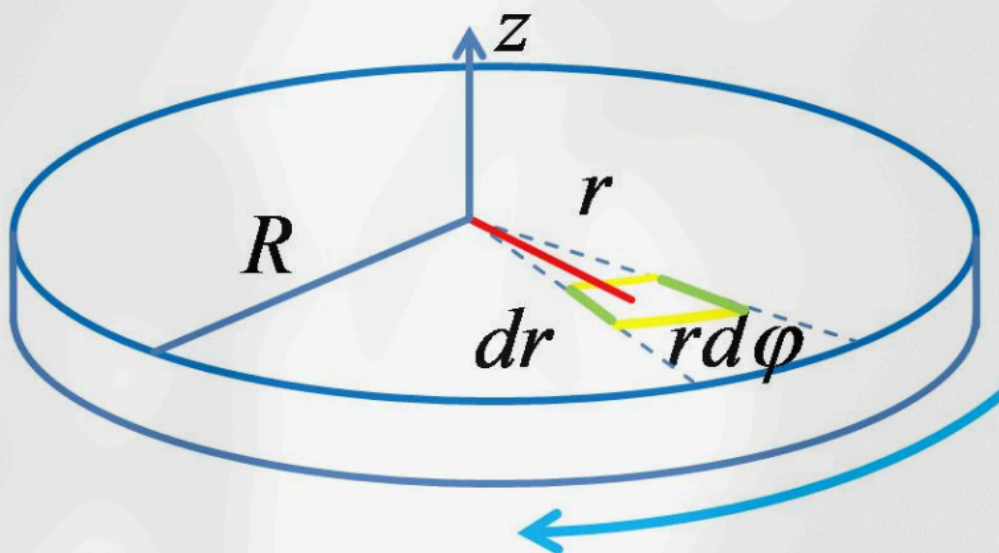


The diagram is identical to the one in the first block, showing the wheel and the vectors $\vec{L}_1$, $\vec{L}_1'$, $\vec{L}_2'$, and $\vec{L}_3'$. A blue arrow points from the text 'Это слагаемое' to the term $mx^2\omega$ in the equation.

Пример 5. Диск массой m и радиусом R вращающийся с угловой скоростью ω_0 кладут на шероховатую поверхность. Коэффициент трения равен μ . За какое время диск остановится?



Вычислите работу силы трения за всё время торможения.



$$dS = r dr d\phi$$

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r dr d\phi$$

Вычислим момент силы трения. Выделим элементом площадью

$$dS = r dr d\varphi$$

Его масса $dm = \frac{m}{\pi R^2} r dr d\varphi$

На этот элемент будет действовать сила трения

$$dF = \mu \frac{mg}{\pi R^2} r dr d\varphi$$

Её момент $dM = \mu \frac{mg}{\pi R^2} r^2 dr d\varphi$

Момент силы трения, действующий на весь диск,

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu \frac{mg}{\pi R^2} r^2 dr d\varphi = \frac{2}{3} \mu mg R$$

Суммарная работа момента силы трения

$$A = \int_0^\varphi M_z d\varphi$$

равна приращению кинетической энергии. Момент силы трения не зависит от угла поворота, поэтому нет необходимости интегрировать по углу. За всё время торможения диск повернулся на угол φ такой, что

$$\begin{aligned} M_z \cdot \varphi &= -I \frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{2}{3} m \mu R g \cdot \varphi &= -\frac{m R^2}{2} \frac{\omega_0^2}{2} \end{aligned}$$

Угол поворота диска за всё время торможения

$$\varphi = \frac{3\omega_0^2 R}{8\mu g}$$

Можно воспользоваться законом динамики вращательного движения. Получится несколько дольше. Запишем закон динамики вращательного движения диска

$$I\varepsilon_z = M_z$$

$$\frac{m R^2}{2} \varepsilon = \frac{2}{3} \mu mg R$$

Угловое ускорение диска $\varepsilon = \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}$

Вычислим время торможения диска

$$\omega_0 - \varepsilon t = 0 \quad t = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}$$

За это время диск повернется на угол

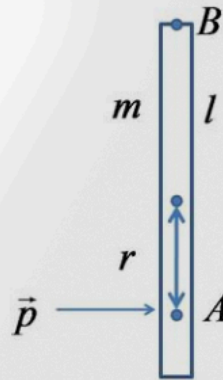
$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{3\omega_0^2 R}{8\mu g}$$

Пример. Тонкий стержень массой m и длиной l лежит на горизонтальной гладкой поверхности. За очень малый интервал времени он получает импульс p , приложенный к точке A , находящейся на расстоянии r от центра стержня. Найдите

1. Скорость центра масс стержня сразу после удара.
2. Угловую скорость вращения стержня сразу после удара

3. Найдите скорость точки B , расположенной на конце стержня сразу после удара.

