

Механика.

© *С. А. Куратова*, 2015

Иродов И.Е.

Механика.

Физика конденсированных сред.

Сивухин Д.В. Курс общей физики.

Механика.

Термодинамика и молекулярная физика.

Савельев И.В. Курс ОБЩЕЙ физики.

Механика.

Термодинамика и молекулярная физика.

Яворский Б.М. , Детлаф А.А.

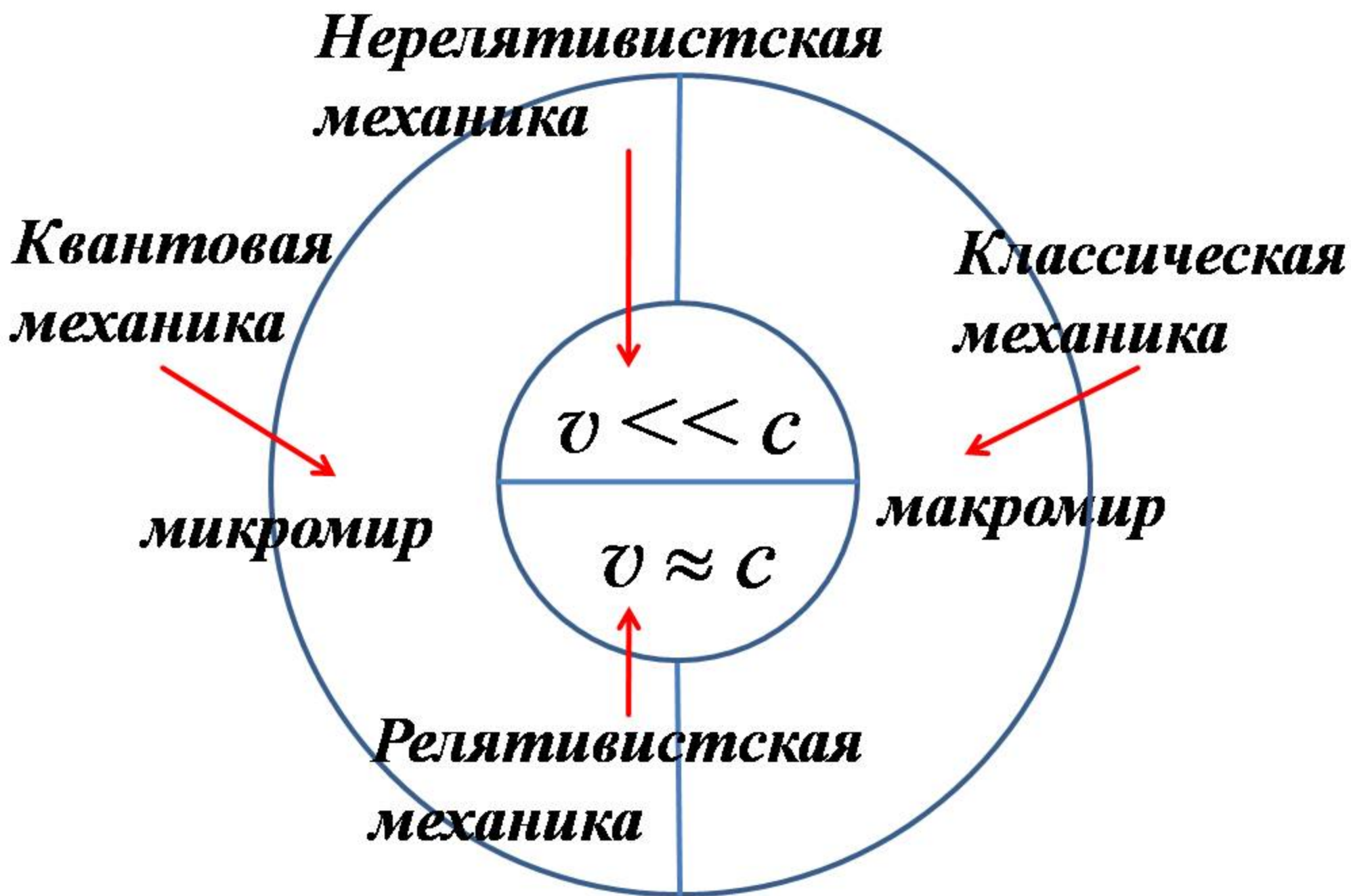
Курс общей физики.

***Справочник по физике. (читать после
экзамена)***

Лекция 1.

Кинематика поступательного движения.

Механика – наука о движении и равновесии тел.



Материальной точкой называется тело, размеры и форма которого в условиях данной задачи несущественны.

Абсолютно твёрдое тело - система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

Механическое движение - изменение положения тела в пространстве с течением времени.

Виды механического движения.

- 1) Поступательное***
- 2) Вращение вокруг неподвижной оси***
- 3) Вращение вокруг неподвижной точки***
- 4) Плоское движение***
- 5) Свободное движение.***

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, всё время остаётся параллельной своему начальному положению.

Плоским называется такое движение твёрдого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной (в данной системе отсчёта) плоскости.

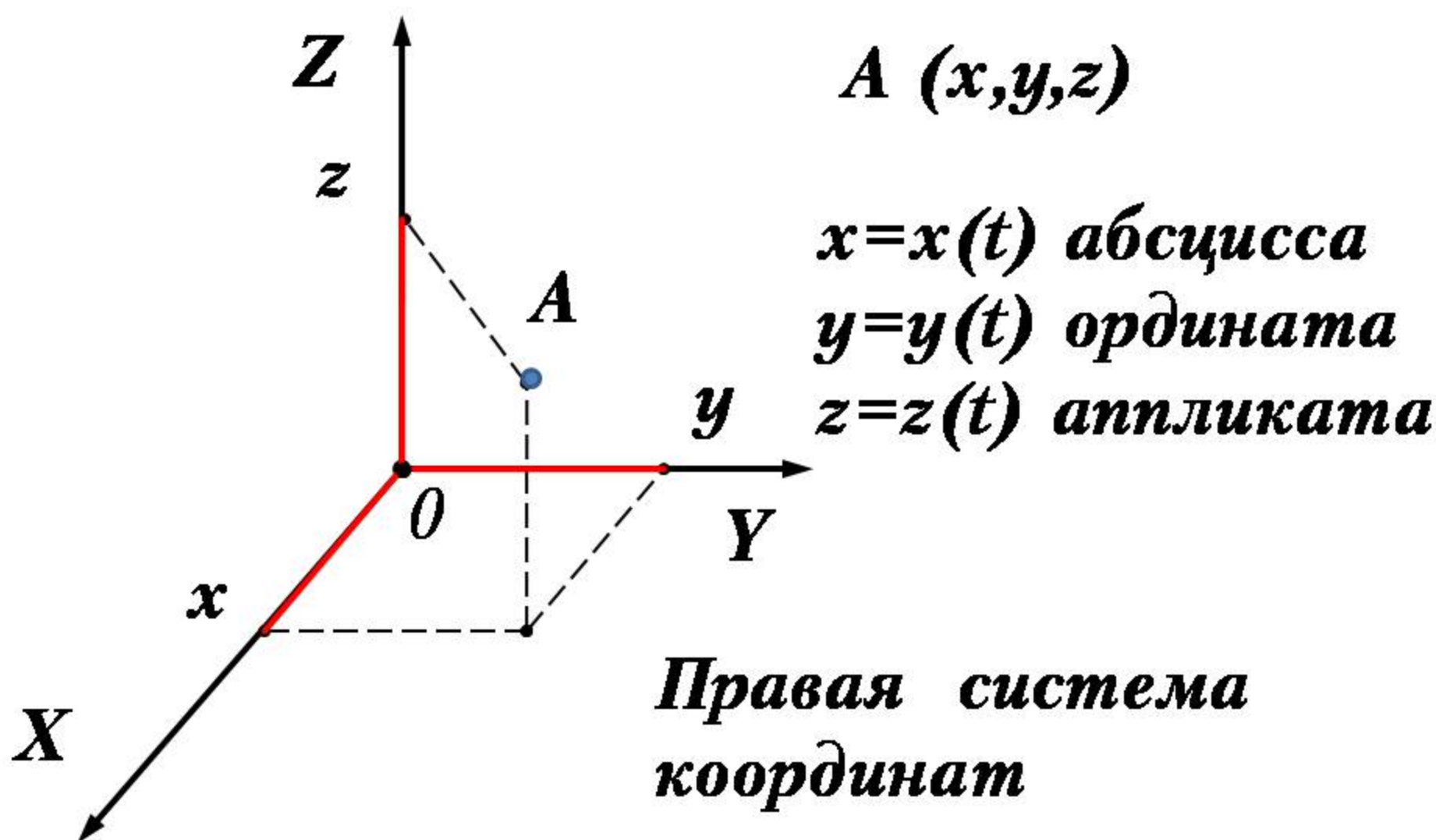
Описание механического движения.

Тело отсчёта – тело, относительно которого задаётся положение данного тела или данной точки.

Система отсчёта – совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат, и синхронизованных между собой часов.

Международный стандарт ISO 31-11 предполагает использование следующих систем координат:

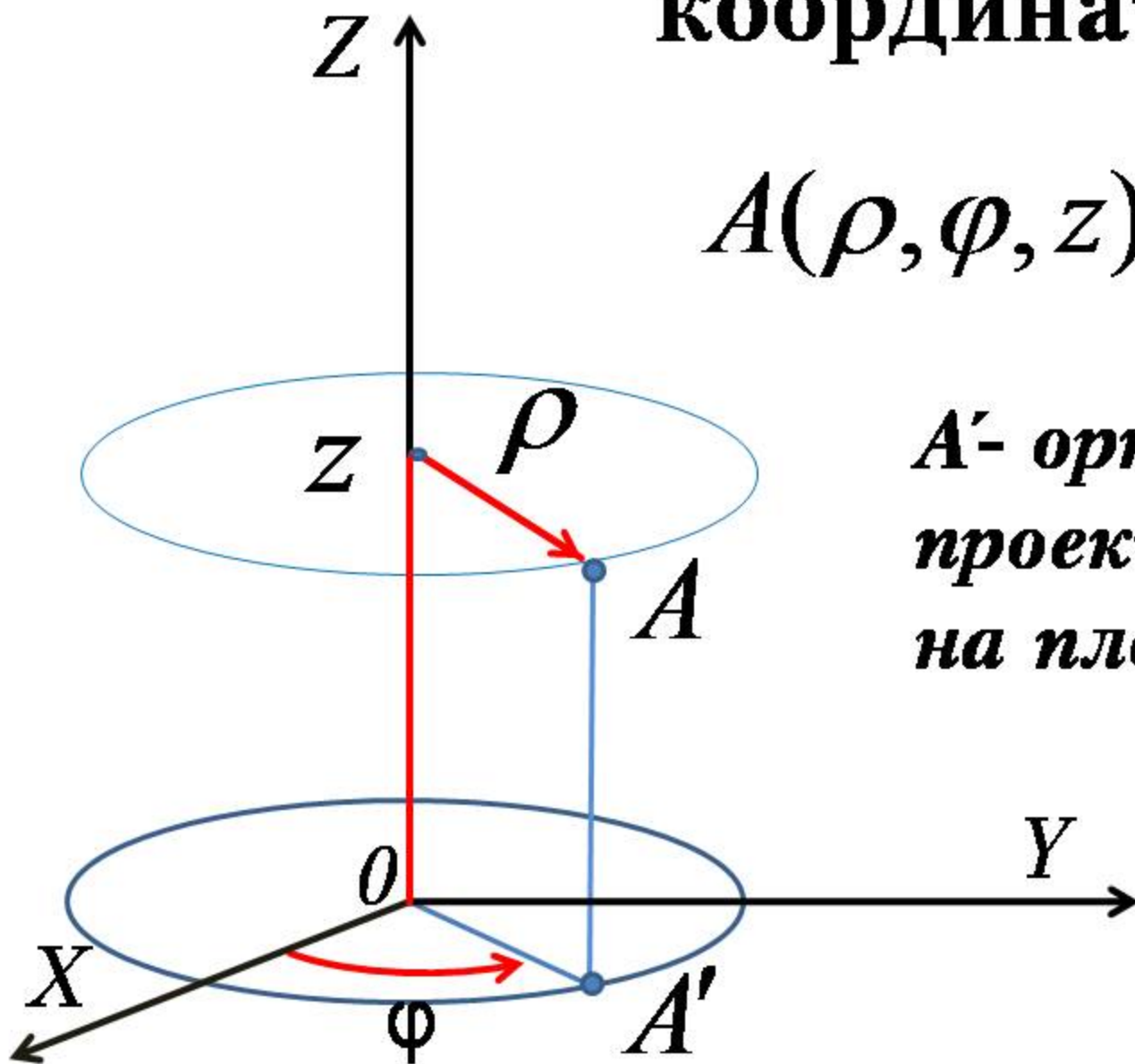
Декартова (прямоугольная) система координат.



