

Лекция 4.

Второй закон Ньютона в импульсной форме.

Закон сохранения импульса.

Второй закон Ньютона в импульсной форме. Основное уравнение динамики.

Импульс тела: $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t$$

Приращение импульса тела равно импульсу действовавшей на него силы.

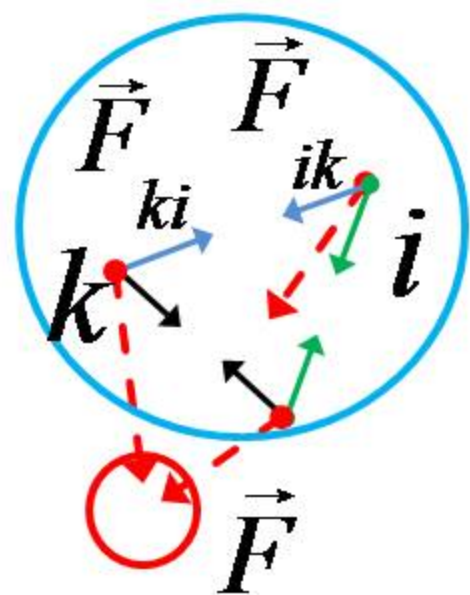
$$[\vec{p}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

$$[\vec{F}\Delta t] = \text{Н} \cdot \text{с}$$

Импульс системы частиц

$$\vec{P}_{сист} = \sum_i \vec{p}_i \quad \vec{F}_{ki} \text{ и } \vec{F}_{ik} - \text{внутренние силы}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_k \underbrace{\vec{F}_{ik}}_{\text{внутренние силы}} + \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{внешние силы}}$$



$$\frac{d\vec{P}_{системы}}{dt} = \underbrace{\sum_i \sum_{k \text{ внутр.}} \vec{F}_{ik}}_0 + \sum_i \vec{F}_i \quad \text{внешн.}$$

III закон Ньютона
 $(\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki})$

Импульс системы частиц может изменяться
 под действием только внешних сил

Центр масс системы частиц.

Закон движения центра масс.

1). Радиус-вектор центра масс:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

2). Скорость центра масс:

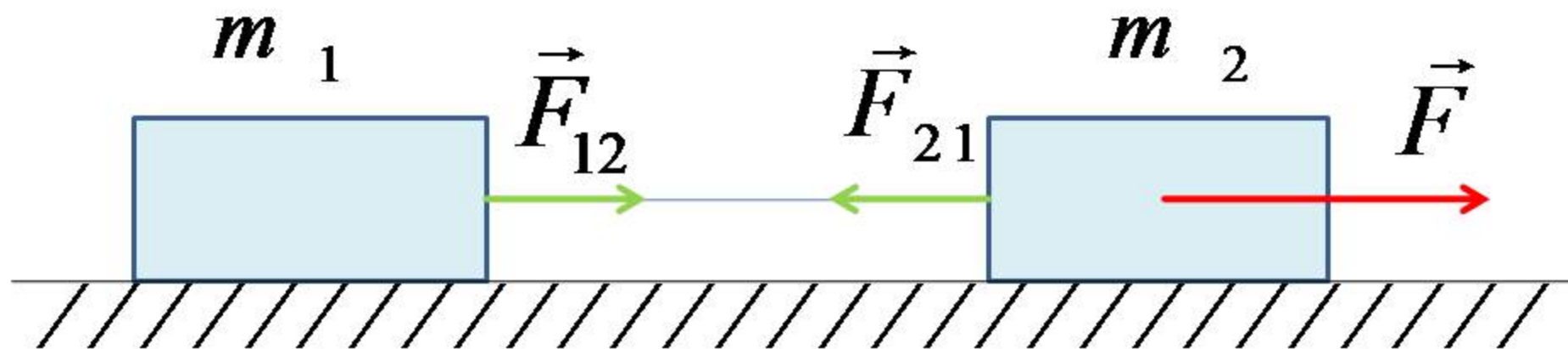
$$\underline{\vec{v}_c} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\underline{\vec{P}_{\text{системы}}}}{\underline{m_{\text{системы}}}}$$

3). Закон движения центра масс системы частиц:

$$m_{\text{системы}} \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i \text{ внешн.}}$$

Центр масс любой системы частиц движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней были бы приложены все внешние силы.

Пример



$$(m_1 + m_2) \vec{a} = \vec{F}$$

Ц - система.