4. Каким должно быть расстояние r , чтобы сразу после удара точка B оставалась неподвижной?



Решение.

1. По закону сохранения импульса $p = mv_c$, где v_c - скорость центра масс сразу после удара

$$v_c = \frac{p}{m}$$

2. По закону сохранения момента импульса стержень будет вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс с угловой скоростью ω

$$pr = \frac{ml^2}{12}\omega$$

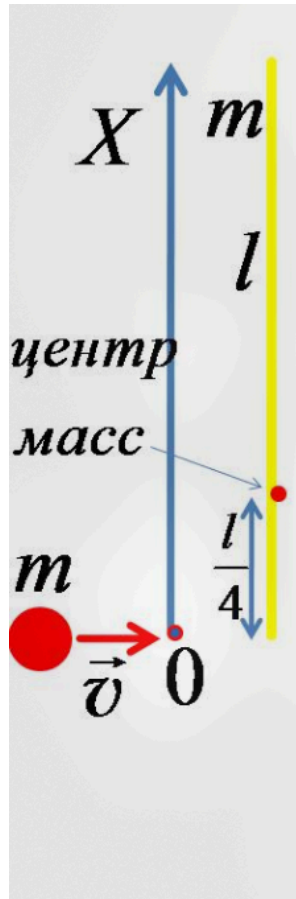
3. Скорость точки B сразу после удара.

$$v_B = -\omega \frac{l}{2} + v_c = -\frac{12pr}{ml^2} \frac{l}{2} + \frac{p}{m} = \frac{p}{m} \left(1 - 6\frac{r}{l} \right)$$

Для того, чтобы точка B сразу после удара осталась неподвижной, расстояние r должно быть равно $\frac{l}{6}$.

Пример. Тонкий стержень массой m и длиной l лежит на горизонтальной. Абсолютно гладкой поверхности. Маленький кусок замазки массой m (такой же) летит со скоростью v перпендикулярно к нему и попадает в конец стержня. Вычислите

1. Скорость центра масс до и после удара
2. Чему равен момент импульса стержня до и после удара
3. Чему равна угловая скорость вращения стержня относительно центра масс после прилипания замазки
4. На сколько уменьшится кинетическая энергия системы при столкновении.



$$x_{\text{цм}} = \frac{ml / 2 + 0}{m + m} = \frac{l}{4}$$

Система замкнута, скорость центра масс до удара и после не может измениться. После удара система будет двигаться поступательно так, чтобы скорость центра масс не изменилась и вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс.

Скорость центра масс

$$v_{\text{цм}} = \frac{mv + 0}{m + m} = \frac{v}{2}$$

Начальный момент импульса системы - момент импульса кусочка замазки относительно центра масс.

$$L = \frac{mvl}{4}$$

После попадания замазки момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно к стержню,

$$I = \left(\frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right) + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 = \frac{5}{24} ml^2$$

По закону сохранения момента импульса

$$L = L' \quad \frac{mvl}{4} = \frac{5}{24}ml^2\omega$$

Угловая скорость вращения стержня

$$\omega = \frac{6}{5} \frac{v}{l}$$

Кинетическая энергия системы после удара складывается из энергии поступательного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через центр масс

