

## **Лекция 2.**

# **Кинематика вращательного движения.**

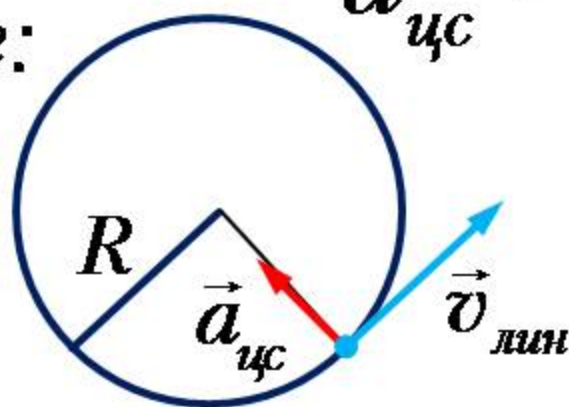
© *С. А. Курашова*, 2015

# Кинематика равномерного вращения материальной точки по окружности

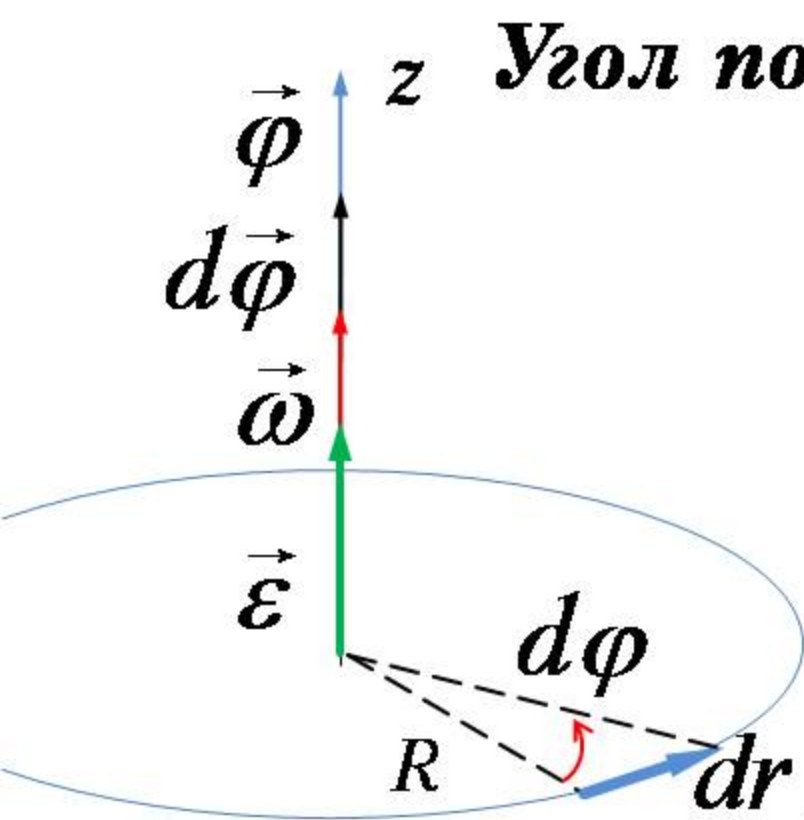
Период обращения точки:  $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$   $[T] = c$

Частота обращения точки:  $\nu = \frac{1}{T}$   $[\nu] = c^{-1}$

Центростремительное ускорение:  $a_{\text{цс}} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$



# Кинематика вращения материальной точки вокруг неподвижной оси.



Угол поворота:  $\vec{\varphi}$  аксиальный вектор

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d \vec{\varphi}}{dt} \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

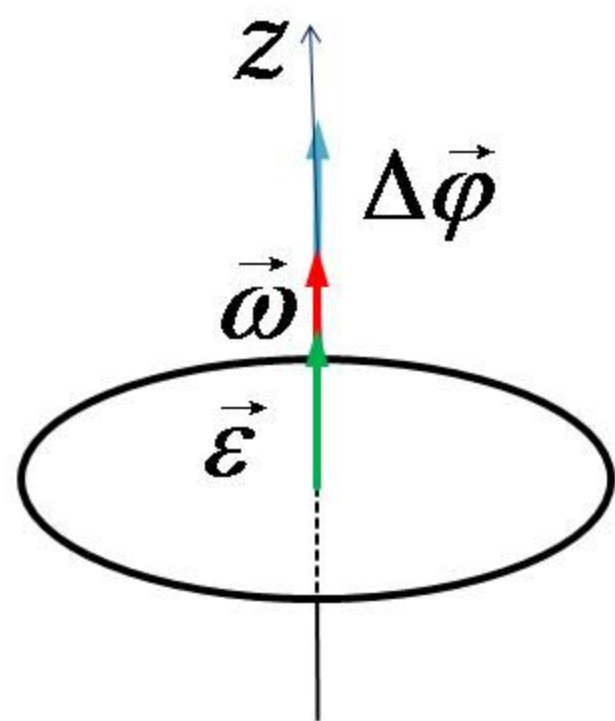
Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} \quad [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Если  $|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$  если  $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$

***Направление вектора угла поворота определяют по правилу правого винта: если смотреть вдоль вектора угла поворота, то мы будем видеть поворот, совершающимся по часовой стрелке.***

# Равноускоренное движение материальной точки по окружности.



*Зависимость угловой скорости от времени:*

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t$$

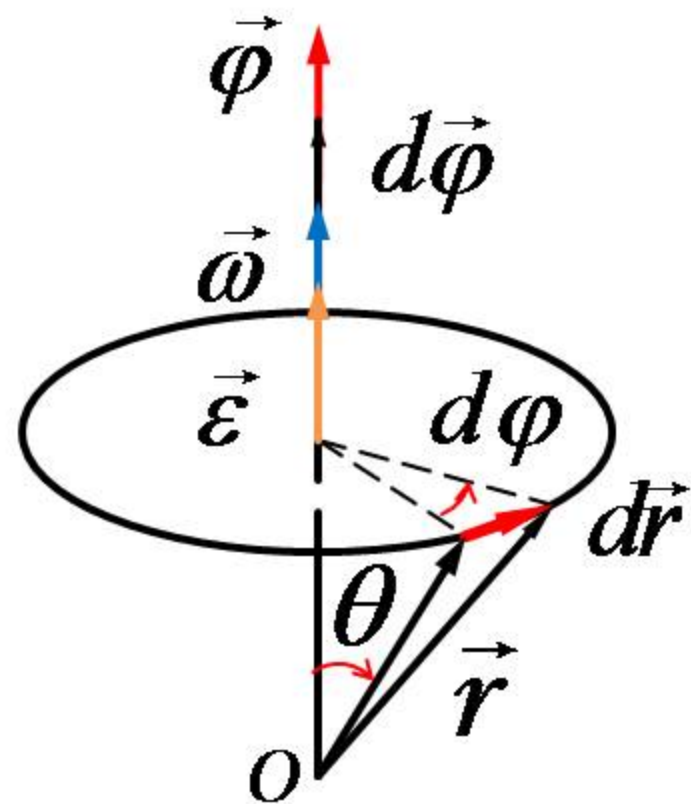
*Зависимость приращения угла поворота от времени:*