Цилиндрическая система координат.

$$A(\rho, \varphi, z)$$

***A' - ортогональная
проекция точки A
на плоскость XOY***



$\rho \geq 0$ - расстояние от начала координат до A'

$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ - угол между осью OX и отрезком OA'

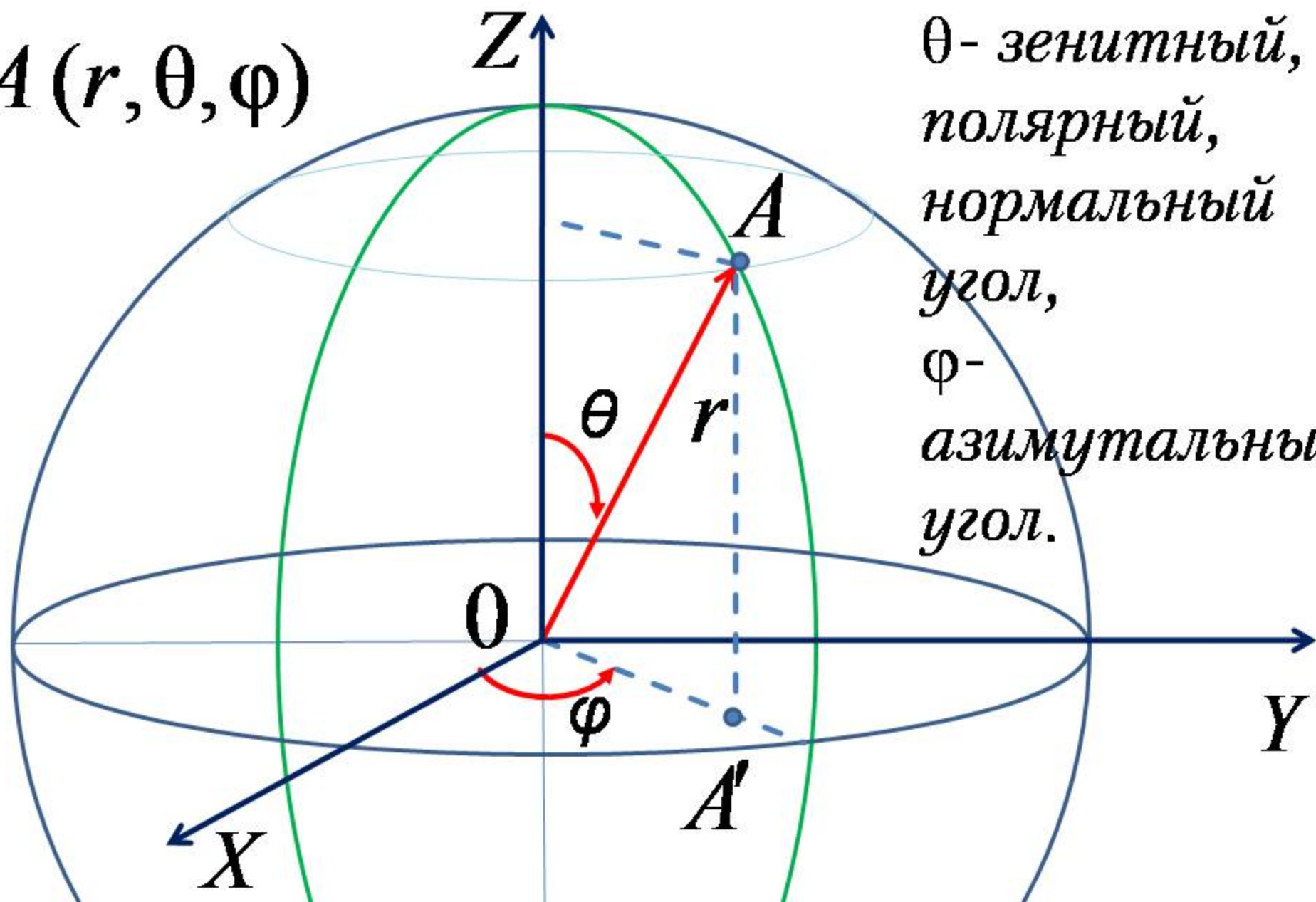
z - аппликата точки A

Цилиндрическая система координат удобна при анализе поверхностей, симметричных относительно какой-либо оси, если взять ось OZ в качестве оси симметрии. Бесконечный цилиндр в декартовых координатах имеет уравнение $x^2 + y^2 = r^2$,
А в цилиндрических – простое: $\rho = r$

Сферическая система координат.

$A(r, \theta, \varphi)$

θ - зенитный,
полярный,
нормальный
угол,
 φ -
азимутальный
угол.

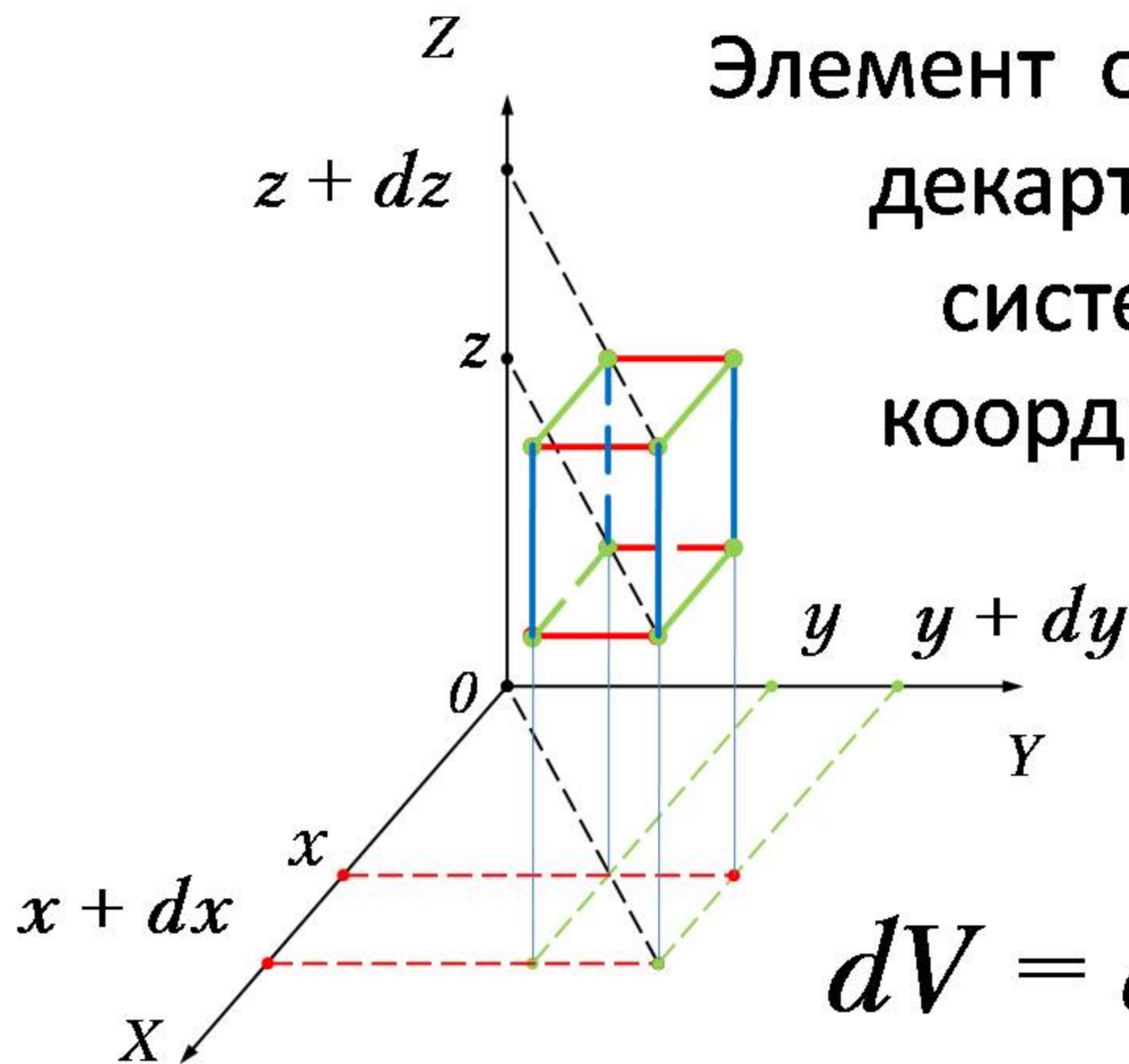


$r \geq 0$ - расстояние от начала координат до заданной точки A .

θ - угол между осью OZ и отрезком, соединяющим начало координат и точку A .

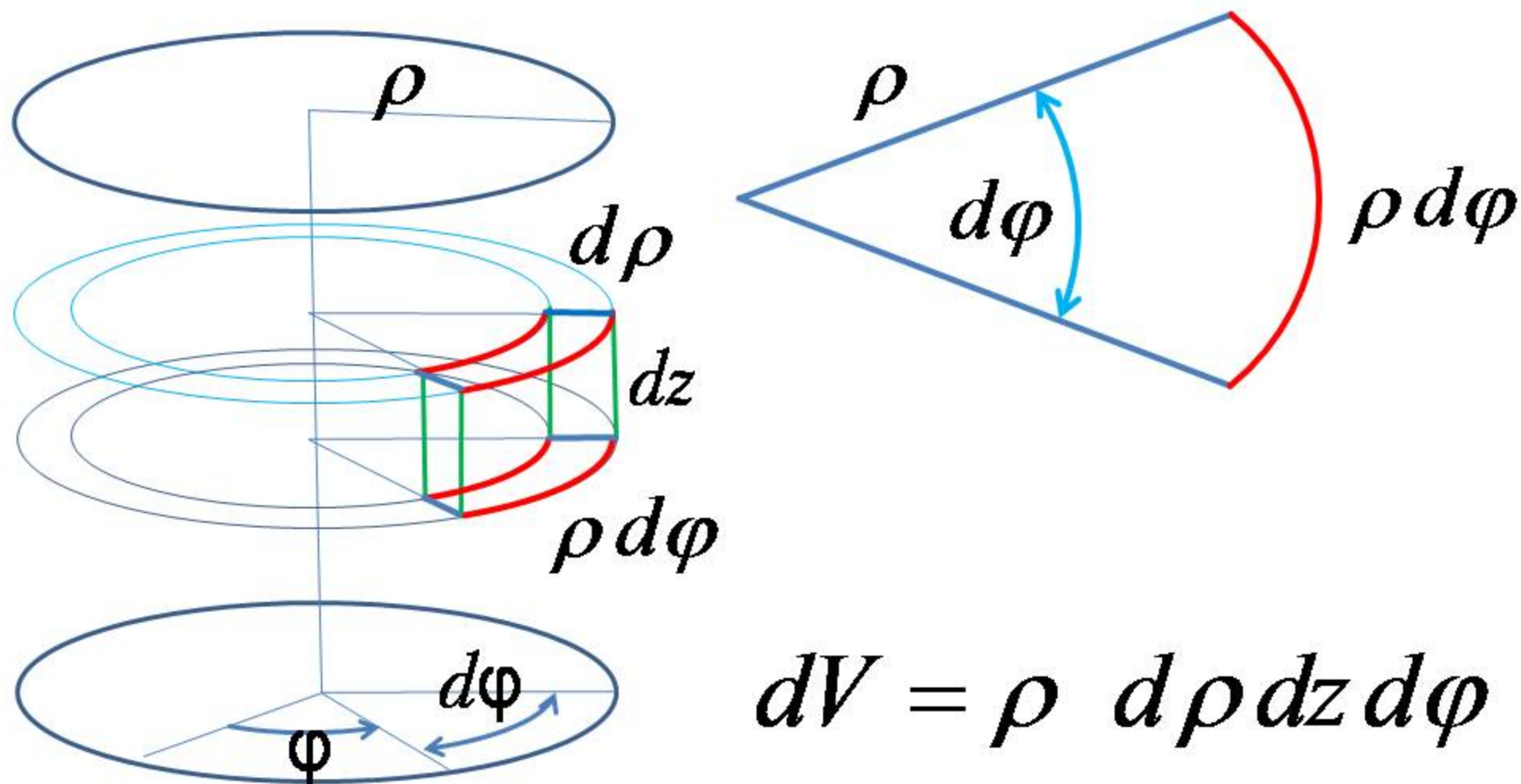
$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ - угол между осью OX и проекцией на плоскость XOY отрезка, соединяющего точку A с началом координат. Сферическая система координат удобна при анализе поверхностей, имеющих сферическую симметрию. Начало координат нужно поместить в центр симметрии, тогда уравнение сферы $r = r_{\text{сферы}}$

Элемент объёма в
декартовой
системе
координат.