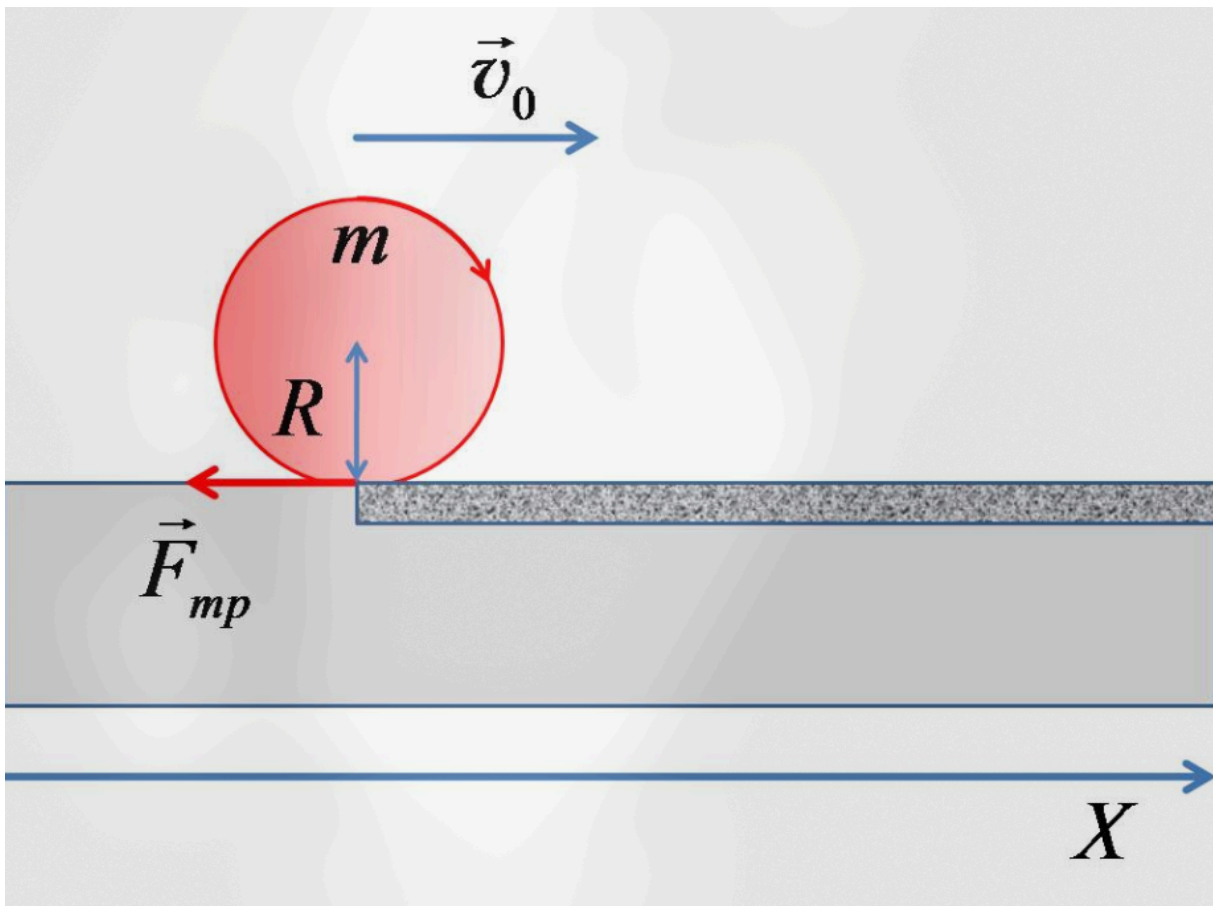
$$E = \frac{2m}{2}(v_{\text{цм}})^2 + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E = \frac{2m}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{5}{24}ml^2 \frac{36v^2}{25l^2} \frac{1}{2} = \frac{2}{5}mv^2$$

Выделившееся при ударе количество теплоты равно убыли кинетической энергии системы

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{2}{5}mv^2 = \frac{1}{10}mv^2$$

Пример. Шар массой m и радиусом R скользит по гладкой, горизонтальной поверхности и наезжает на шероховатую полосу, где коэффициент трения равен μ . Спустя какой промежуток времени после этого шар будет катиться без проскальзывания? Какую работу совершит сила трения скольжения за все время движения шара?



Решение. Когда шар наезжает на шероховатую полосу, на него начинает действовать сила трения скольжения. Эта сила тормозит центр масс шара

$$ma_x = -\mu mg$$

$$v_{\text{цм}} = v_0 - \mu gt \quad (1)$$

и раскручивает шар $I\varepsilon = M_{\text{трения}}$

$$\frac{2}{5}mR^2\varepsilon = \mu mgR \quad (2)$$

Из (2) определим угловое ускорение точек шара

$$\varepsilon = \frac{5\mu g}{2R}$$

Угловая скорость этих точек линейно увеличивается со временем.