$$\Delta\vec{\phi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t$$

$$\Delta\varphi_z = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}$$

# Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



Для точек твёрдого тела  
начало отсчёта в общем  
случае не совпадает с  
центром окружности, по  
которой движется точка

Угол поворота:  $\vec{\varphi}$

Угловая скорость:

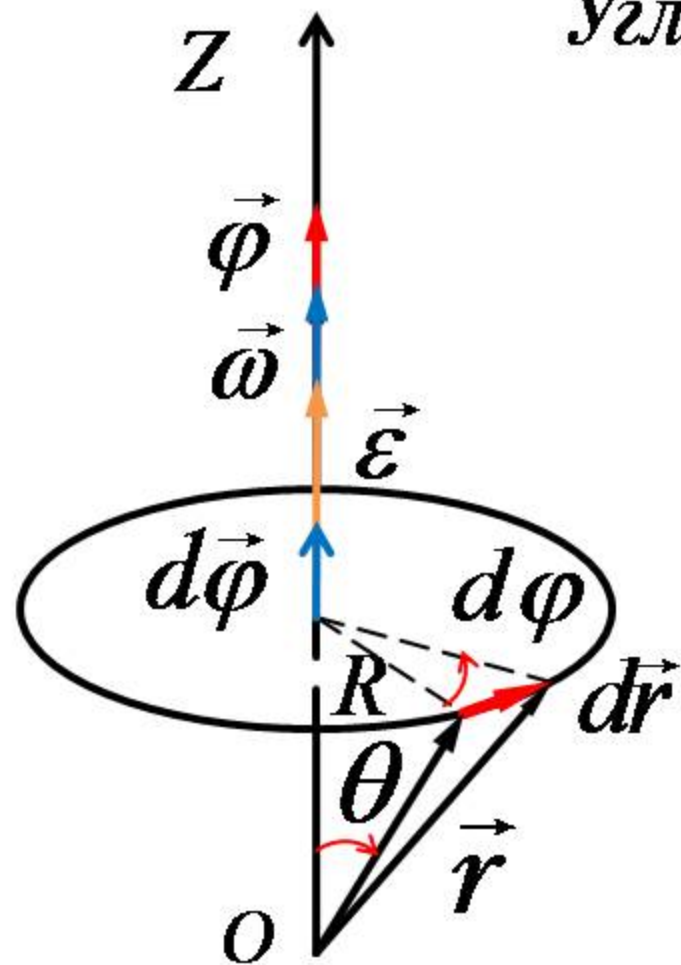
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2}$$



Если:

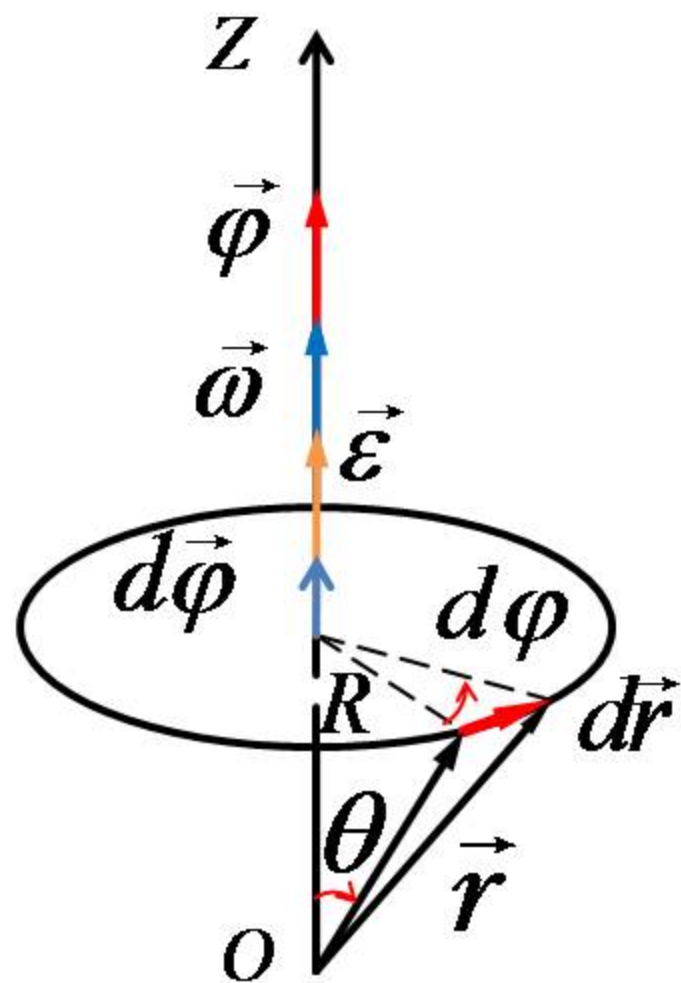
$$|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

Если:  $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$



**Вращение с постоянным  
угловым ускорением**

$$\vec{\varepsilon} = \text{const},$$



$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t,$$

$$\Delta \vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0 \cdot t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$



# Связь линейных и угловых величин.

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}] \quad \text{При вращении}$$