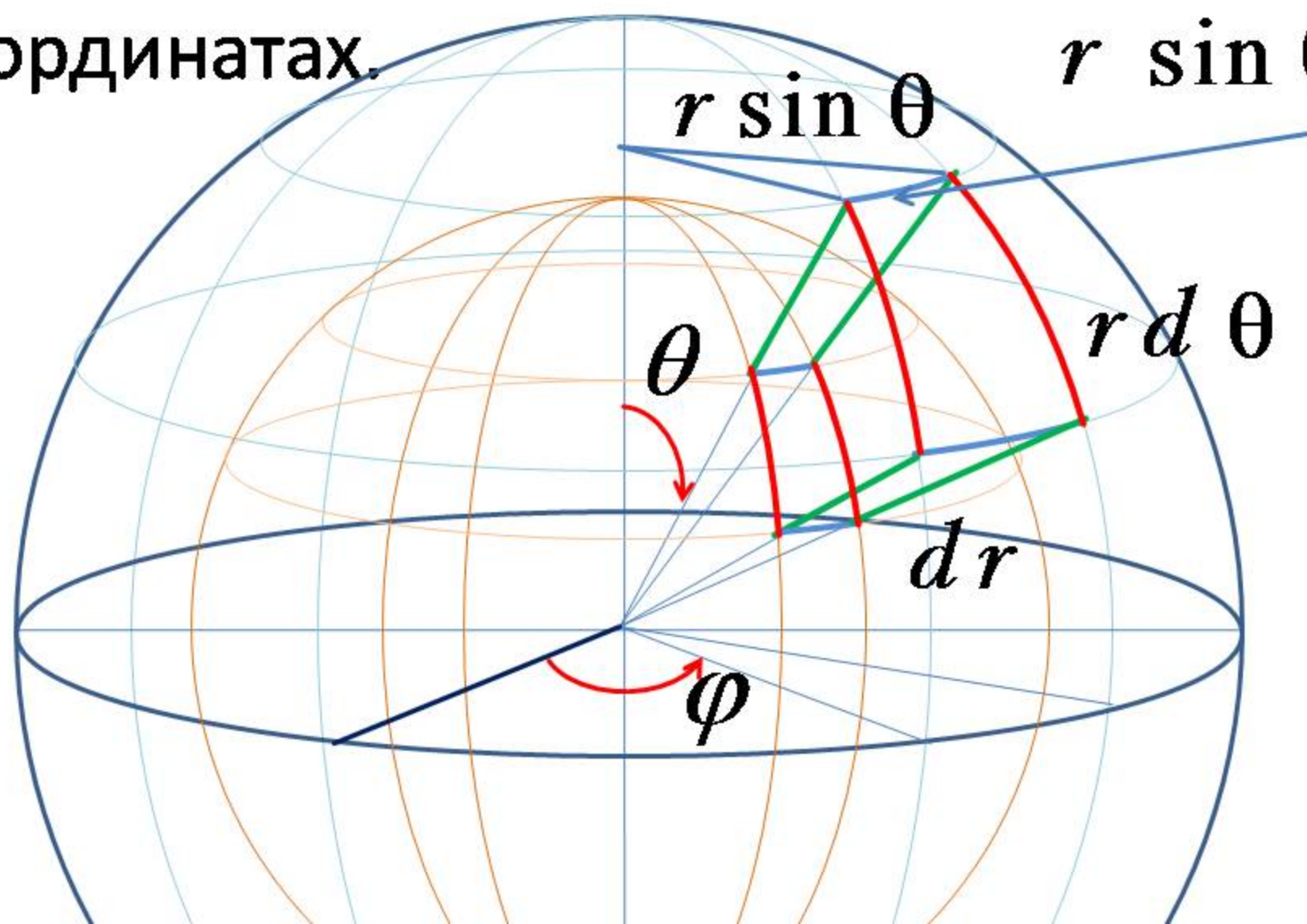
$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

Элемент объёма в цилиндрических координатах.

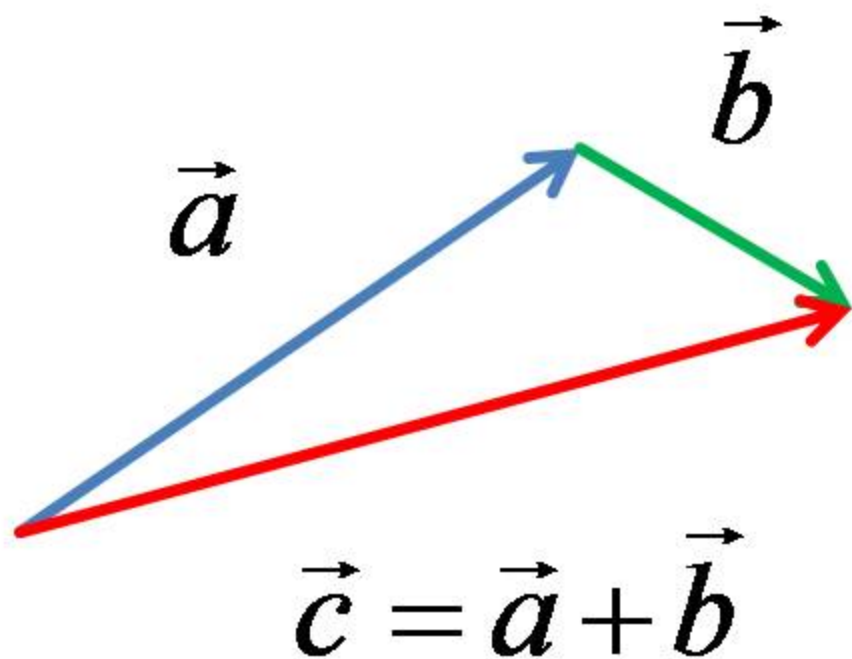


Элемент объёма в
сферических
координатах.

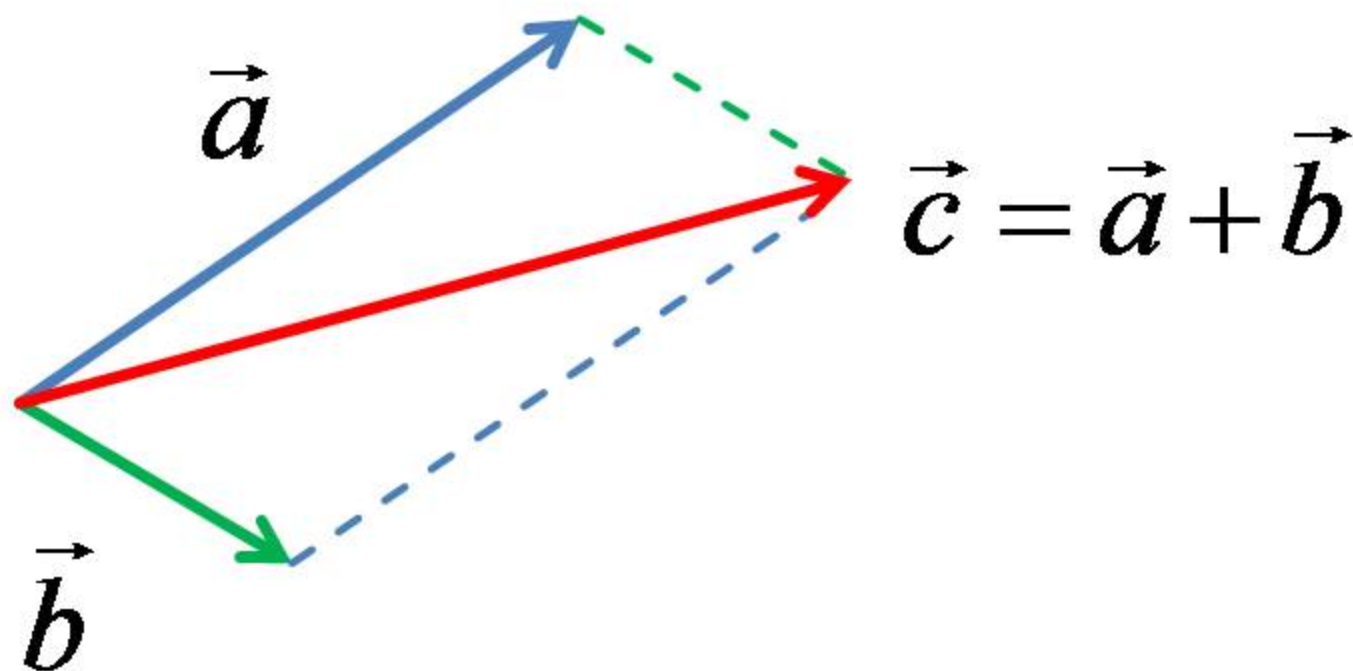
$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$



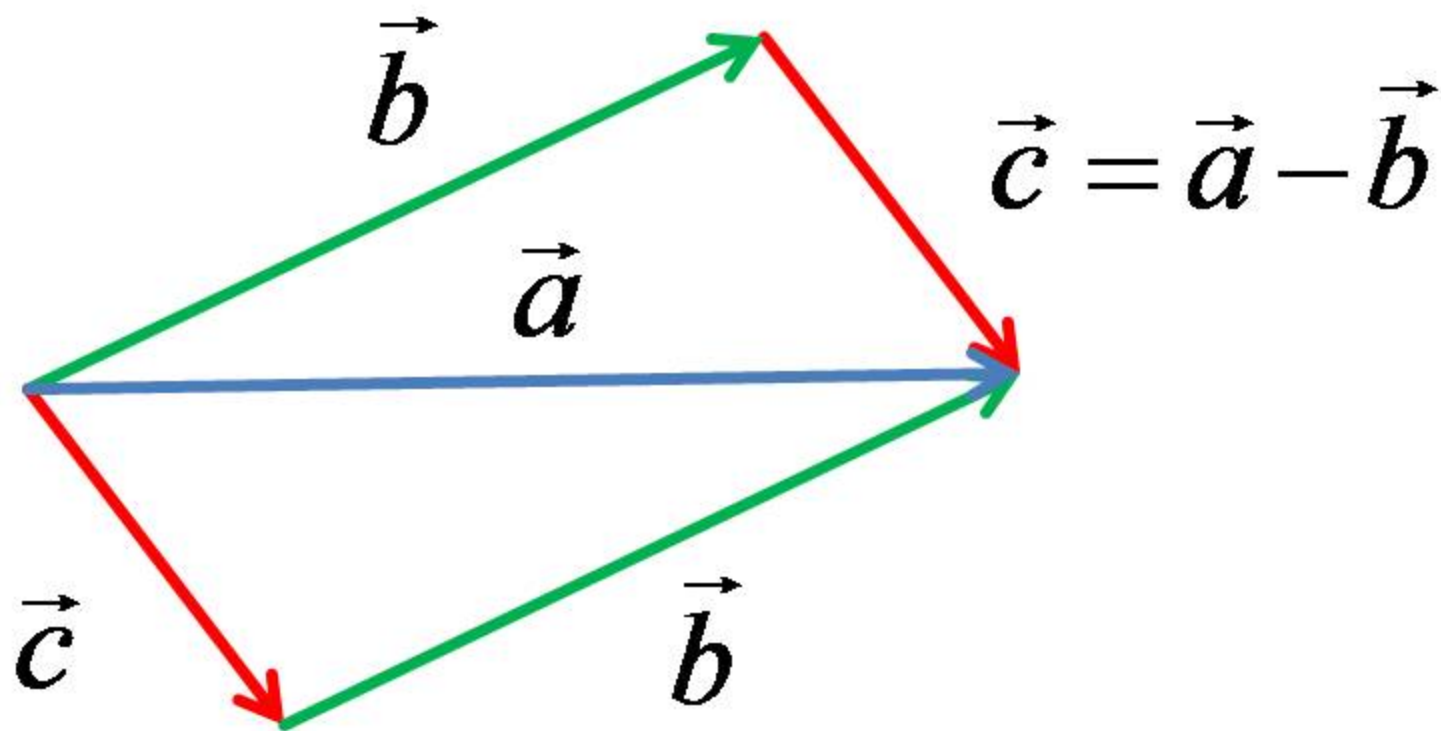
Сумма векторов. Правило треугольника.



Сумма векторов. Правило параллелограмма.

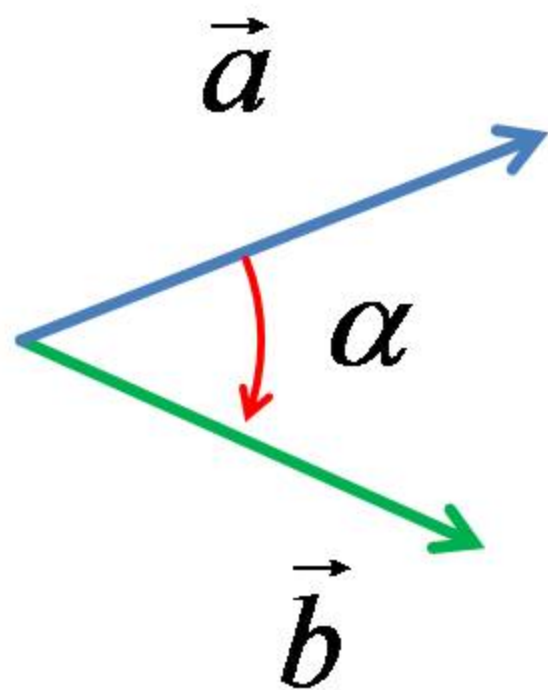


Разность векторов.



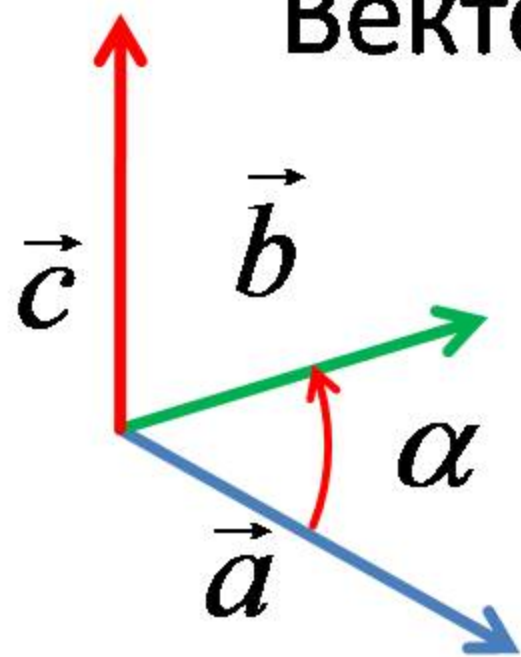
Скалярное произведение.

$$c = (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$



Скалярным произведением векторов a и b называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними (первый вектор вращаем ко второму по кратчайшему пути) .

Векторное произведение.