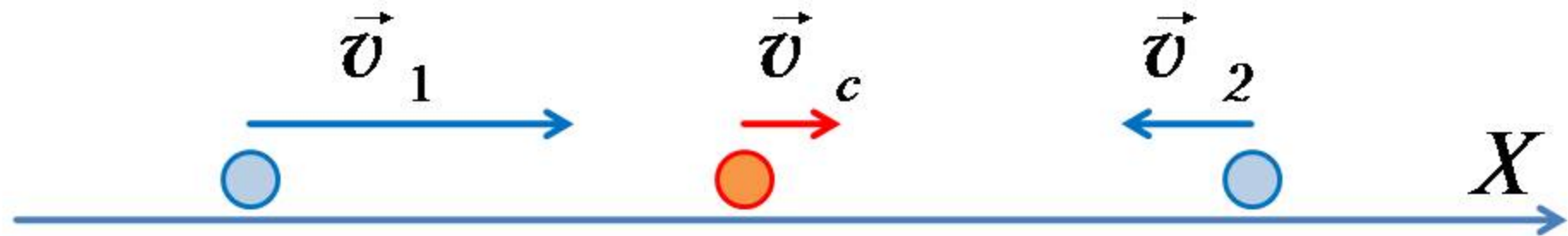
Систему отсчёта, жёстко связанную с центром масс, называют системой отсчёта центра масс или Ц - системой.

Отличительной особенностью Ц - системы является то, что полный импульс системы частиц в ней всегда равен нулю.

$$\vec{v}_c = 0 = \frac{\vec{P}_{\text{системы}}}{m_{\text{системы}}}$$

Для замкнутой системы частиц Ц - система является инерциальной.

Пример. Два электрона сближаются, двигаясь вдоль одной прямой. На какое минимальное расстояние они сблизятся, если на очень большом расстоянии друг от друга они имеют скорости $v_1=50$ м/с и $v_2=20$ м/с.



$$2m\vec{v}_c = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

В Ц - системе $\tilde{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c$ $\tilde{\vec{v}}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c$

$$v_{cx} = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{50 - 20}{2} = 15 \text{ м / с}$$

$$\tilde{v}_{1x} = v_{1x} - v_{cx} = 50 - 15 = 35 \text{ м / с}$$

$$\tilde{v}_{2x} = v_{2x} - v_{cx} = -20 - 15 = -35 \text{ м / с}$$

$$m \frac{\tilde{v}_1^2}{2} + m \frac{\tilde{v}_2^2}{2} + \underbrace{U_{\infty}}_{=0} = k \frac{e^2}{r_{min}} + \underline{0}$$

В момент максимального сближения электронов их кинетическая энергия в Ц-системе равна нулю.

$$r_{min} = \frac{k e^2}{m \tilde{v}^2}$$

Закон сохранения импульса

Импульс замкнутой системы частиц не изменяется с течением времени

1). В классической механике закон сохранения импульса является следствием из законов Ньютона :

$$\frac{d\vec{P}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i \text{ внешн.}}$$

В замкнутой системе частиц $\vec{F}_{i \text{ внешн.}} = 0$

$$\vec{P}_{\text{системы}} = \text{const}$$

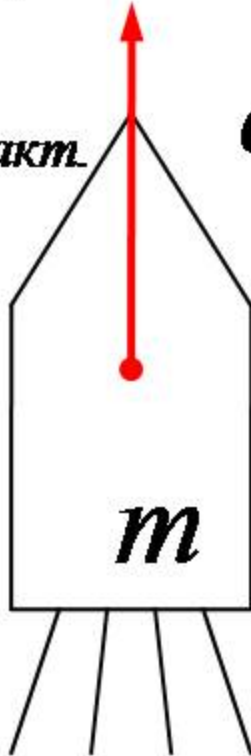
2). Закон сохранения импульса – фундаментальный закон природы.

Закон сохранения импульса можно применять

- 1). Если система частиц замкнута
($\vec{F}_{\text{внешн}} = 0$)
- 2). Если $\sum_i \vec{F}_{i \text{ внешн}} = 0$
- 3). Если $\sum_i F_{i x} = 0$, то $p_x = \text{const}$
- 4). Если кратковременные силы взаимодействия в системе во много раз превосходят по величине внешние силы

Реактивное движение

Скорость системы отсчёта равна скорости ракеты в момент времени $t=0$:


$$\vec{F}_{\text{реакт.}} \quad d\vec{p} = 0 = m d\vec{v} + \underbrace{m_{\text{газа}} \cdot \vec{v}_{\text{отн}}}_{-dm} : dt$$