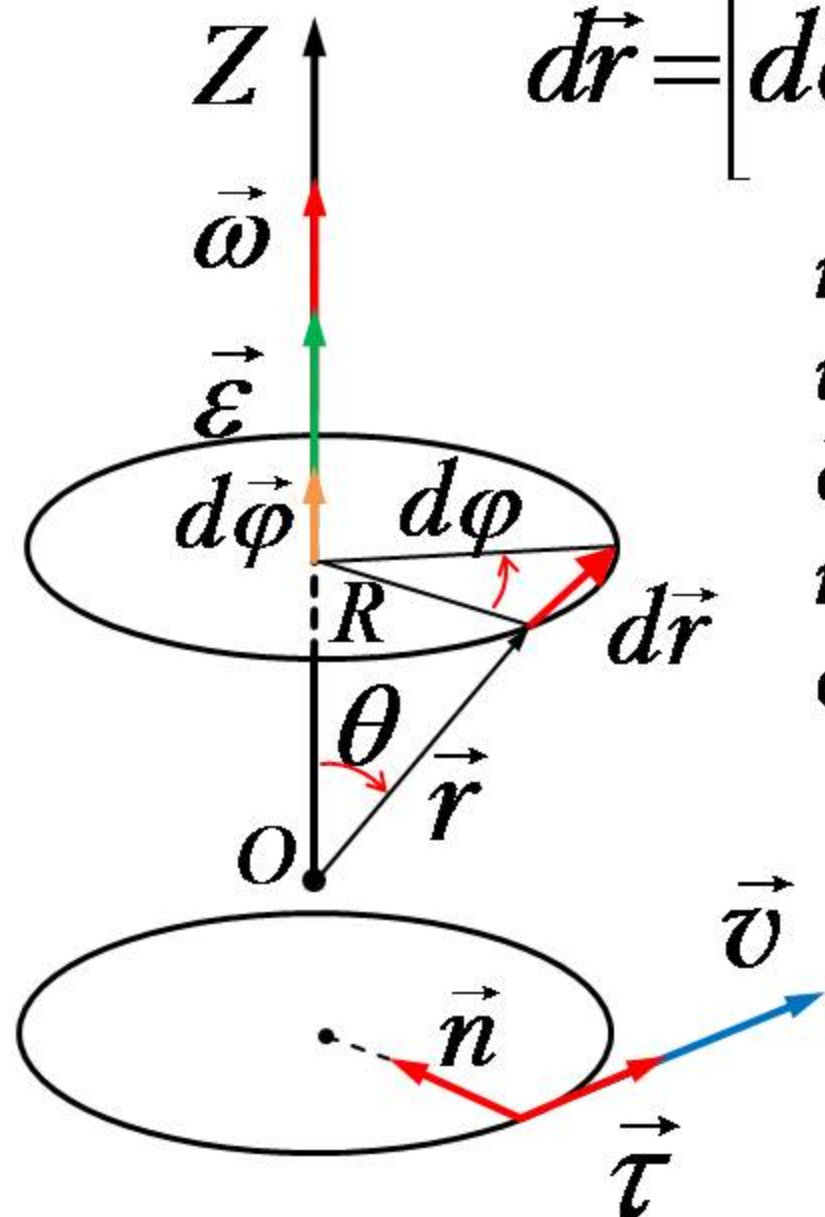
вокруг  
неподвижной оси  $R$  не  
изменяется, поэтому  
дифференцируем  
только первый  
сомножитель

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$R = r \sin \theta$$

$$v = \omega R$$

Подробное объяснение (доп. материал)  
в конце лекции



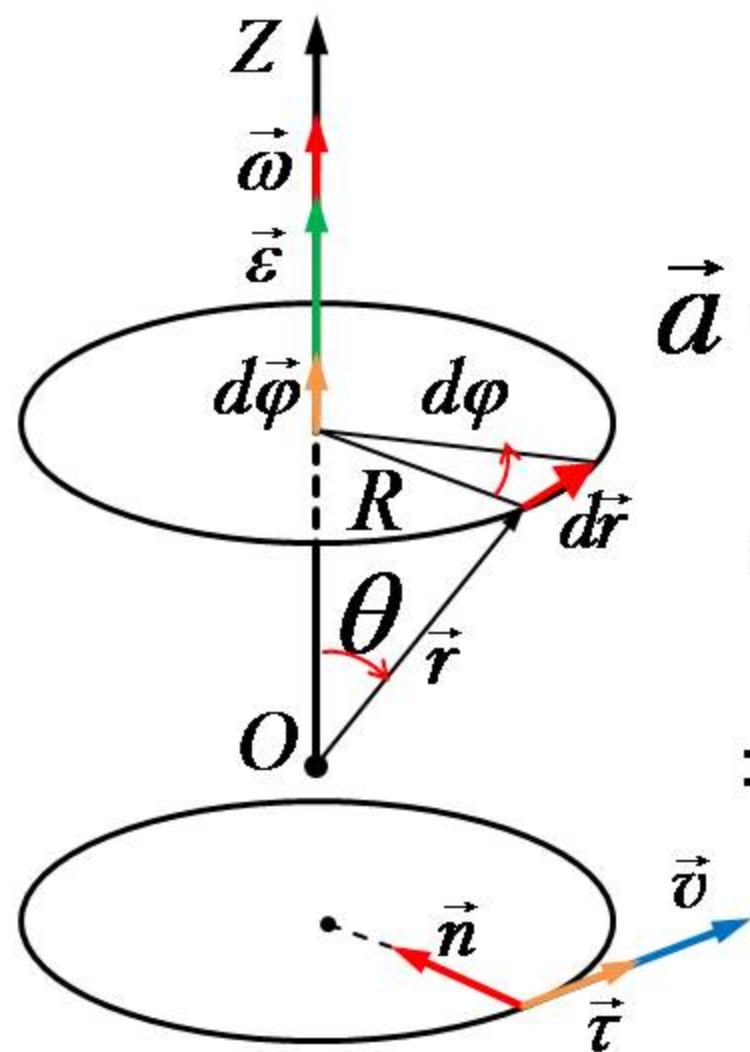
**При рассмотрении таких векторов, как радиус-вектор, скорость или сила и.т.п., вопрос о выборе их направления не возникает – оно вытекает естественным образом из природы этих величин. Такие векторы называют полярными или истинными. Векторы, направление которых связано с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами.**

**При изменении условия, определяющего направление псевдовекторов, например, переходе от правой системы координат к левой псевдовекторы меняют направление на противоположное, а полярные остаются без изменений. Если оба вектора в векторном произведении полярные (или аксиальные), то векторное произведение - аксиальный вектор.**

***Произведение полярного вектора на аксиальный будет полярным вектором. Изменение условия, определяющего направление псевдовекторов на обратное приведёт в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед аксиальным вектором. В итоге направление векторного произведения не изменится.***