$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

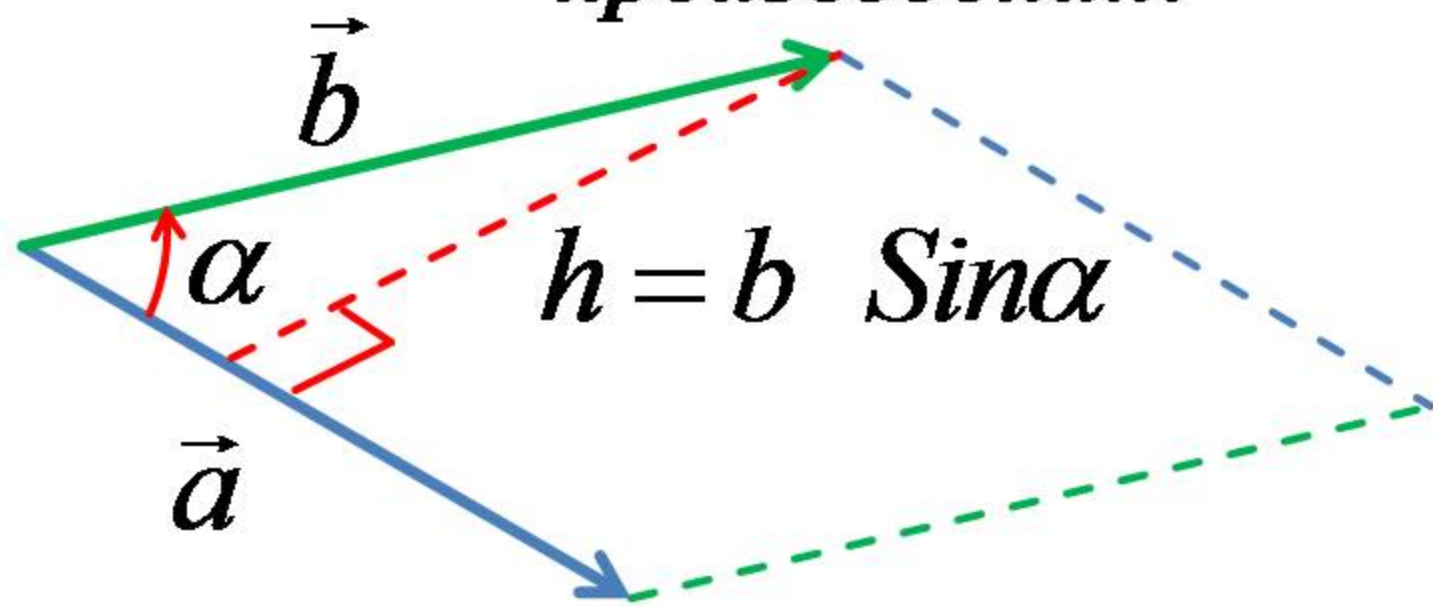
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \cdot \vec{n}$$

Последовательность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$
образует правую тройку

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого равен произведению модулей этих векторов на синус угла между ними, а направление определяется следующим образом: если смотреть на конец вектора $\vec{c}$, то поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути осуществляется против часовой стрелки.

Геометрический смысл векторного произведения.



**Модуль векторного произведения
численно равен площади
параллелограмма, построенного на
перемножаемых векторах.**

Дифференциалы- малые приращения

Δx

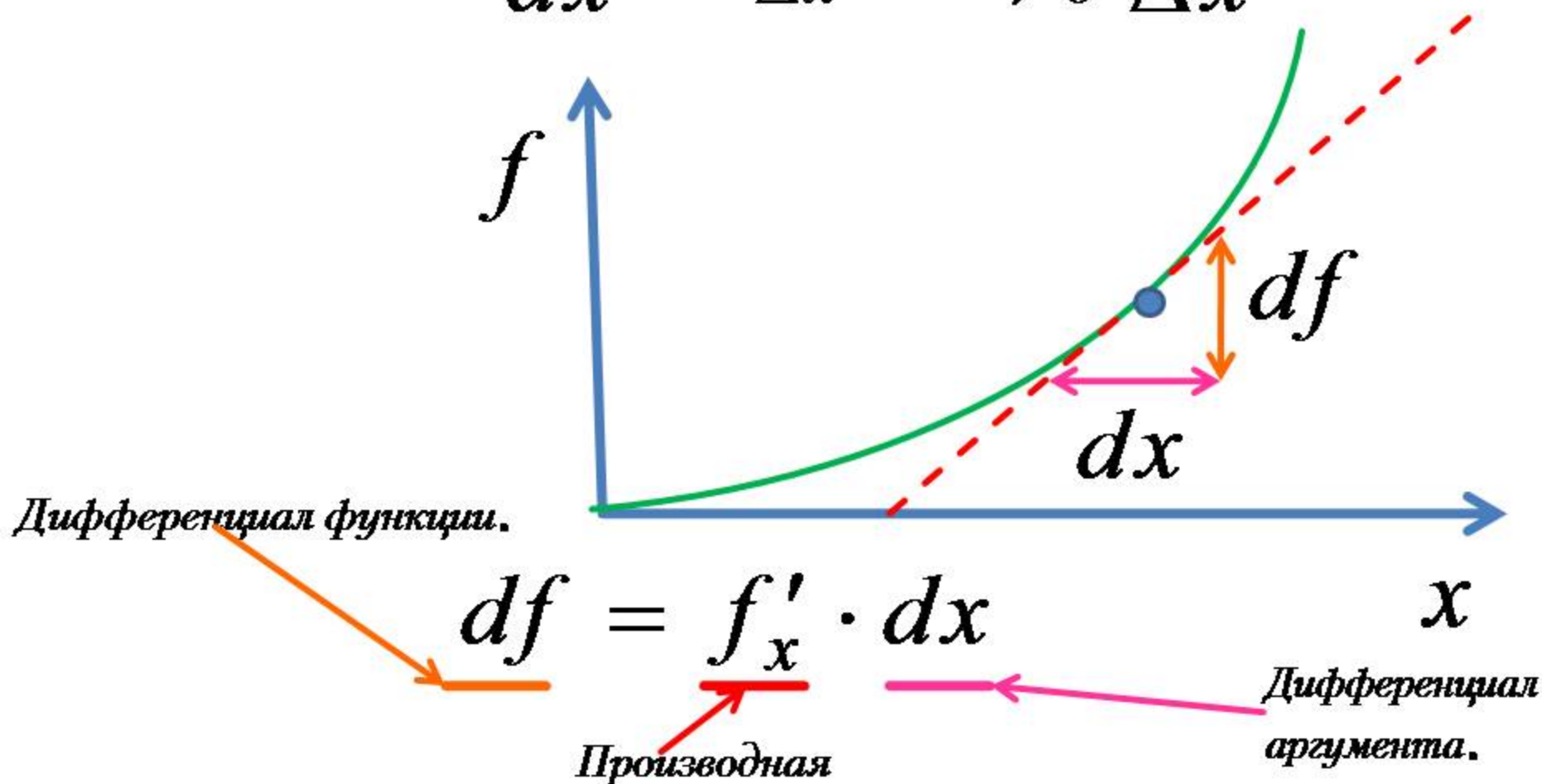
dx

В математике спокойно говорим “бесконечно малые”

В физике тоже так говорим, но понимаем, что это малые, но конечные (доступные для измерения) приращения, иначе они могут менять физический смысл- вместо классической, окажемся в мире квантовой механики

Геометрический смысл производной

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Примеры вычисления дифференциалов

Рассмотрим, например, такую функцию.

$$f = 3x^2$$

Теперь вычислим дифференциалы левой и правой части этого уравнения.

$$df = \underline{6x} dx$$


Подчёркнута производная

Дифференциальное уравнение

$$f'_x = 6x \qquad \frac{df}{dx} = 6x$$

Разделяем переменные. $df = 6x dx$

Нужно знать начальные условия. Пусть, например, при $x = 0$ $f(x) = 3$

Интегрируем $\int df = \int 6x dx$

$$f = 3x^2 + const = 3x^2 + 3$$


Измерение времени.

Часы – тело или система тел, в которых совершается периодический процесс, служащий для измерения времени.

Одна секунда 9102631700

колебаний электромагнитного излучения между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия 133.

Измерение расстояний.

***Один метр** – длина пути, проходимая светом в вакууме в течение*

$$\frac{1}{299792458} \text{ секунды}$$

Такое измерение эталона метра вызвано тем, что экспериментальная погрешность определения скорости света в вакууме в настоящее время составляет примерно 0,3 м/с. Это превышает относительную точность воспроизведения метра $4 \cdot 10^{-9}$ предложенным выше способом. Относительная точность измерения расстояния будет непрерывно повышаться, чтобы каждый раз не менять определение метра, зафиксировали скорость света. Это позволило зафиксировать значения ряда физических констант.

частота сверхтонкого расщепления основного состояния атома цезия-133 в точности **равна** 9 192 631 770 Гц;
скорость света в вакууме c в точности **равна** 299 792 458 м/с¹;
световая эффективность $k_{\text{сд}}$ монохроматического излучения частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц в точности **равна** 683 лм/Вт

Планируется зафиксировать следующие константы.

постоянная Планка h в точности равна $6,626\ 06\text{X} \cdot 10^{-34}$ Дж·с ;
элементарный электрический заряд e в точности равен $1,602\ 17\text{X} \cdot 10^{-19}$ Кл;
постоянная Больцмана k в точности равна $1,380\ 6\text{X} \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
число Авогадро N_A в точности равно $6,022\ 14\text{X} \cdot 10^{23}$ моль⁻¹;

На XXIV Генеральной конференции по мерам и весам 17—21 октября 2011 года была единогласно принята резолюция, в которой, в частности, предложено в будущей ревизии Международной системы единиц переопределить четыре основные единицы СИ: **килограмм, ампер, кельвин и моль**. Предполагается, что новые определения будут базироваться на фиксированных численных значениях постоянной Планка, элементарного электрического заряда, постоянной Больцмана и постоянной Авогадро, соответственно. Всем этим величинам будут приписаны *точные* значения, основанные на наиболее достоверных результатах измерений, рекомендованных Комитетом по данным для науки и техники (CODATA). Под фиксированием (или фиксацией) подразумевается «принятие некоторого точного численного значения величины по определению». В резолюции сформулированы следующие положения, касающихся этих единиц

Килограмм останется единицей массы, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Планка равным в точности $6,626\ 068\cdot 10^{-34}$, когда она выражена единицей СИ $\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}$, что эквивалентно Дж·с.

Ампер останется единицей силы электрического тока, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения элементарного электрического заряда равным в точности $1,602\ 176\cdot 10^{-19}$, когда он выражен единицей СИ с·А, что эквивалентно Кл.

Кельвин останется единицей термодинамической температуры, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Больцмана равным в точности $1,380\ 658\cdot 10^{-23}$, когда она выражена единицей СИ $\text{м}^{-2}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$, что эквивалентно Дж·К⁻¹.

Моль останется единицей количества вещества, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Авогадро равным в точности $6,022\ 140\cdot 10^{23}$, когда она выражена единицей СИ моль⁻¹.

Выше и далее X заменяет одну или более значащих цифр, которые будут определены в дальнейшем на основании наиболее точных рекомендаций CODATA.

Систем единиц СИ

«Système International d'Unités»

Включает в себя основные и производные единицы.

Основные единицы системы СИ: секунда, метр

Килограмм - единица массы, равная массе международного эталона килограмма.

Ампер - сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1м друг от друга в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин - единица абсолютной температуры, равная $1/273,16$ части температуры тройной точки воды.

Моль - единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул), сколько содержится атомов углерода в углероде-12 массой $0,012$ кг.

Кандела — единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $540 \cdot 10^{-12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср.

Дополнительные единицы СИ.

Радистан - угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадистан - телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Принципы, используемые при построении классической механики.

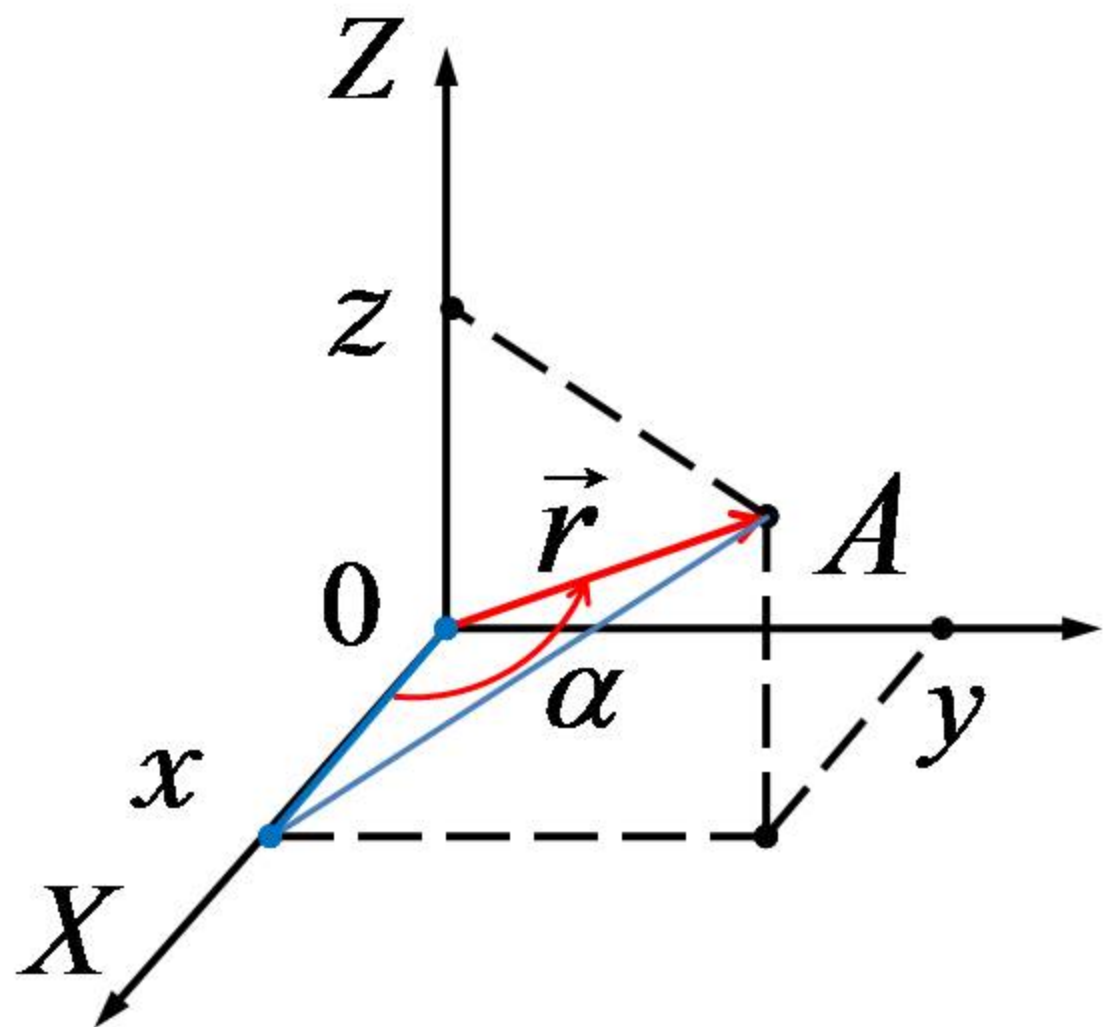
1) Однородность пространства – все пространственные точки эквивалентны между собой. (Начало отсчёта можно выбрать в любой точке.)