Линейная скорость

$$\omega = \varepsilon t = \frac{5\mu g}{2R}t \quad (3)$$

вращения точек поверхности шара относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс,

$$v_{\text{лин}} = \omega R = \frac{5\mu g}{2}t \quad (4)$$

Таким образом, в начале движения по шероховатой поверхности шар проскальзывает из-за того, что скорость поступательного движения его центра масс (1) превосходит линейную скорость вращения точек его поверхности относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс (4).

$$v_0 - \mu gt > \frac{5\mu g}{2}t$$

Проскальзывание прекратится в момент времени

$$t = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}, \quad (5)$$

когда эти скорости сравниваются.

Скорость центра масс шара в этот момент определим из (1) и (5):

$$v = \frac{5}{7}v_0 \quad (6)$$

Работа силы трения скольжения равна приращению кинетической энергии шара

$$A = E_k - E_{k0} = \frac{7}{10}mv^2 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{1}{7}mv_0^2$$

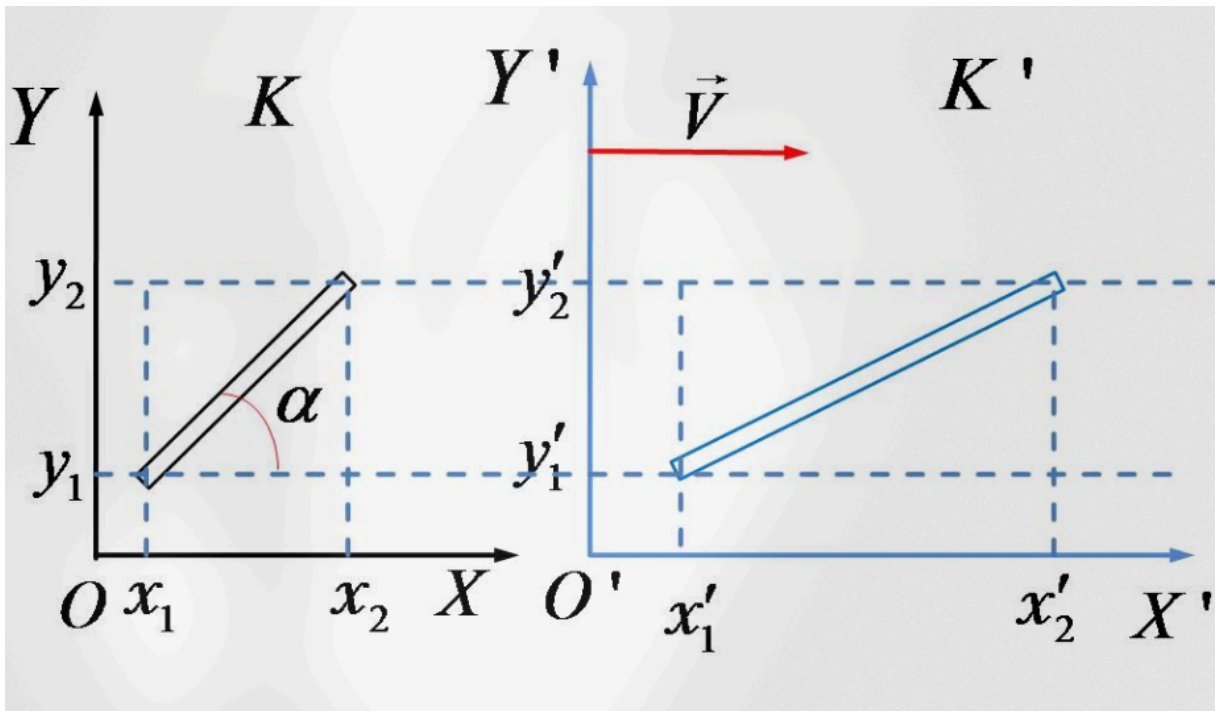
Практика 7.

Пример. Какую скорость нужно сообщить стержню в направлении вдоль его оси, чтобы Лоренцево сокращение длины составило 20 процентов.