**Продифференцируем скорость по времени - найдём ускорение**

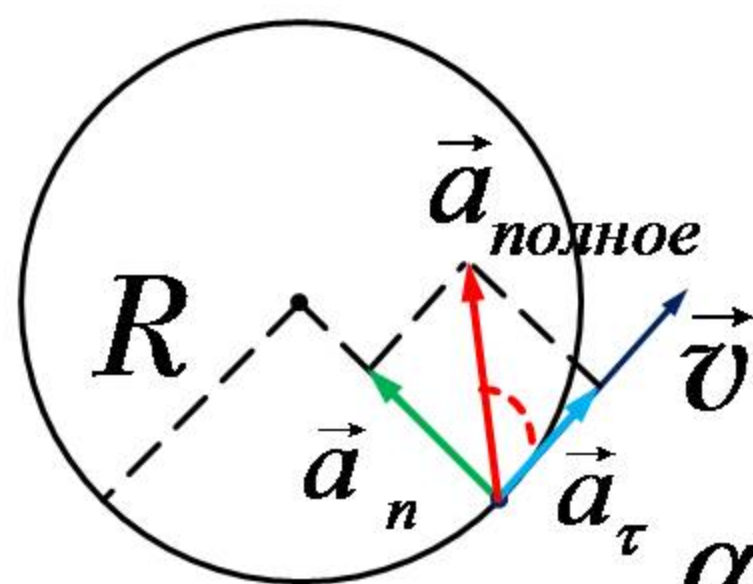
$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= \left[ \vec{\varepsilon}, \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}] \right] = \\ &= \varepsilon_z \cdot R \cdot \vec{\tau} + \omega^2 \cdot R \cdot \vec{n} = \\ &= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \end{aligned}$$

**Пример. Материальная точка начинает движение по окружности радиусом  $R$  с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon$ . Вычислите угол между векторами её скорости и полного ускорения через  $t$  секунд после начала движения.**

$$a_{\tau} = \varepsilon R$$

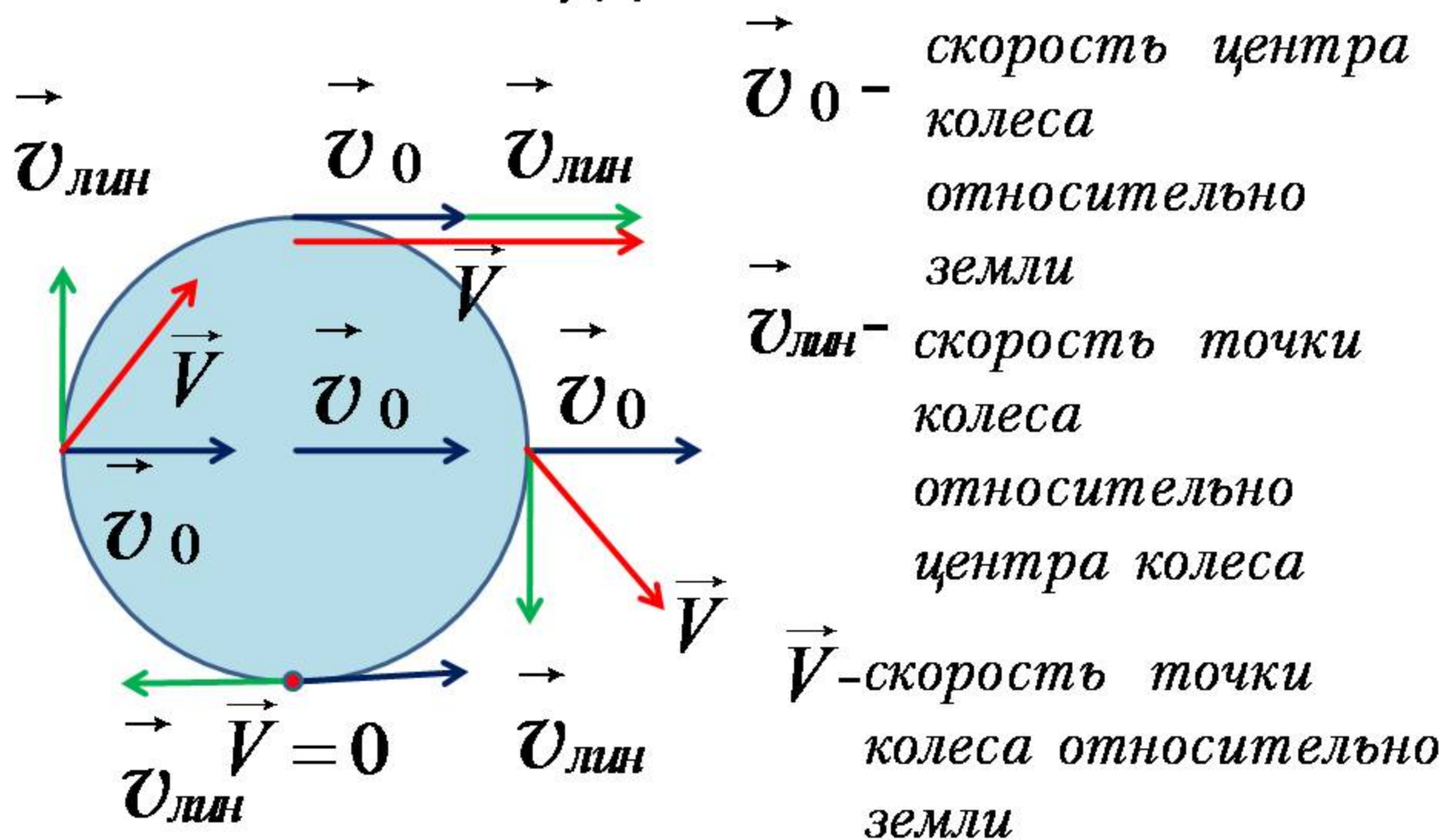


$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{a_{\tau}} = \operatorname{arctg} \varepsilon t^2$$