**2) Изотропность пространства – все направления в пространстве эквивалентны.
(Систему координат можно поворачивать произвольным образом)**

3) Однородность времени – все моменты времени эквивалентны. (В любой момент можно начать отсчёт времени)

Радиус-вектор

Радиус-вектор точки – вектор, проведённый из начала координат в данную точку.



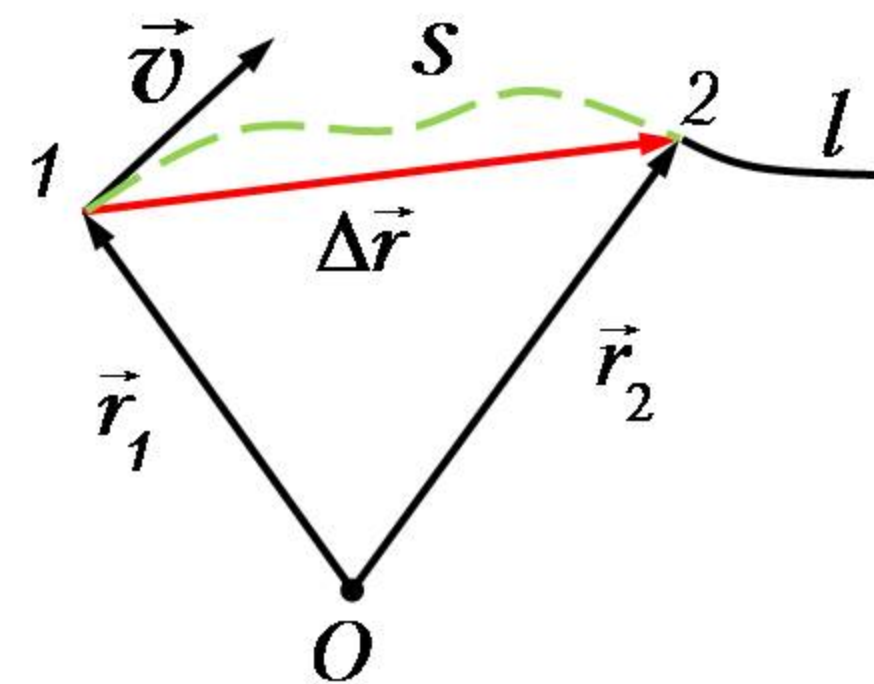
$$r_x = x,$$

$$r_y = y, \quad r_z = z$$

*Косинусы углов,
Y которые радиус-
вектор
составляет с
осями Oх, Оу, Oz:*

$$\cos \alpha = \frac{r_x}{|\vec{r}|}; \quad \cos \beta = \frac{r_y}{|\vec{r}|}; \quad \cos \gamma = \frac{r_z}{|\vec{r}|}$$

Основные понятия кинематики.



Пусть за интервал времени от t_1 до t_2 материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2.

O – начало отсчёта.

$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

l – траектория материальной точки.

S – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 .

$\vec{S} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 .

Перемещением материальной точки за интервал времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ называется вектор, проведенный из её положения в момент времени t_1 в её положение в момент времени t_2 .

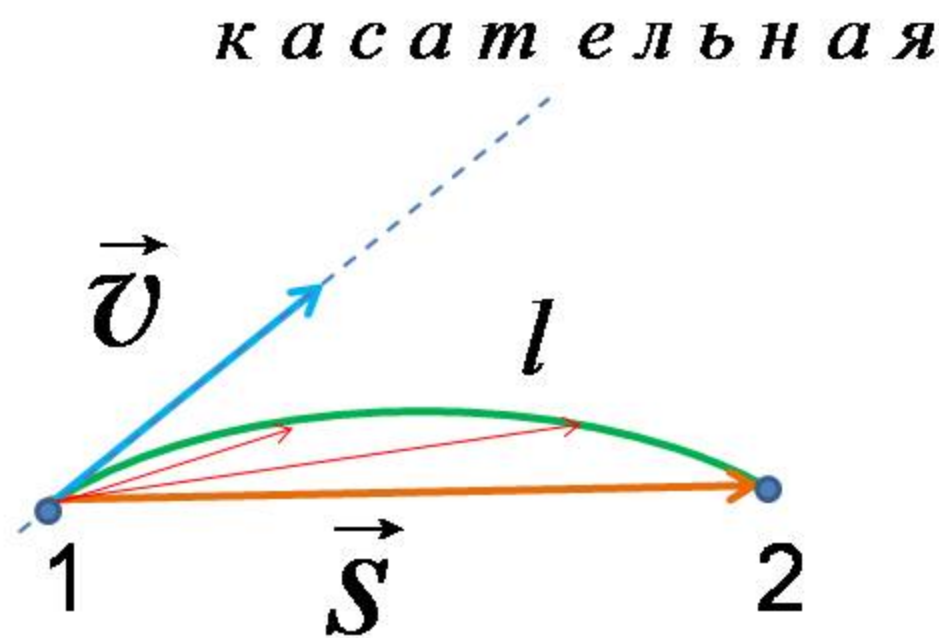
Траекторией материальной точки называется линия, которую она описывает при своём движении.

Длиной пути S называется сумма длин всех участков траектории, пройденных материальной точкой за рассматриваемый промежуток времени.

Скорость и ускорение (повторение).

Перемещение $\vec{S}$

Траектория l



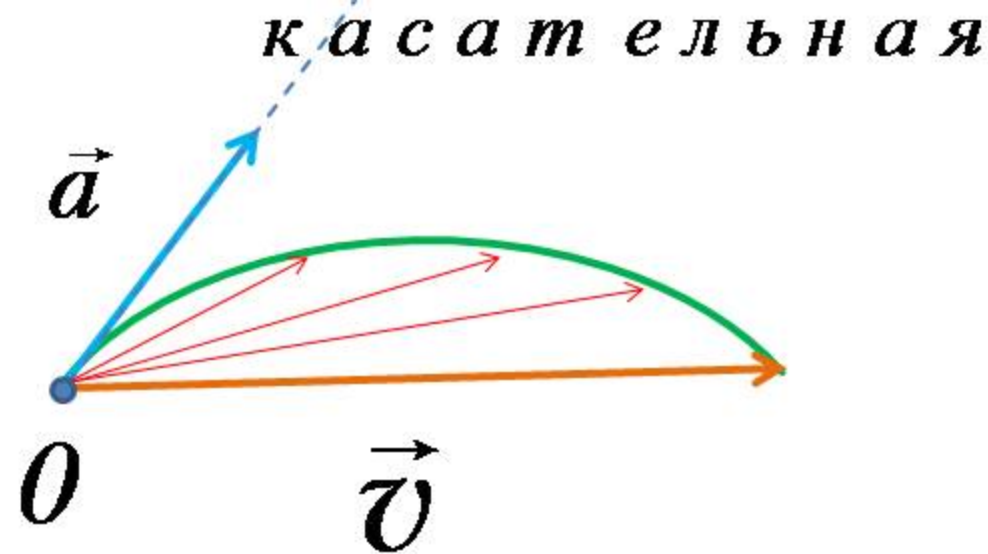
Средняя скорость

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\vec{S}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Направлена по касательной к траектории



Среднее ускорение

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{d t}$$

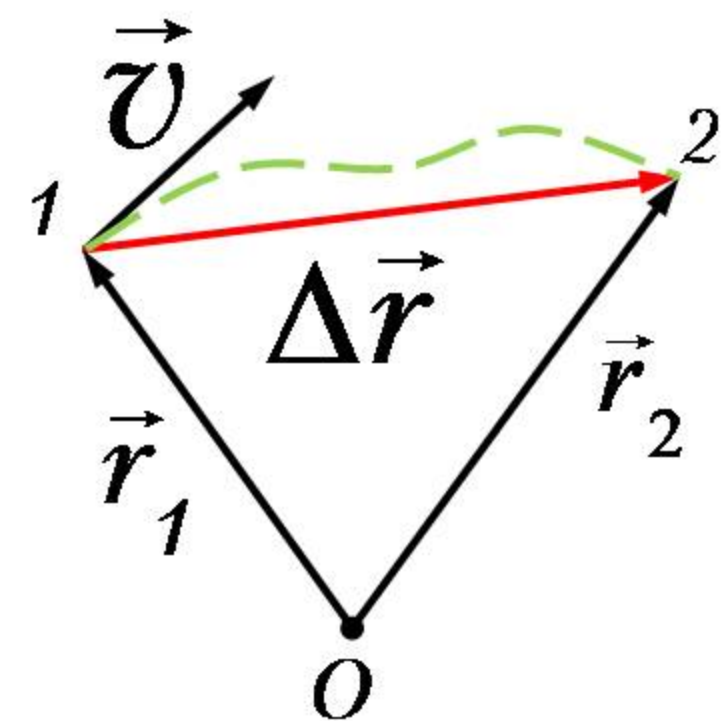
Вектор скорости точки в каждый момент времени направлен по касательной к её пространственной траектории. Для получения траектории в пространстве скоростей необходимо все векторы скорости, относящиеся к выбранному моменту времени, отложить от одной точки-начала отсчёта в пространстве скоростей.

Конец, изменяющегося во времени вектора скорости, вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называющуюся годографом вектора скорости. (Гамильтон 1846г.)

Вектор мгновенного ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости.

**Мы будем использовать три
способа описания движения -
векторный, координатный и
траекторный.**

Векторный способ описания движения.

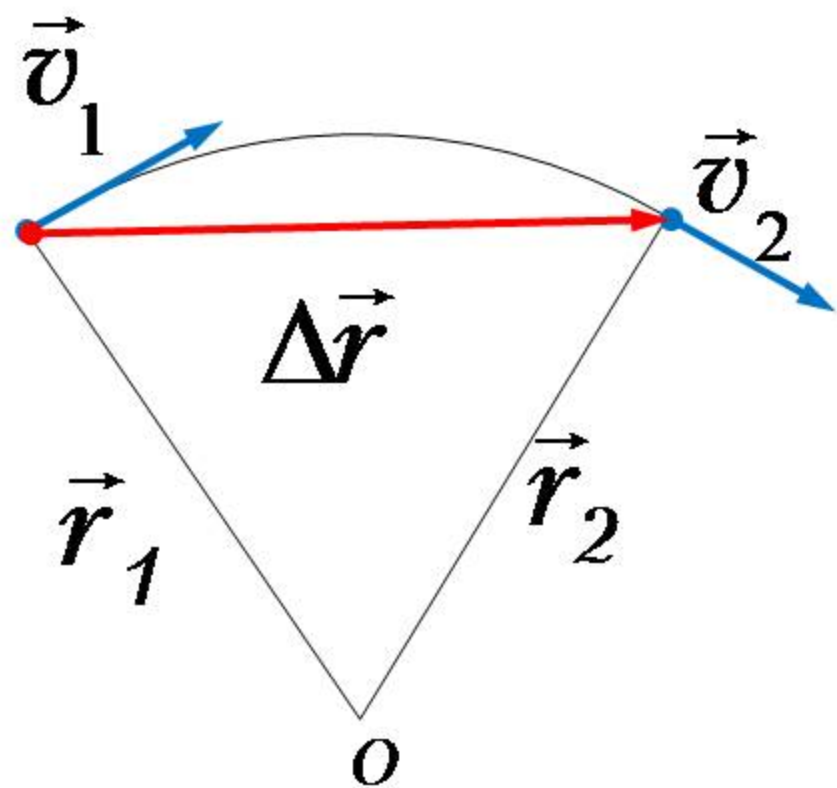


Для того, чтобы описать движение материальной точки, необходимо указать зависимость её радиуса-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 равно приращению её радиуса-вектора за этот интервал времени

Скорость и ускорение материальной точки.



**Средняя скорость
материальной точки в
интервале времени от
 t_1 до t_2 :**

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Среднее ускорение материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Скорость материальной точки в момент времени t :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt,$$

где $\vec{v}_0$ – скорость материальной точки в момент времени $t=0$.

Радиус-вектор материальной точки в момент времени t :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор материальной точки в момент времени $t=0$.