Пример. С какой скоростью движется релятивистская масса на 10 процентов больше ее массы.

Пример. С какой скоростью движется релятивистская частица, если ее импульс на 5 процентов отличается от классического.

Пример. В инерциальной системе отсчета K вдоль оси Ox со скоростью $v = \frac{c}{2}$ движется стержень. Ось стержня развернута под углом α к направлению движения. Измеряя длину стержня в K -системе, получили результат l . Определите собственную длину стержня и угол, который ось стержня образует с осью Ox' системы K' , движущейся вместе со стержнем.



Свяжем со стержнем систему K' . Она будет двигаться относительно K -системы со скоростью $V = \frac{c}{2}$. Определим длину стержня l_0 в K' -системе. Для этого найдем разности координат концов стержня $\Delta x'$ и $\Delta y'$ и вычислим l_0 как корень квадратичный из суммы квадратов этих величин.

$$l_0 = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2} \quad (1)$$

Преобразования Лоренца для координат:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2)$$

$$\Delta y' = y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 = \Delta y \quad (3)$$

В K -системе разности координат концов стержня связаны с его длиной уравнениями

$$\Delta x = l \cos \alpha \quad (4)$$

$$\Delta y = l \sin \alpha \quad (5)$$

Подставляем (4) и (5) в (2) и (3), а затем полученные уравнения в (1), определим собственную длину стержня l_0 :

$$l_0 = \sqrt{\frac{l^2 \cos^2 \alpha}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} + l^2 \sin^2 \alpha} = \frac{l \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 1.12l$$

Определим теперь тангенс угла, который стержень образует с осью X' системы K' .

$$\tan \alpha' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Пример. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы τ_0 . Какой путь сможет пройти эта частица до распада в K -системе, где её время жизни равно τ .

Решение. K' -система связана с частицей. Нам нужно определить скорость частицы в K -системе, фактически, это скорость системы K' относительно K -системы.

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad V = c \sqrt{1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2}}$$

До распада в K -системе частица пройдет путь

$$S = V\tau = c\tau \sqrt{1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2}}$$

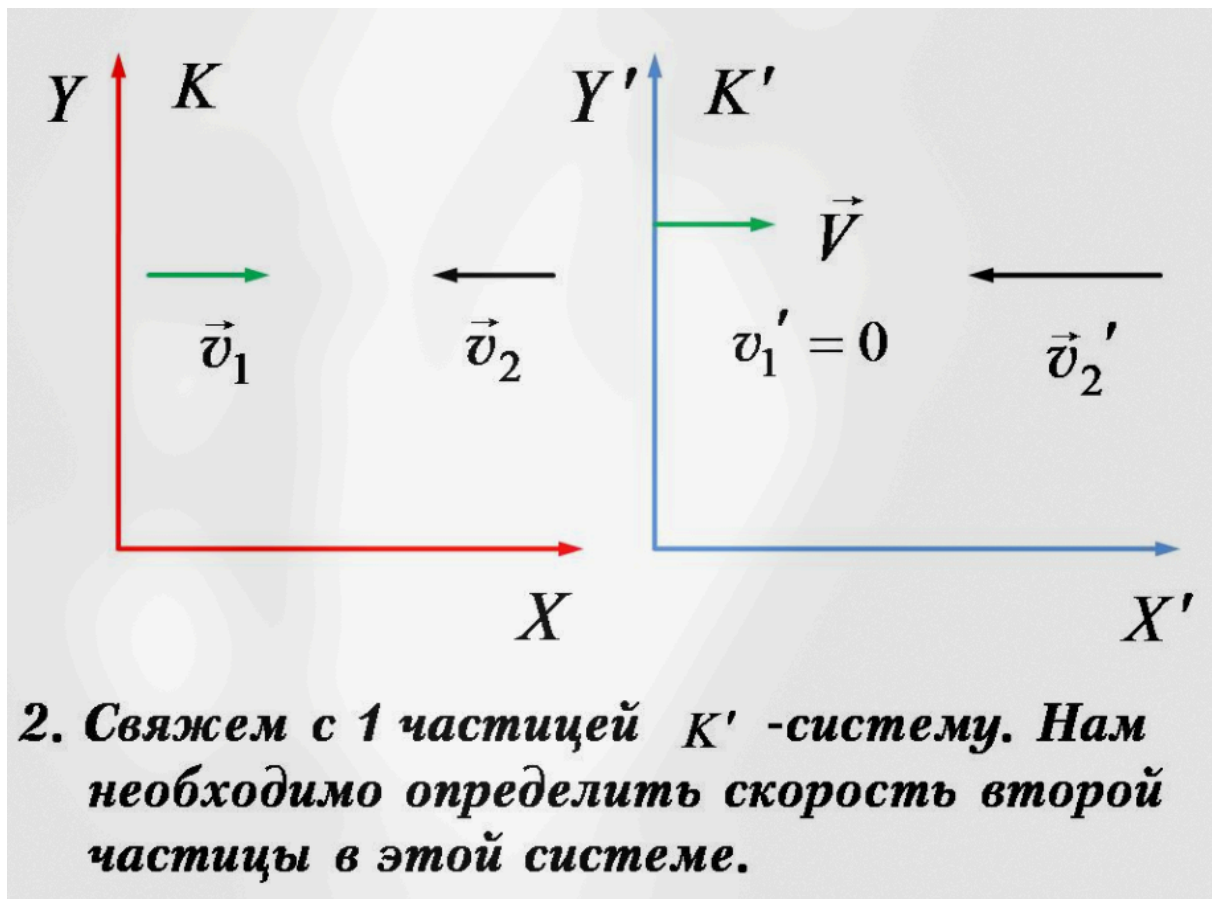
Пример. Две релятивистские частицы движутся в K -системе отсчета навстречу друг другу по одной прямой с одинаковой скоростью $v = 0.7c$. Определите:

1. Скорость сближения частиц в K -системе
2. Модуль скорости второй частицы в системе отсчета, связанной с первой частицей.

Решение.

1. Скорость сближения частиц в K -системе - скорость, с которой уменьшается расстояние между ними в этой системе.

$$v_{\text{сбл}} = 1.4c$$



Воспользуемся формулой преобразования скоростей:

$$v'_{2x} = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = \frac{-2}{1 + \frac{v_2^2}{c^2}} v^2 = -0.94c$$

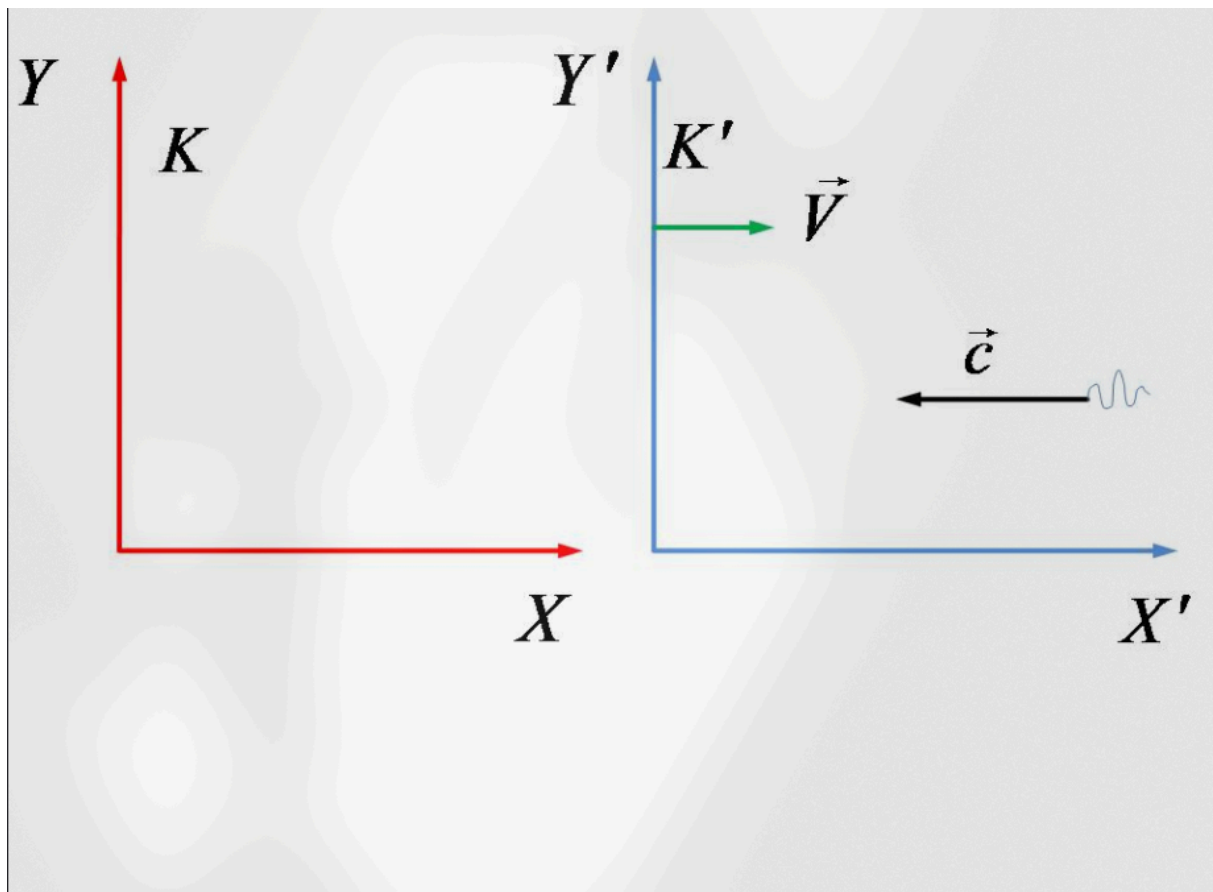
С этой скоростью может быть передана информация. Она не превосходит скорость света.