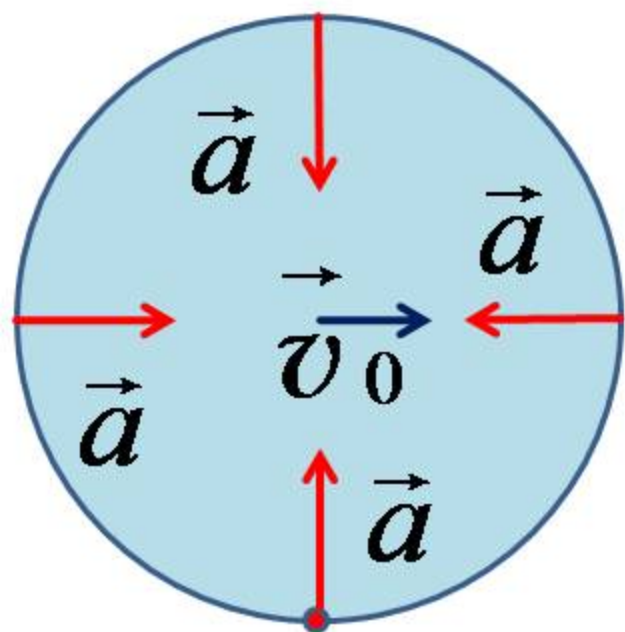


# Плоское движение абсолютно твёрдого тела.



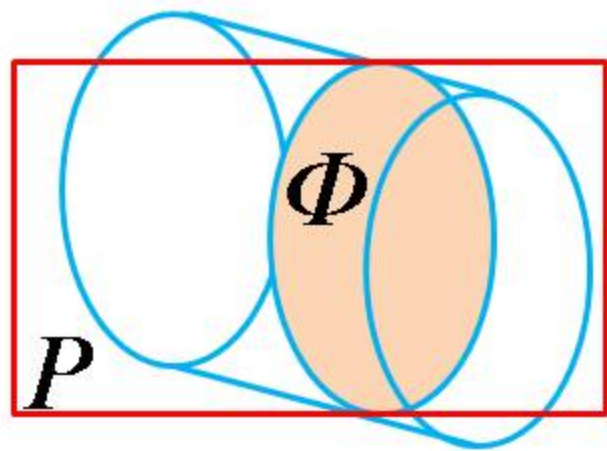


$$\frac{d\vec{V}_{цм}}{dt} = \mathbf{0}$$



При равномерном вращении колеса ускорение точек колеса так же, как при вращении вокруг неподвижного центра направлено к центру колеса, а не к мгновенной оси вращения.

# Плоское движение абсолютно твёрдого тела.



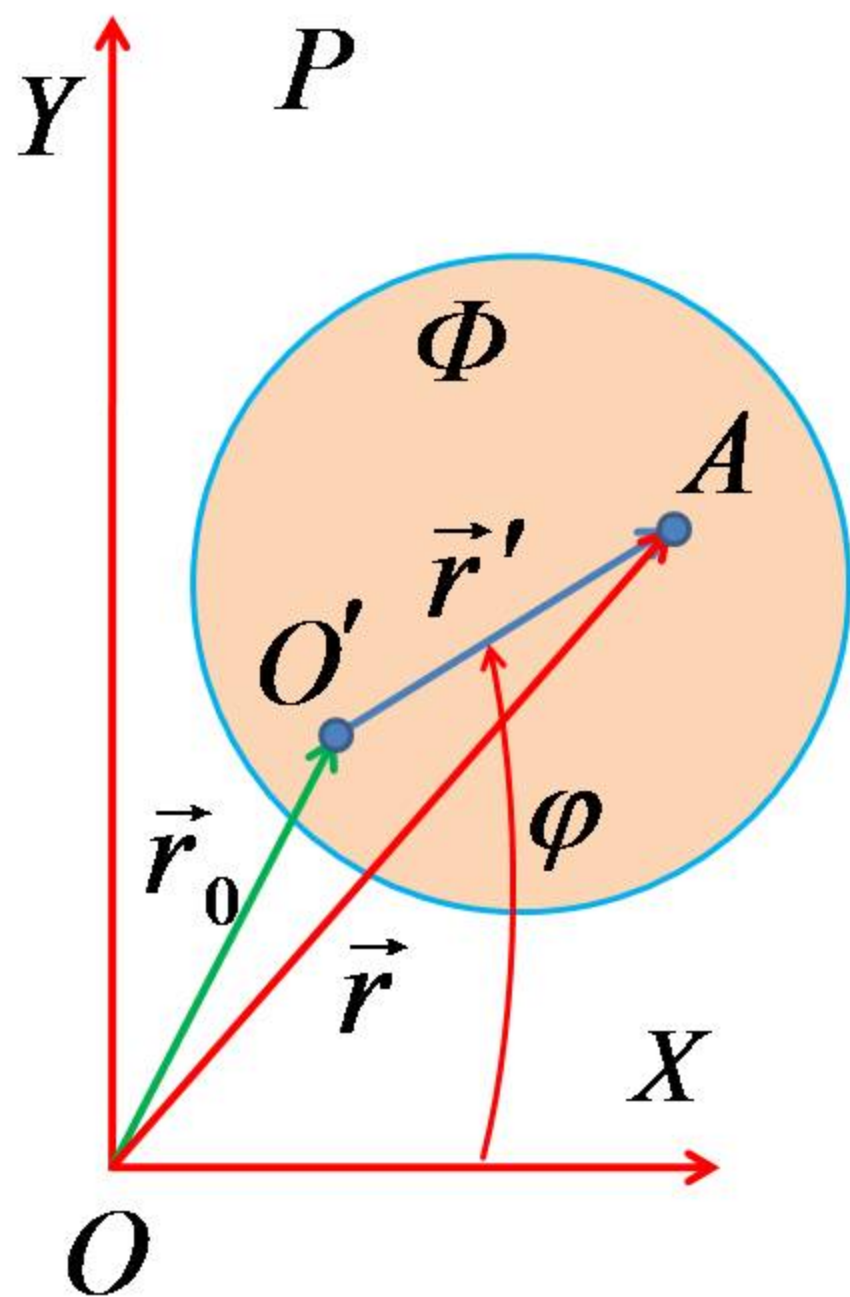
*Пример - цилиндр  
катится по столу*

*При плоском движении каждая точка твёрдого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной в данной системе отсчёта плоскости. Понятно, что при таком движении плоская фигура, образованная сечением тела этой плоскостью  $\Phi$  всё время остаётся в этой плоскости  $P$ .*

Положение твёрдого тела однозначно определяется положением плоской фигуры  $\Phi$  в неподвижной плоскости  $P$ .

Выберем произвольные точки  $A'$  и  $O'$  плоской фигуры  $\Phi$ . Положение фигуры  $\Phi$  в плоскости  $P$  можно определить, задав радиус-вектор  $\vec{r}_0$  точки  $O'$  и угол между радиусом-вектором  $\vec{r}'$  задающим положение  $A'$  относительно  $O'$  ( этот вектор жёстко связан с фигурой) и некоторым фиксированным направлением в  $K$  – системе отсчёта.