***Перемещение материальной точки за
интервал времени
от 0 до t:***

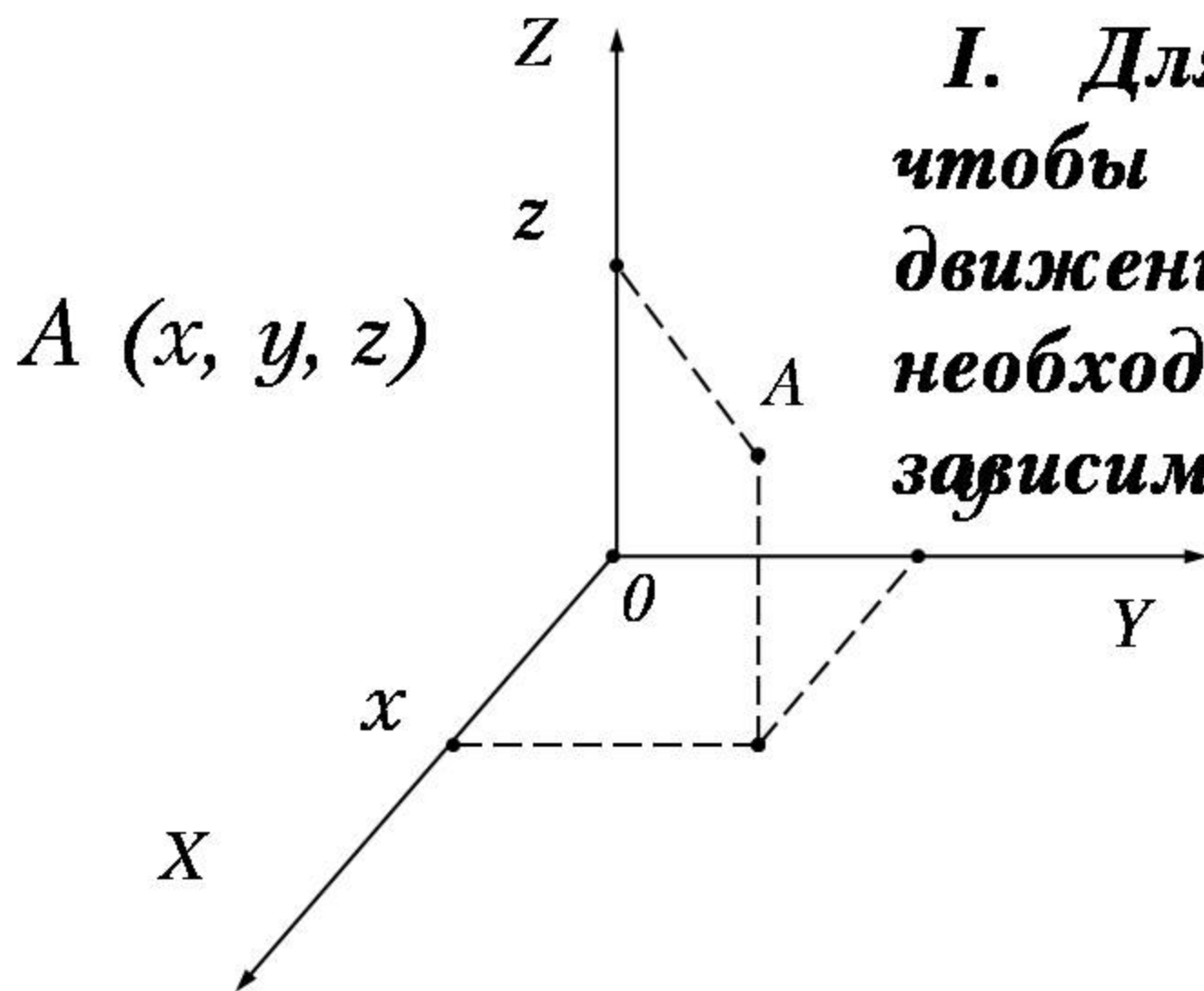
$$\Delta \vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Почему траектория тела, брошенного под углом к горизонту, плоская кривая?

$$\Delta \vec{r} (t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

В любой момент времени вектор перемещения лежит в плоскости, содержащей векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$

Координатный способ описания движения.



I. Для того, чтобы описать движение точки, необходимо указать зависимость

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t)\end{aligned}$$

II Вектор скорости материальной точки.

Проекции вектора скорости на оси координат.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Модуль вектора скорости:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор скорости составляет с осями Ox, Oy, Oz:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

III. Ускорение материальной точки.

Проекции вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

*Модуль вектора
ускорения:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

*Косинусы углов, которые вектор ускорения
составляет с осями Ox, Oy, Oz:*

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

IV. Перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2

*Проекции вектора перемещения на оси
координат:*

$$\left. \begin{aligned} \left(\vec{S} \right)_x &= x_2 - x_1 \\ \left(\vec{S} \right)_y &= y_2 - y_1 \\ \left(\vec{S} \right)_z &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\}$$

Модуль вектора перемещения:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор перемещения составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{S_x}{|\vec{S}|}; \quad \cos \beta = \frac{S_y}{|\vec{S}|}; \quad \cos \gamma = \frac{S_z}{|\vec{S}|};$$

V. Приращение радиуса-вектора материальной точки (перемещение)

***Проекции
приращения
радиуса-вектора
на оси координат:***

$$\Delta r_x = x_2 - x_1$$

$$\Delta r_y = y_2 - y_1$$

$$\Delta r_z = z_2 - z_1$$

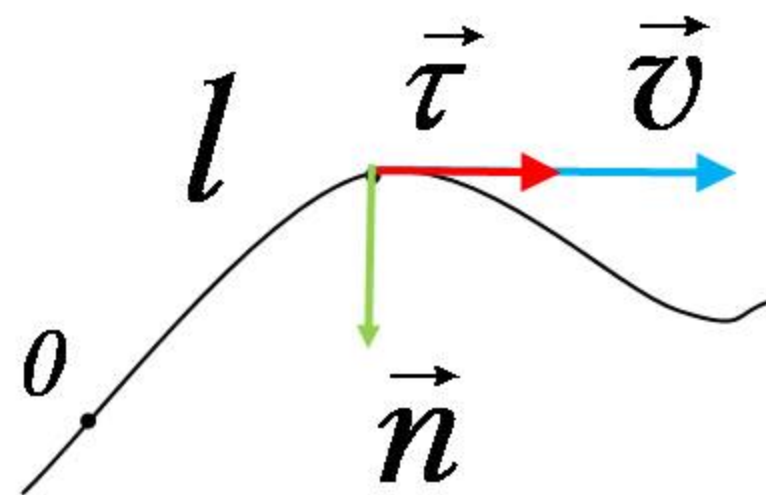
Модуль приращения радиуса- вектора :

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2 + \Delta r_z^2}$$

***Косинусы углов, которые приращение
радиуса-вектора
составляет с осями Ox , Oy , Oz :***

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\Delta r_x}{|\Delta \vec{r}|}; \quad \text{Cos } \beta = \frac{\Delta r_y}{|\Delta \vec{r}|}; \quad \text{Cos } \gamma = \frac{\Delta r_z}{|\Delta \vec{r}|}$$

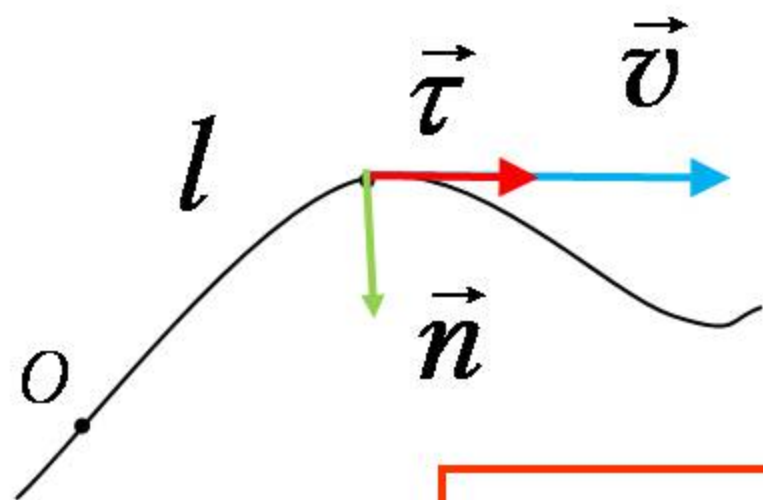
Траекторный способ описания движения



Используется , когда траектория движения материальной точки известна заранее.

Положение материальной точки задаётся с помощью дуговой координаты l , отсчитываемой от выбранного на траектории начала.

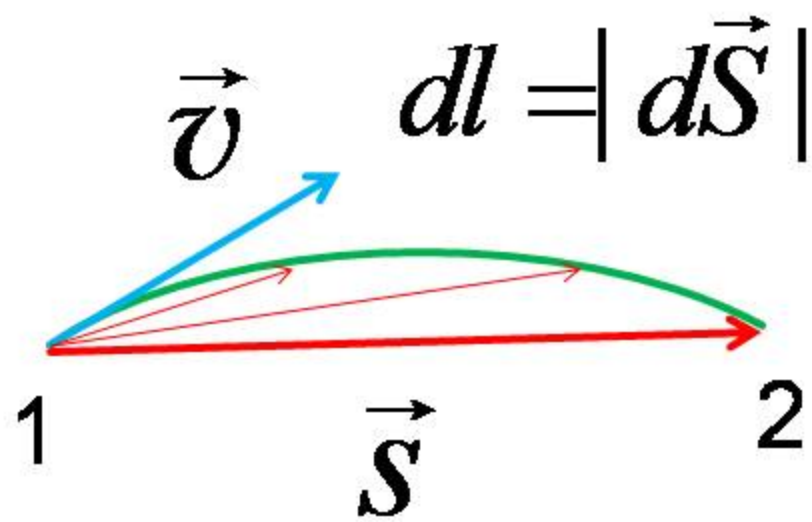
$$l = l(t)$$



**Скорость
материальной точки:**

$$\vec{v} = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{\tau} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ — **единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.**



Обратите внимание!
Модуль вектора скорости равен производной от пути по времени.

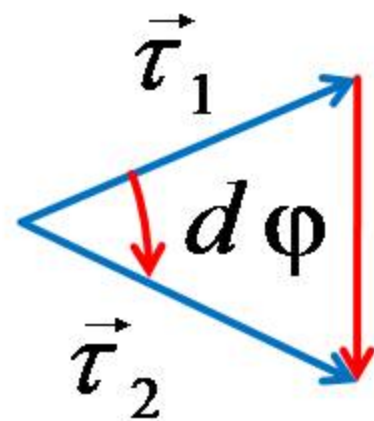
Через перемещение

$$|\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\vec{S}}{dt} \right|$$

Через путь

$$|\vec{v}| = \frac{dl}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Вычислим производную от вектора $\vec{\tau}$ по времени



$$|\vec{\tau}| = 1$$

$$d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \vec{n}$$

$$|d\vec{\tau}| = d\varphi$$

$$d\vec{\tau} = d\varphi \vec{n}$$

Орт $\vec{n}$ лежит в той же плоскости, в которой поворачивается вектор $\vec{\tau}$, направлен в ту же сторону, в которую происходит вращение.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}$$

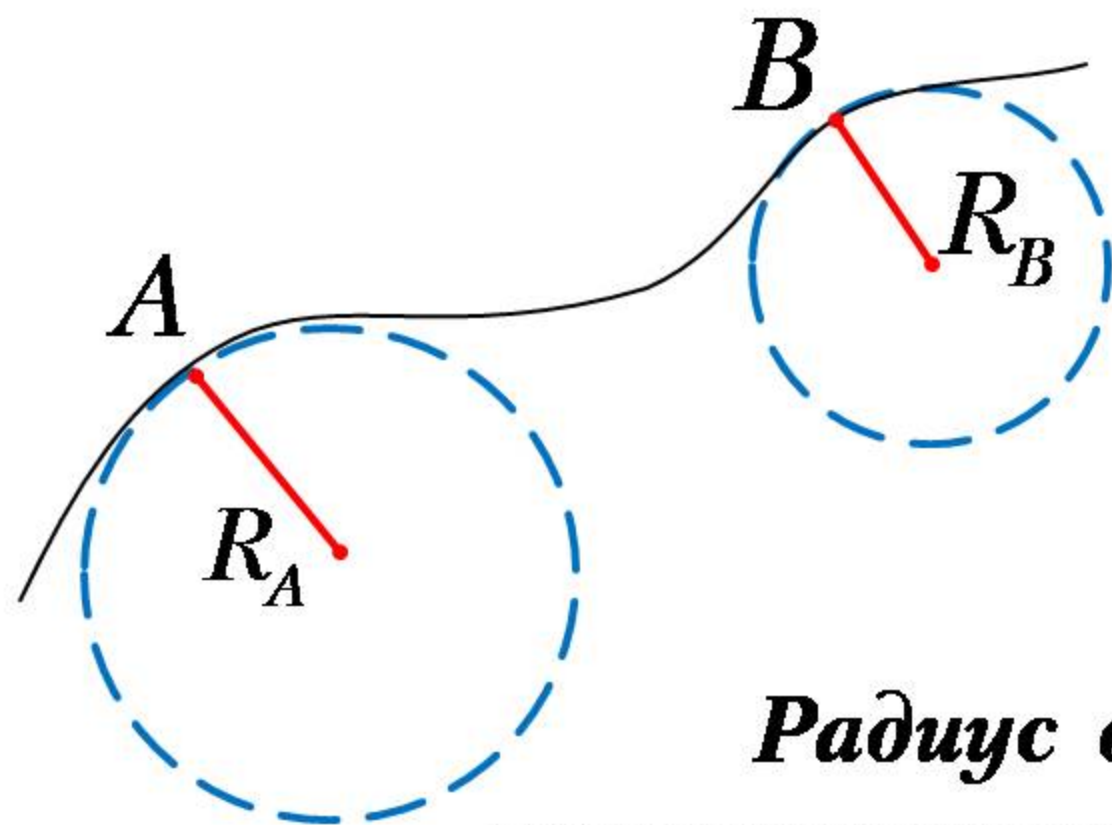
Полное ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_{\tau}} + \underbrace{\frac{|\vec{v}| \cdot d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_{\tau}} + \underbrace{|\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Если $|\vec{v}| \uparrow$, $\vec{a}_{\tau} \uparrow \uparrow \vec{v}$ Если $|\vec{v}| \downarrow$, $\vec{a}_{\tau} \uparrow \downarrow \vec{v}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