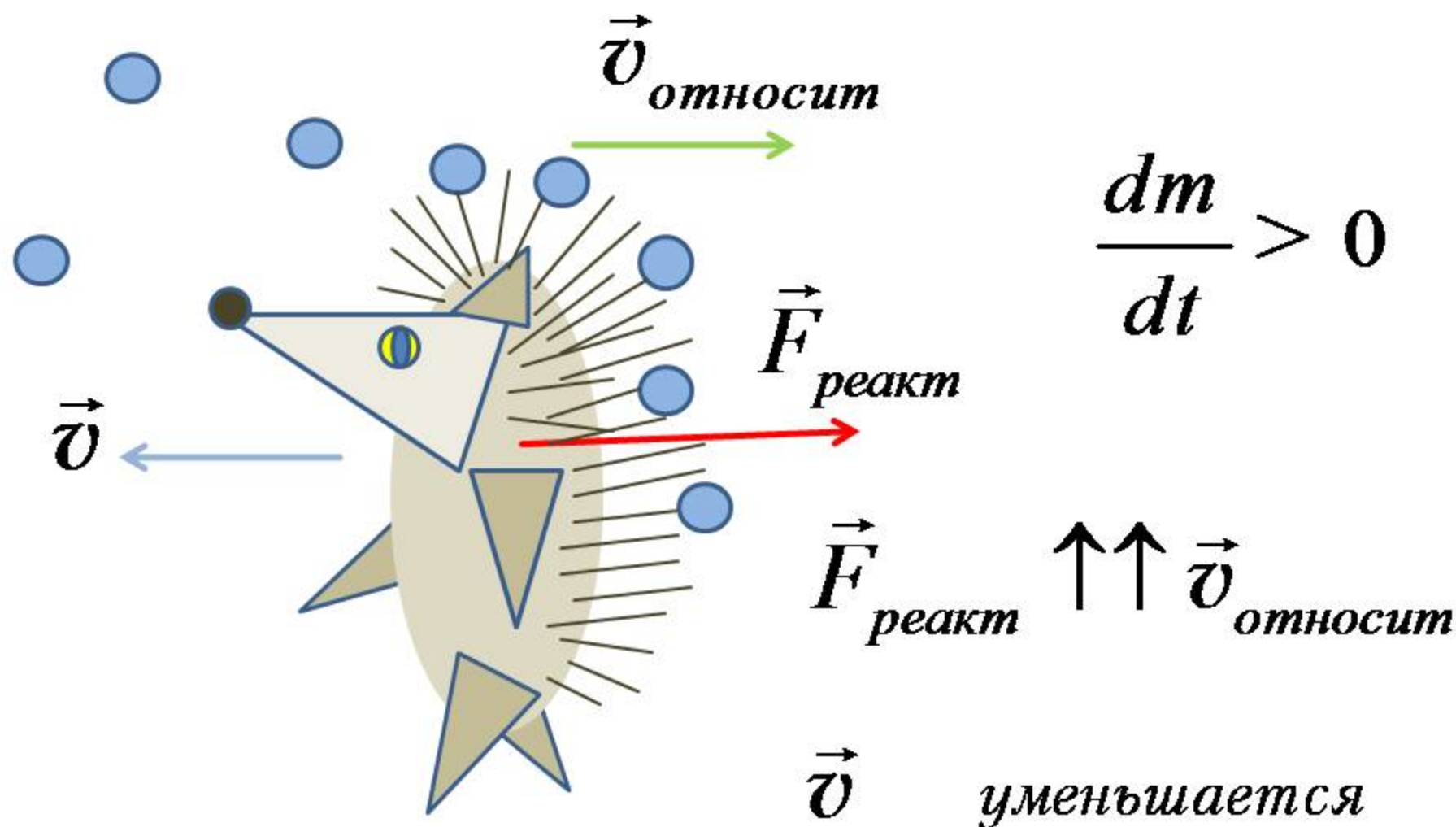
m - масса ракеты

$\vec{v}_{\text{отн}}$ - скорость газа относительно ракеты

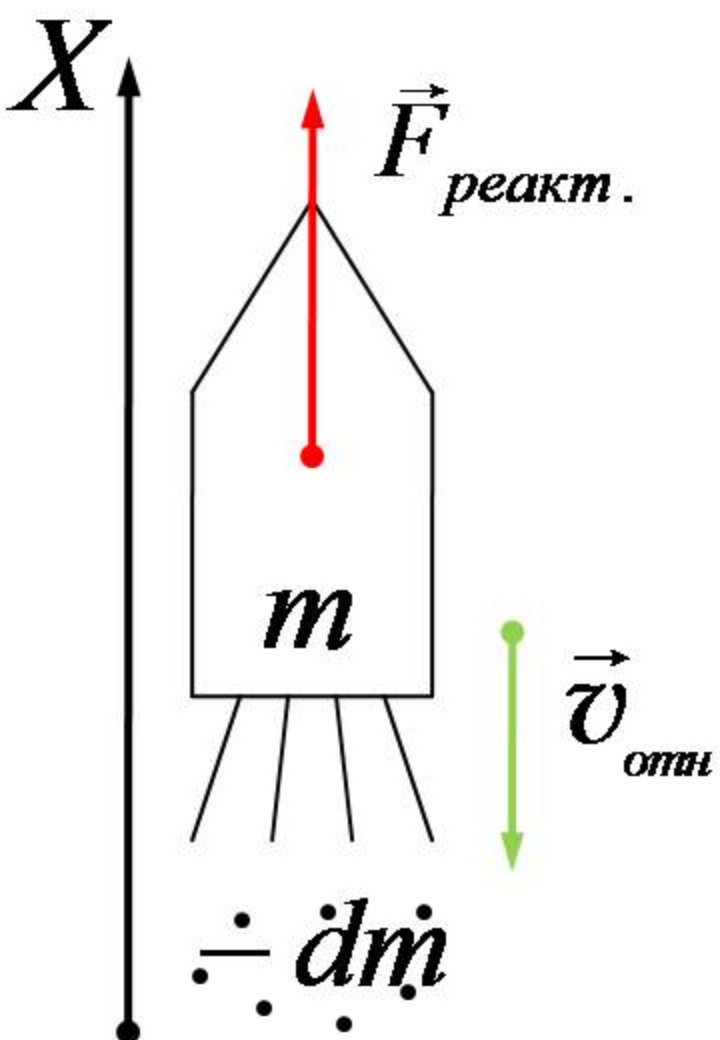

$$\dot{m}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{F}_{\text{реактивная}}$$

Пример. Ёжик в тумане.



Формула Циолковского



$$m d\vec{v} = dm \cdot \vec{v}_{\text{отн}}$$

$$Ox : dv = -v_{\text{отн}} \left(\frac{dm}{m} \right)$$

$$v = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + \text{const}$$

Начальные условия:

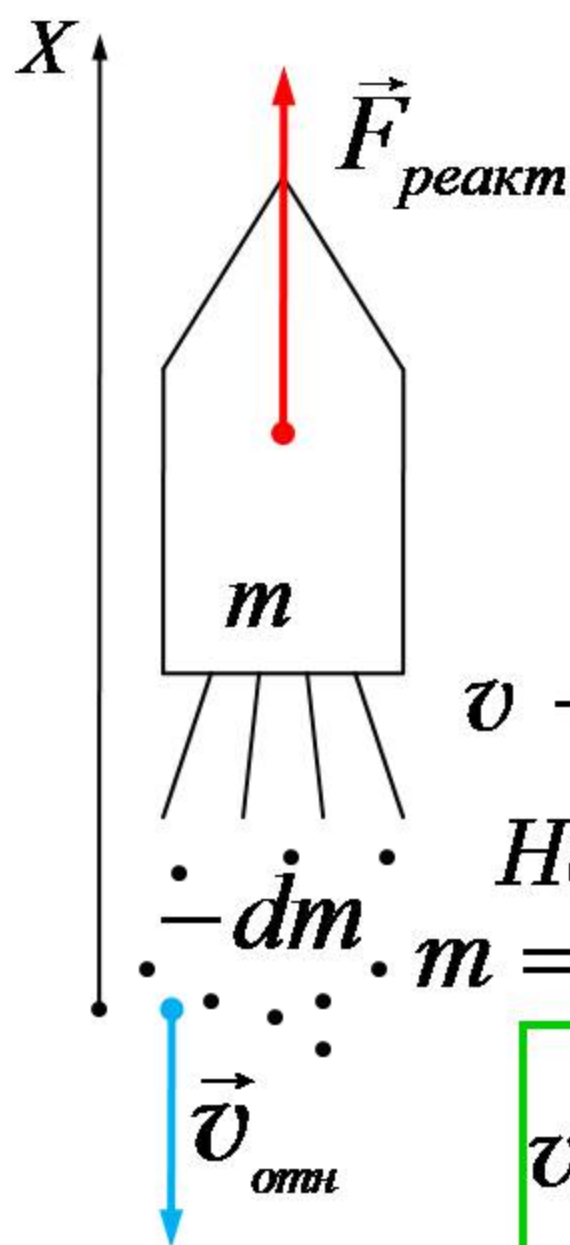
при $m = m_0$; $v = 0$

$$0 = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + v_{\text{отн}} \cdot \ln m_0$$

$$v = v_{\text{отн}} \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}$$

Уравнение Мещерского



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{реакт}} + \vec{F}_{\text{внешн}}$$

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} - mg$$

$$m \cdot d(v + gt) = -v_{\text{отн}} \cdot dm$$

$$v + gt = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + \text{const}$$

Начальные условия:

$$m = m_0; v = 0 \Rightarrow \text{const} = v_{\text{отн}} \ln m_0$$

$$v = v_{\text{отн}} \cdot \ln \frac{m_0}{m} - gt$$