**Выберем произвольные точки  $A$  и  $O'$  плоской фигуры  $\Phi$ . Положение фигуры  $\Phi$  в плоскости  $P$  можно определить, задав радиус-вектор  $\vec{r}_0$  точки  $O'$  и угол между радиусом-вектором  $\vec{r}'$ , задающим положение  $A$  относительно  $O'$ , и некоторым фиксированным направлением в  $K$  – системе отсчёта (например, с осью  $Ox$ ).**



***$K$  – система  
отсчёта в  
плоскости  $P$ .  
Плоское движение  
твёрдого тела  
будет описываться  
двумя уравнениями:***

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

**Заметим, что , если  $\vec{r}'$  повернётся на угол  $d\varphi$  , на такой же угол повернётся и любой другой отрезок фигуры. Угловая скорость фигуры не зависит от выбора точки  $O'$**



**Введём вспомогательную систему отсчёта  $K'$ , с началом отсчёта в точке  $O'$ .**

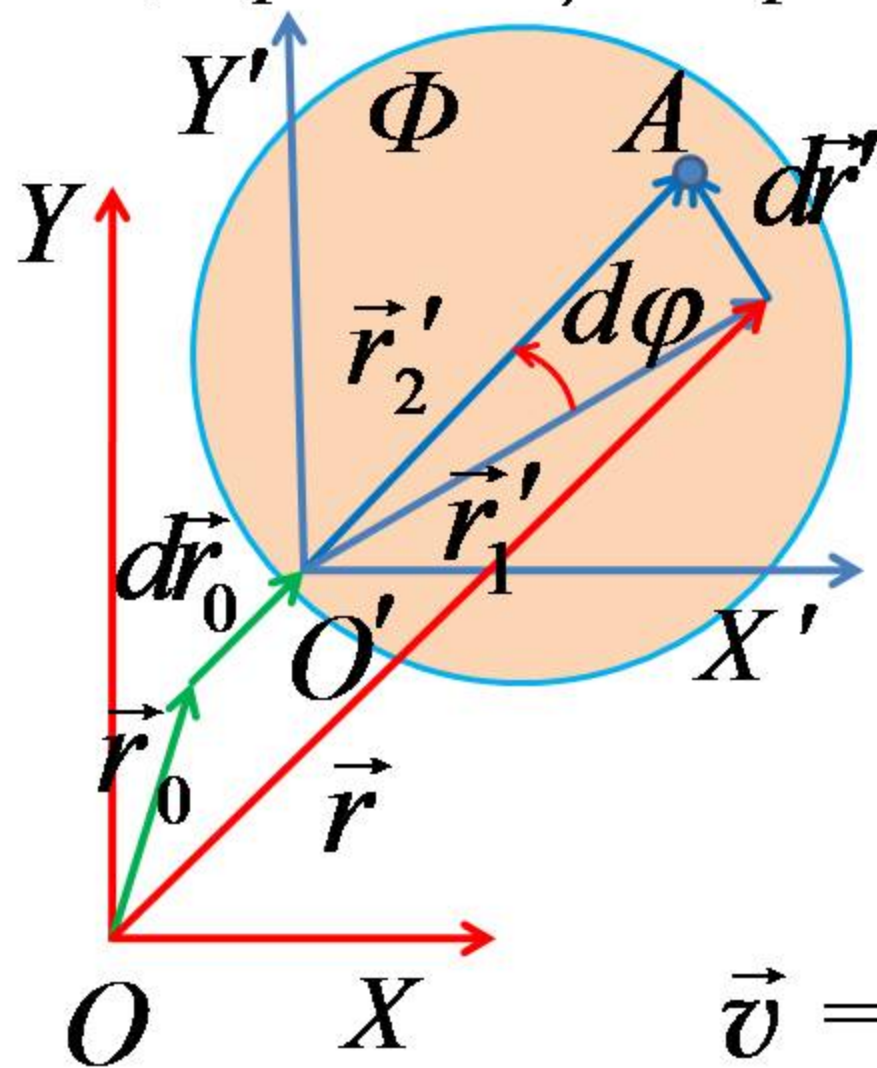
**Оси  $Ox$  и  $Ox'$  направим параллельно. Пусть система отсчёта**

**$K'$  перемещается поступательно относительно  $K$ . Элементарное**

**перемещение  $d\vec{r}$  точки  $A$  в  $K$ -системе**

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \quad (1)$$

Перемещение  $d\vec{r}'$  обусловлено вращением тела относительно неподвижной в  $K'$  системе оси, проходящей через точку  $O'$ .



$$d\vec{r}' = [d\vec{\phi}, \vec{r}'](2)$$

(2) в (1) и

дифференцируем  
с учётом того,  
что  $\vec{r}'$   
по модулю не  
меняется

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}']$$

доп. материал

**Скорость любой точки  $A$  твёрдого тела при  
плоском движении складывается из  
скорости  $\vec{v}_0$   
произвольной точки  $O'$  тела и  $\vec{v}' = [\vec{\omega}, \vec{r}']$   
скорости, обусловленной вращением тела  
вокруг оси, проходящей через точку  $O'$**