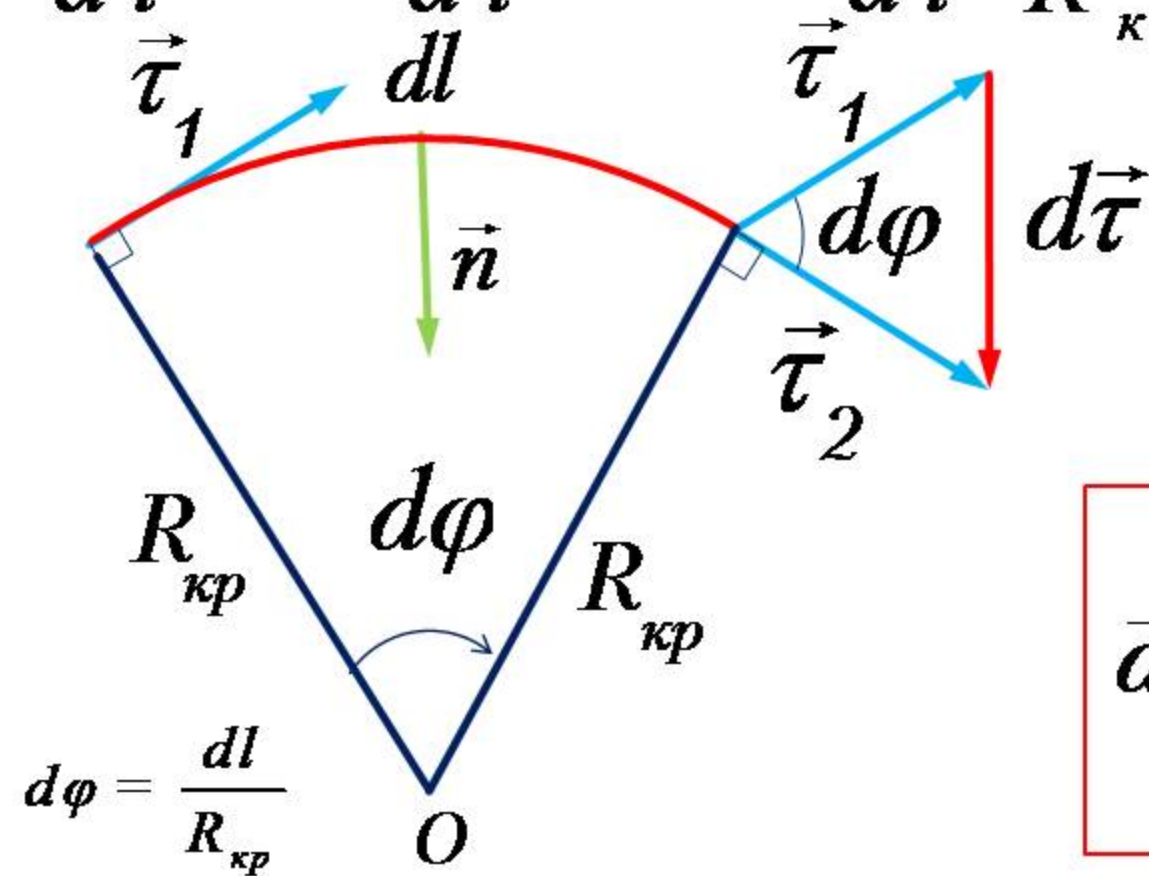
Радиус кривизны траектории



*Радиус окружности,
аппроксимирующей траекторию
в данной точке*

Выразим нормальное ускорение материальной точки через радиус кривизны её траектории:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = \frac{dl}{dt} \frac{1}{R_{кр}} \vec{n} = |\vec{v}| \frac{1}{R_{кр}} \vec{n}$$



$$\vec{a}_n = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

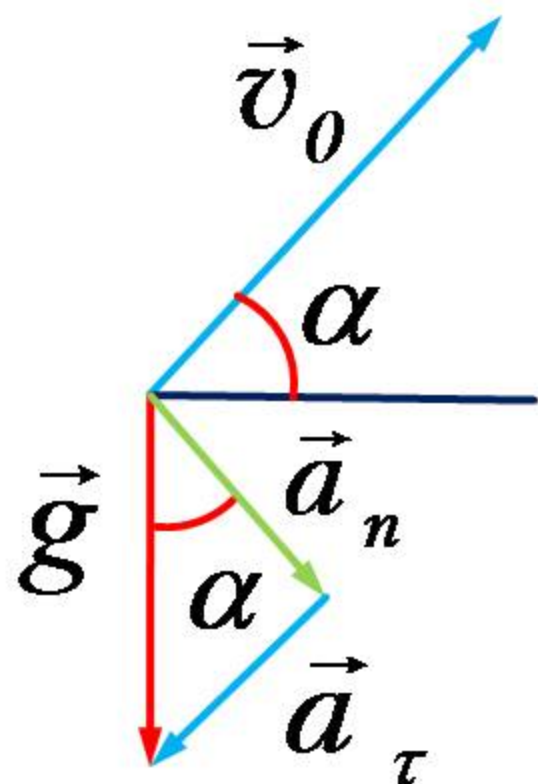
Тангенциальное ускорение отвечает за скорость изменения **модуля** скорости

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Нормальное ускорение пропорционально скорости изменения **направления** вектора скорости

$$\vec{a}_n = |\vec{v}| \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = |\vec{v}|^2 \frac{1}{R} \vec{n}$$

Пример. Камень брошен со скоростью $\vec{v}_0$ под углом к горизонту. Определите его нормальное и тангенциальное ускорение, и радиус кривизны траектории в начальный момент времени.



$$a_n = g \cos \alpha$$

$$a_\tau = g \sin \alpha$$

$$R = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}$$

Движение с постоянным ускорением

Зависимость скорости материальной точки от времени:

$$\vec{a} = const$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$\vec{v}_0$ - скорость материальной точки в момент времени $t=0$.

**Зависимость радиуса-вектора
материальной точки от времени:**

$$\vec{a} = \text{const} \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

$\vec{r}_0$ - радиус-вектор материальной
точки в момент времени $t=0$

**Перемещение материальной точки за
интервал**

времени от 0 до t :

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Формула для разности квадратов скоростей

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$
$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

Приращение координаты материальной точки за интервал времени от 0 до t:

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}$$

**Проекция на ось Ox перемещения
материальной точки за интервал времени
от 0 до t :**

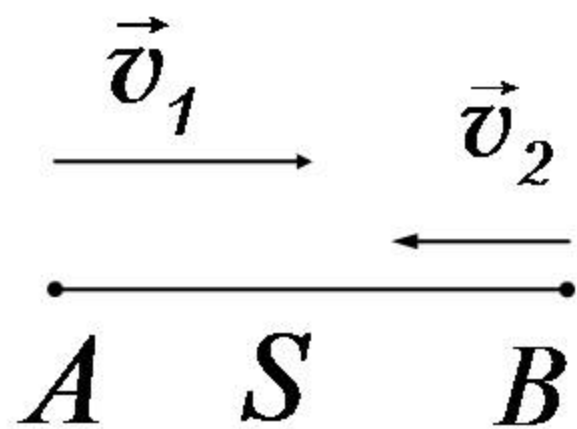
$$\left(\Delta \vec{r}\right)_x = \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

**Средняя скорость прохождения отрезка
пути.**

$$v_{ср} = \frac{S}{\Delta t}$$

Средней путевой скоростью движения точки называется скалярная величина равная отношению пути, пройденного точкой за интервал времени Δt , к его продолжительности.

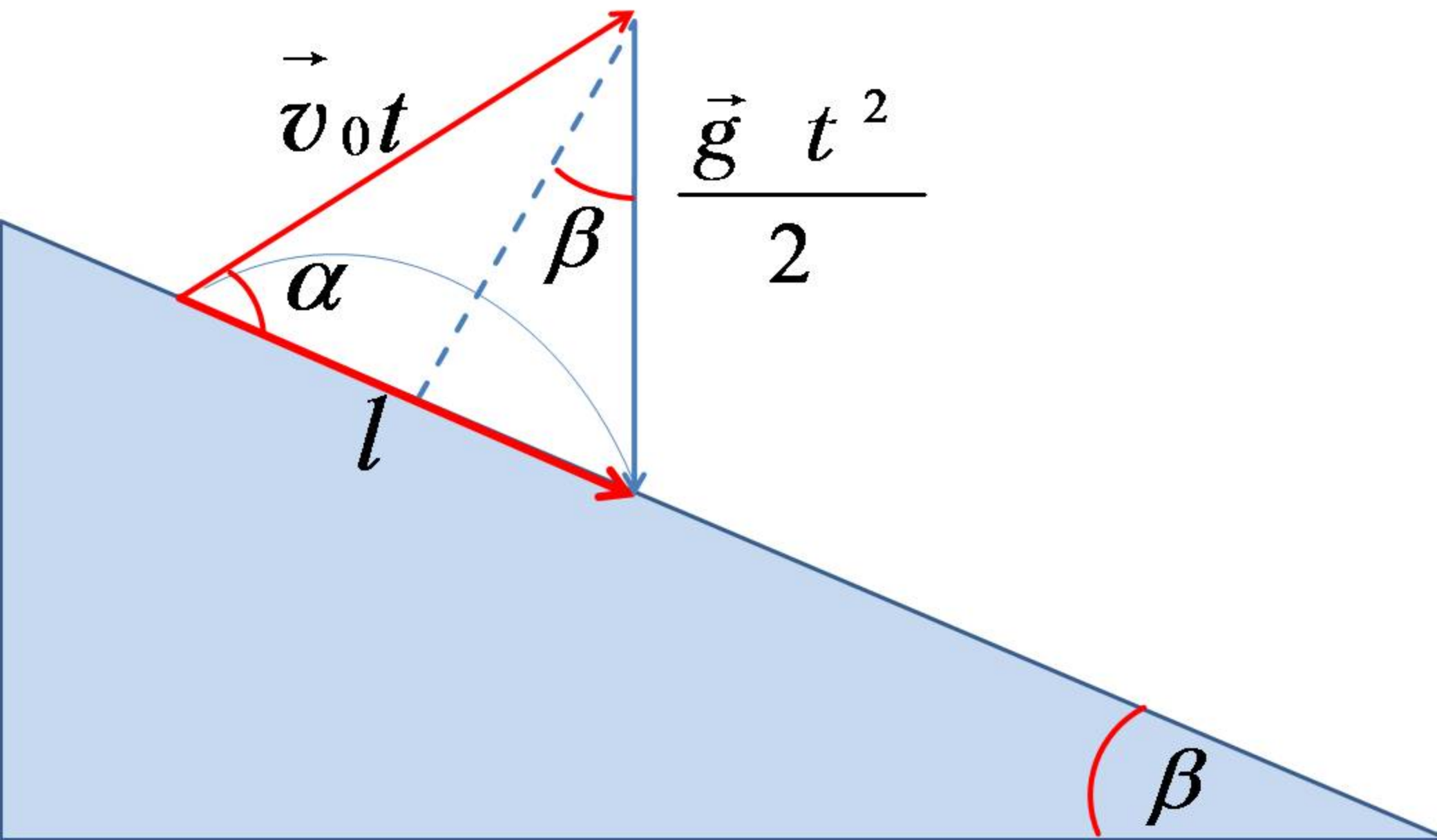
Пример . Материальная точка прошла путь из точки А в точку В со скоростью v_1 и обратно со скоростью v_2 . Вычислите среднюю путевую скорость.



$$v_{cp} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} \right)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Пример.

Камень брошен со склона горы с начальной скоростью v_0 направленной под углом α к склону горы, составляющего угол β с горизонтом. На каком расстоянии от точки бросания l упадёт камень?



Выразим высоту в треугольнике через модуль каждого из векторов по очереди.