Пример. В системе отсчета связанной с неподвижными звездами два космических корабля летят навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v = 0.2c$

Второй корабль испускает импульс света.

Вычислите:

1. Скорость сближения фотона и первого корабля в системе отсчета, связанной с неподвижными звездами.
2. В системе отсчета, связанной с первым кораблем.



1. В K -системе отсчета “неподвижные звезды” расстояние между фотоном и первым кораблём уменьшается со скоростью

$$v_{\text{сбл}} = 0.2c + c = 1.2c$$

1. В системе отсчета, связанной с неподвижными звездами, скорость фотона $v_x = -c$

Свяжем с первым кораблём K' - систему.

Её скорость относительно K -системы $V = 0.2c$

Формула преобразования скоростей даёт для проекции скорости фотона на ось системы OX' результат K' :

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} = \frac{-c - 0.2c}{1 + \frac{c \cdot 0.2c}{c^2}} = -c$$

Постулат Эйнштейна утверждает, что скорость света одинакова во всех системах отсчета. Именно такой результат мы и должны были получить.

Пример. При какой скорости движения частицы ее кинетическая энергия равна ее энергии покоя?

Решение

Энергия покоя частицы $E_0 = mc^2$

Кинетическая энергия частицы

$$E_K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.87c$$

Пример. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы, имеющей массу m , от $0.60c$ до $0.80c$? Во сколько раз меньше получится результат, если проводить вычисления по формулам классической механики?

Решение. Работа идет на увеличение кинетической энергии частицы

$$A_{\text{рел}} = E_{K2} - E_{K1} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - 1 \right) \right) = 0.42mc^2$$

По классической формуле

$$A_{\text{кл}} = E_{K2} - E_{K1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 0.14mc^2.$$

$$\frac{A_{\text{рел}}}{A_{\text{кл}}} = 3.$$

Пример. Общая мощность излучения Солнца составляет $3.8 \cdot 10^{26}$ Вт. Вычислите, на сколько килограммов уменьшается масса Солнца за 1 нс.

Решение. Энергия, которую излучает Солнце за время t , равна

$$Pt = \Delta mc^2$$

$$\Delta m = \frac{Pt}{c^2} = 4.2 \text{ кг}$$

Пример. Согласуется ли с принципами специальной теории относительности представление об электроны как о вращающемся вокруг своей оси однородном шарике массой $m = 9.11 \cdot 10^{-30}$ кг и радиуса $R = 2.82 \cdot 10^{-15}$ м обладающем собственным моментом импульса $M = 0.913 \cdot 10^{-34} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$

(Вытекающее из квантовой теории и подтвержденное экспериментально значение собственного момента импульса электрона).