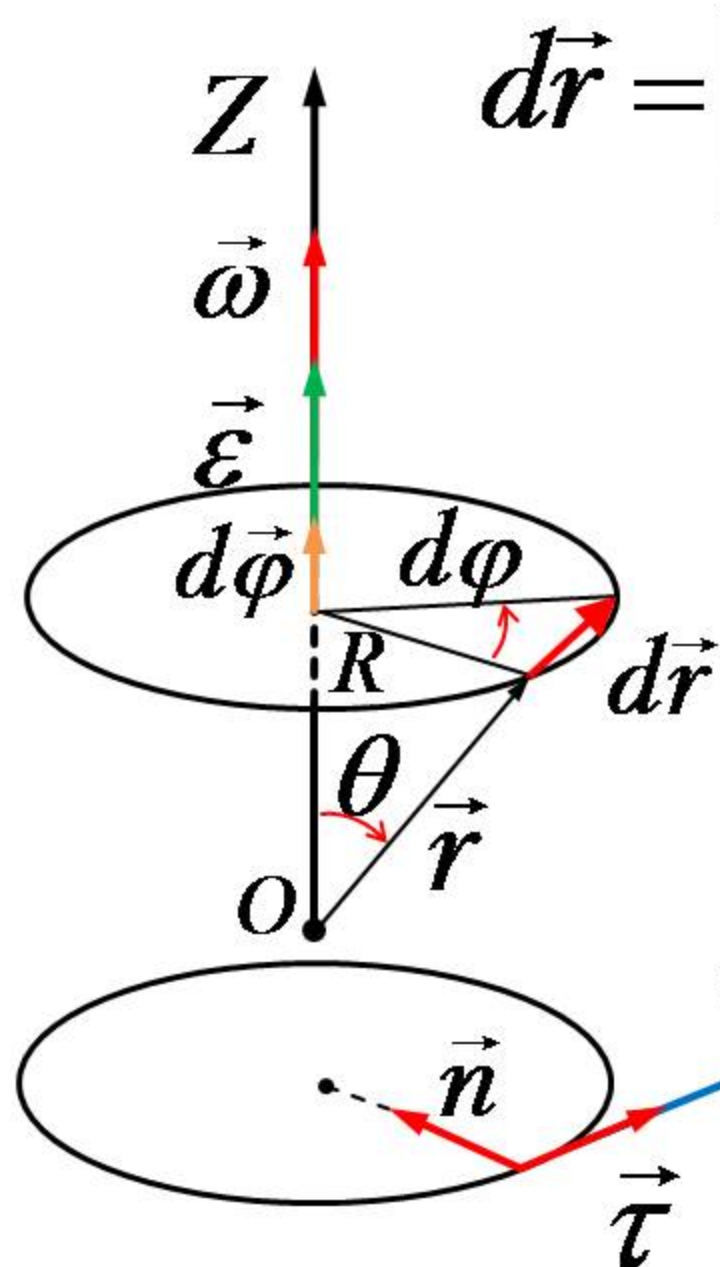
Diagram illustrating a sphere (orange) centered at  $O'$  in a coordinate system with axes  $X'$  and  $Y'$ . A point  $M$  is marked on the sphere's surface. Vectors  $\vec{r}_m'$  and  $\vec{v}_0$  are shown originating from  $O'$ . The angle between the  $Y'$  axis and  $\vec{v}_0$  is labeled  $\Phi$ . The text "Площадь поверхности" (Surface area) and "вращения" (rotation) is partially visible.

Всегда найдётся такая точка  $M$ , что

$$\mathbf{0} = \vec{v}_0 + [\vec{w}, \vec{r}'_m]$$

доп. материал

# Связь линейных и угловых величин ●.



$$d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}]$$

доп. материал

Казалось бы, надо

продифференцировать

сомножители векторного

произведения

по очереди, но ни в одном учебнике

так не делают

Иродов И.Е., например, просто

$d\phi$  делит на  $dt$

Савельев И.В. Вообще не говорит о

перемещении, а сразу вводит

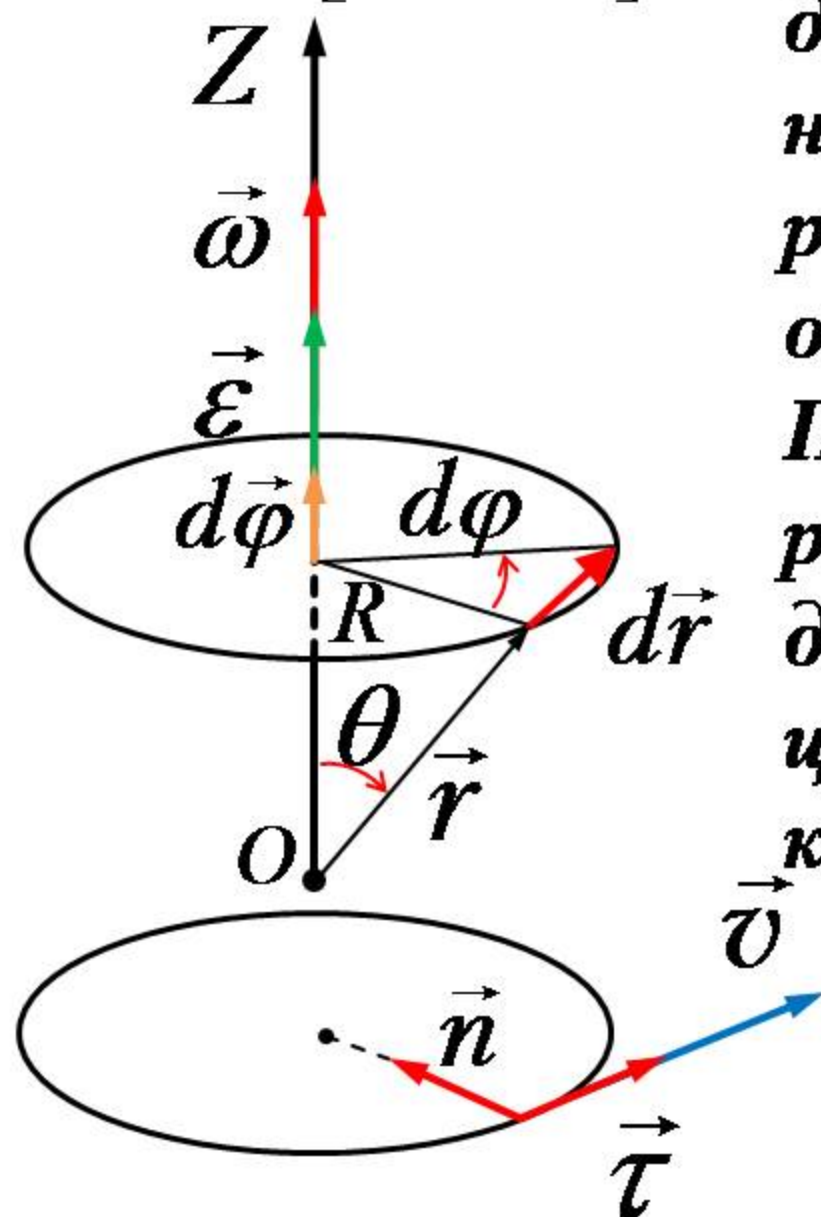
формулу для линейной скорости  
без доказательства.

Не заметите неточности, не

страшно... а если заметили...