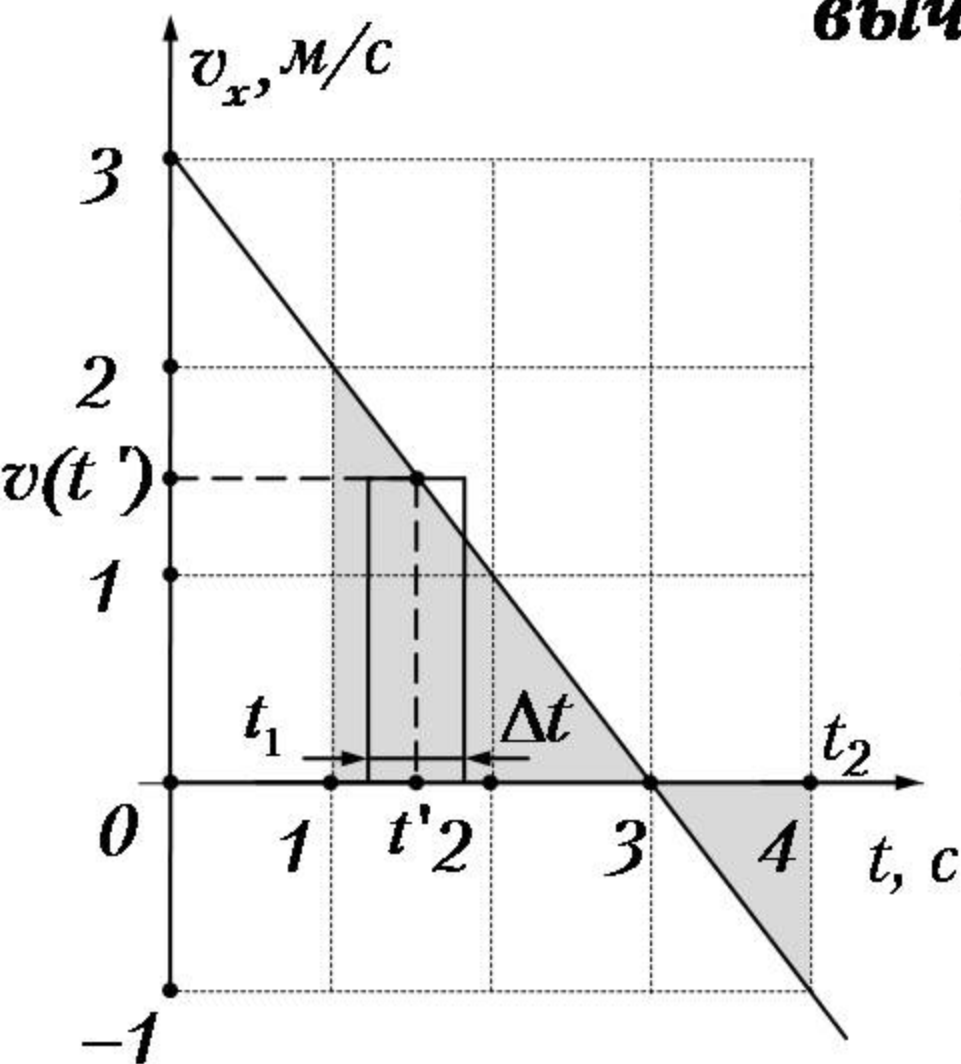
$$v_0 t \sin \alpha = \frac{g t^2}{2} \cos \beta$$

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta}$$

$$l = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) =$$

$$= \frac{2 v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \beta} \cos (\alpha - \beta)$$

Пример 2. Материальная точка движется вдоль оси Ox . По графику зависимости $v_x(t)$ вычислим:



- 1). Путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$S = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м}$$

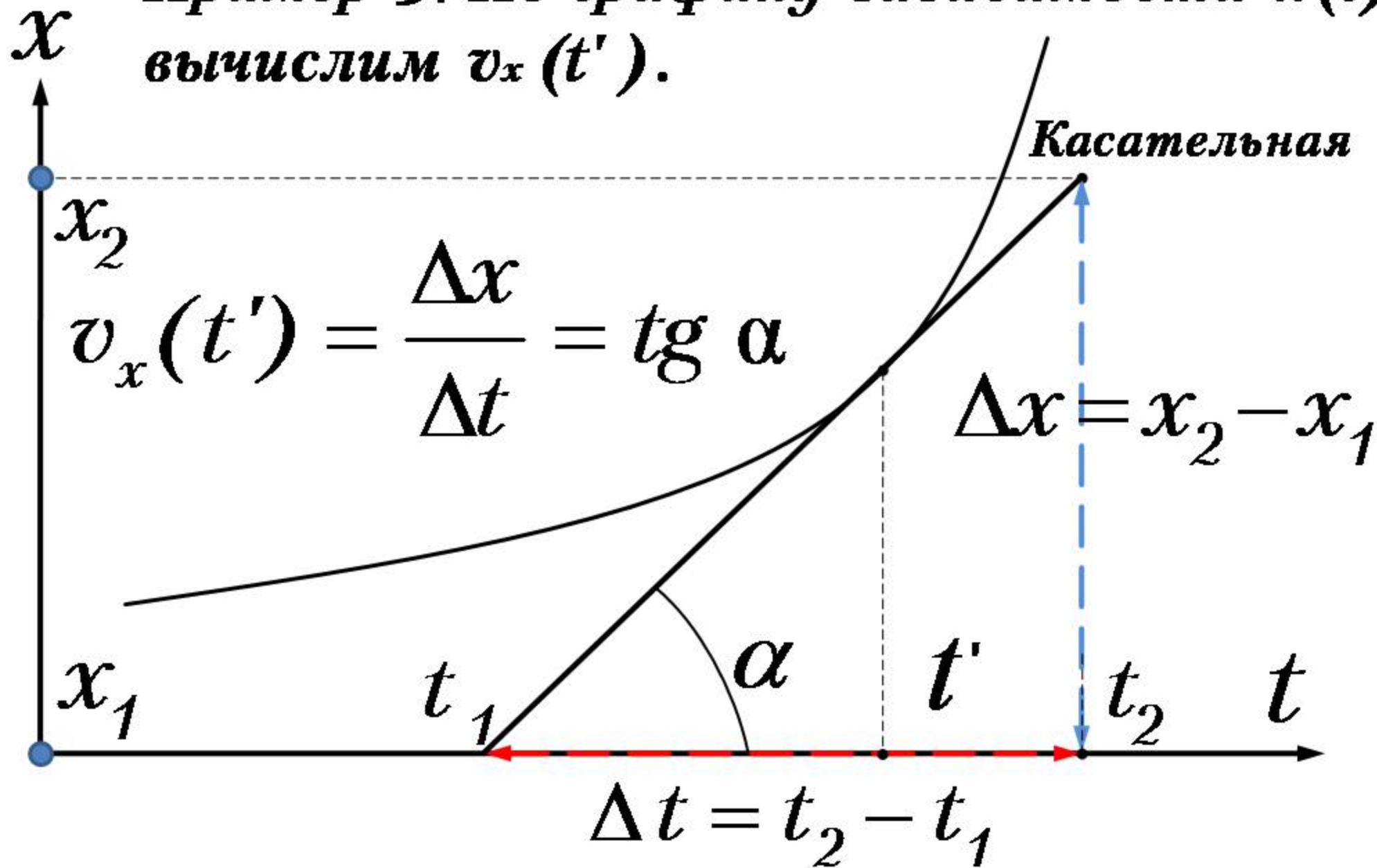
- 2). Приращение координаты материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$x_2 - x_1 = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

3). **Проекцию перемещения материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :**

$$\left(\Delta \vec{r}\right)_x = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

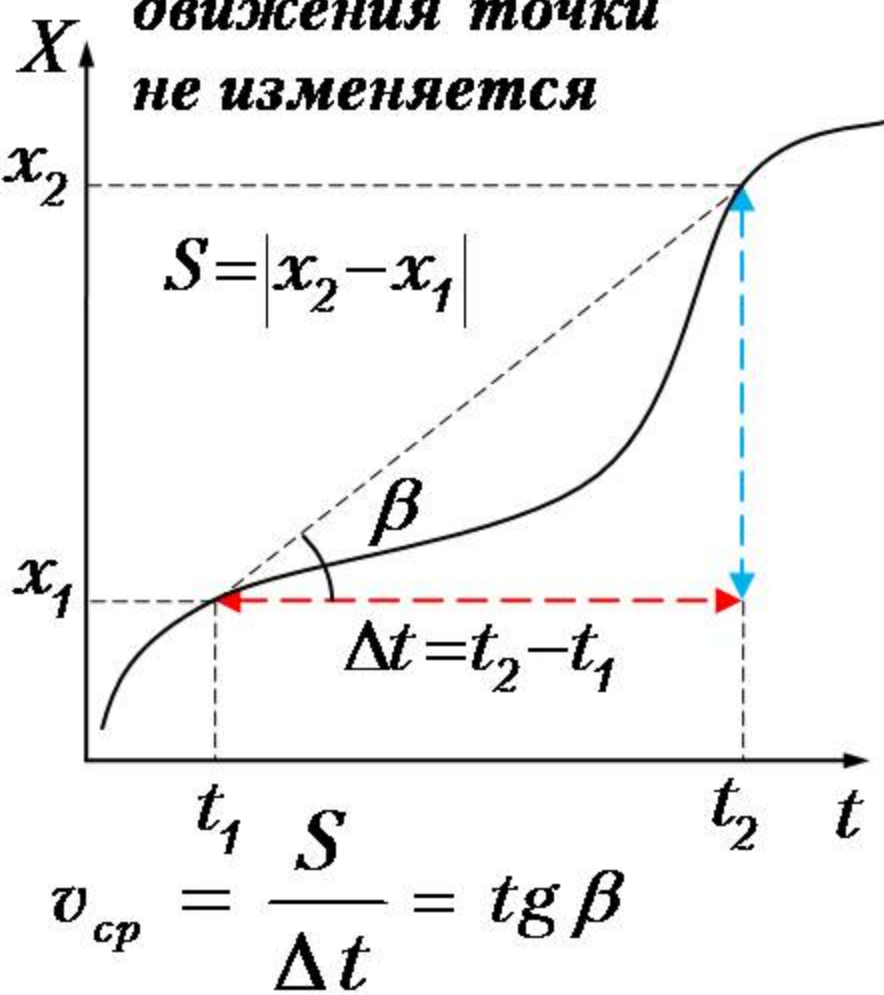
Пример 3. По графику зависимости $x(t)$ вычислим $v_x(t')$.



Пример 4. Материальная точка движется вдоль оси Ox . По графику зависимости $x(t)$

вычислим v_{cp}

Направление движения точки не изменяется



В момент времени t' направление движения точки изменяется

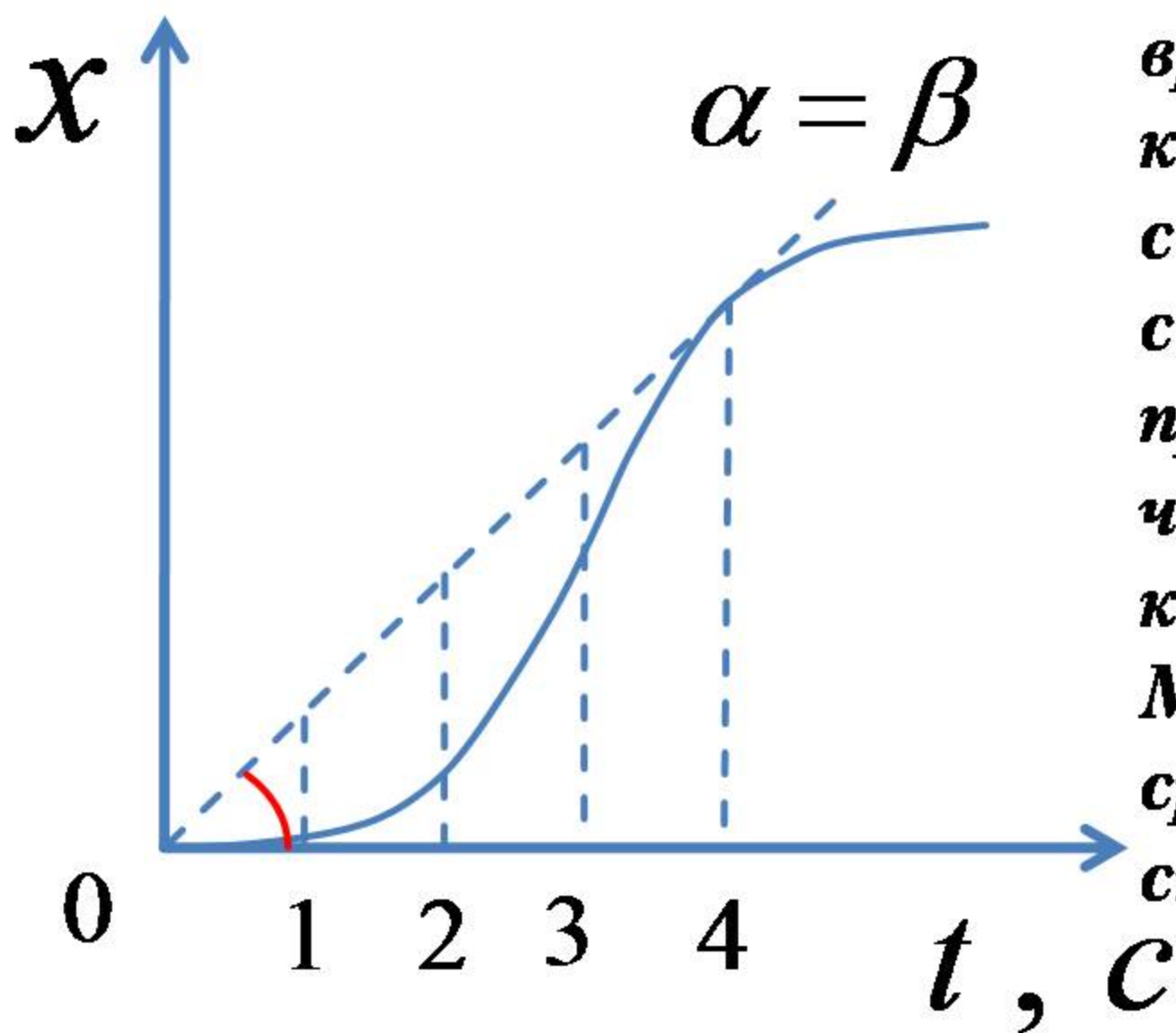


Пример.

Материальная точка движется вдоль оси

**Ох. 1. Укажите момент времени, когда
мгновенная скорость точки максимальна.**

**2. Укажите момент времени t_1 , когда
мгновенная скорость совпадает по
величине со средней путевой скоростью за
интервал времени от 0 до t_1 .**



В момент времени $t=4\text{с}$ касательная совпадает с секущей, проходящей через начало координат. Мгновенная и средняя путевая скорости равны.

Пример.

Материальная точка покоится в начале координат. В момент времени $t=0$ она начинает движение вдоль оси Ox . На рисунке показан график зависимости её ускорения на ось Ox от времени. Определите:

- 1. В какие моменты времени модуль скорости точки возрастает**
- 2. В какой момент времени направление движения точки изменяется на противоположное**

3. Максимальное значение модуля скорости точки

4. На какое максимальное расстояние точка удалилась от начала координат