$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$$



Вспомним, что на движение точки наложено ограничение - расстояние от точки до оси не изменяется. Поэтому, разумно рассмотреть это движение в цилиндрических координатах.

$$\vec{r} = r_z \vec{e}_z + \rho \vec{e}_\rho$$

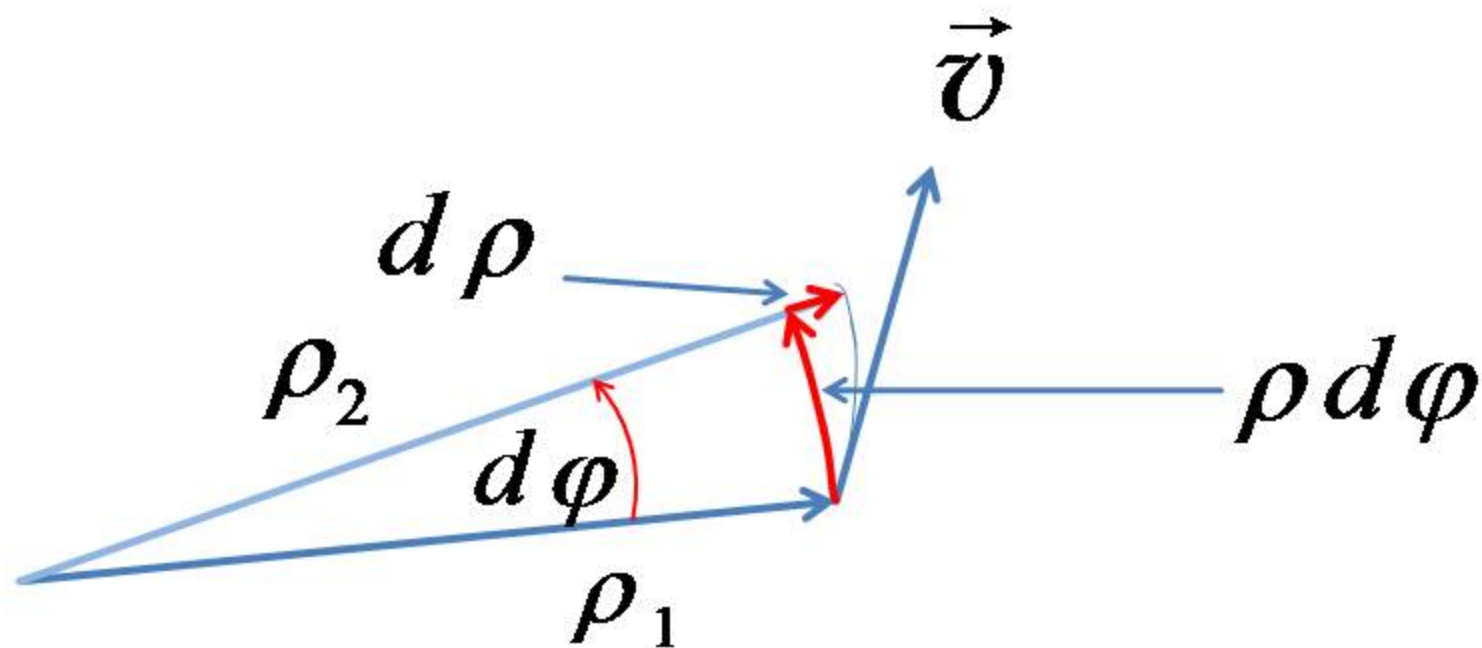
доп. материал



**Орт  $\vec{e}_z$  направлен вдоль вектора угла поворота, первое слагаемое при подстановке в векторное произведение обратится в нуль.**

**Рассмотрим второе слагаемое.**

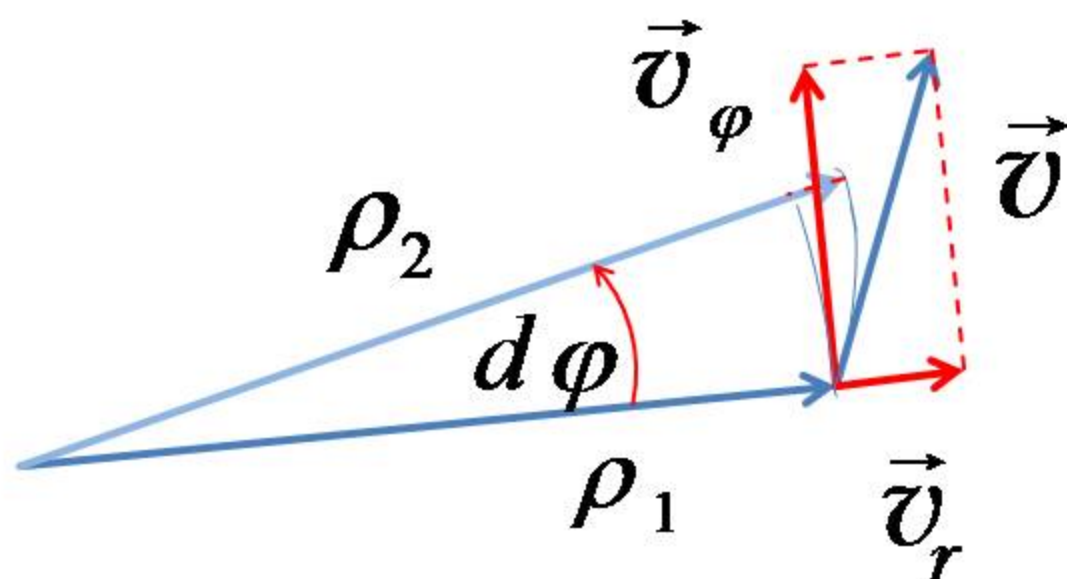
**Сначала рассмотрим общий случай, когда на движение точки не наложено никаких ограничений, в цилиндрической системе координат перемещение точки разделяют на две составляющие**



Перемещение вдоль  $\rho$  равно  $d\rho\vec{e}_r$   
В перпендикулярном направлении  $\rho d\varphi\vec{e}_\varphi$

**Продифференцируем эти перемещения,  
найдем радиальную**

$$\vec{v}_r = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_r$$



**и тангенциальную или поперечную  
скорости**

$$\vec{v}_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \rho \omega \vec{e}_\varphi$$

доп. материал



**При вращении вокруг неподвижной оси  $\rho=R$  не изменяется. Нет радиального перемещения  $d\rho$ , есть только поперечное перемещение  $\rho d\varphi$ . Нет радиальной скорости**

$$\vec{v}_r = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_r$$

**есть только трансверсальная скорость**

$$\vec{v}_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \rho \omega \vec{e}_\varphi$$

*А она в свою очередь  
может быть  
представлена в виде*

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$R = r \sin \theta$$

$$v = \omega R$$