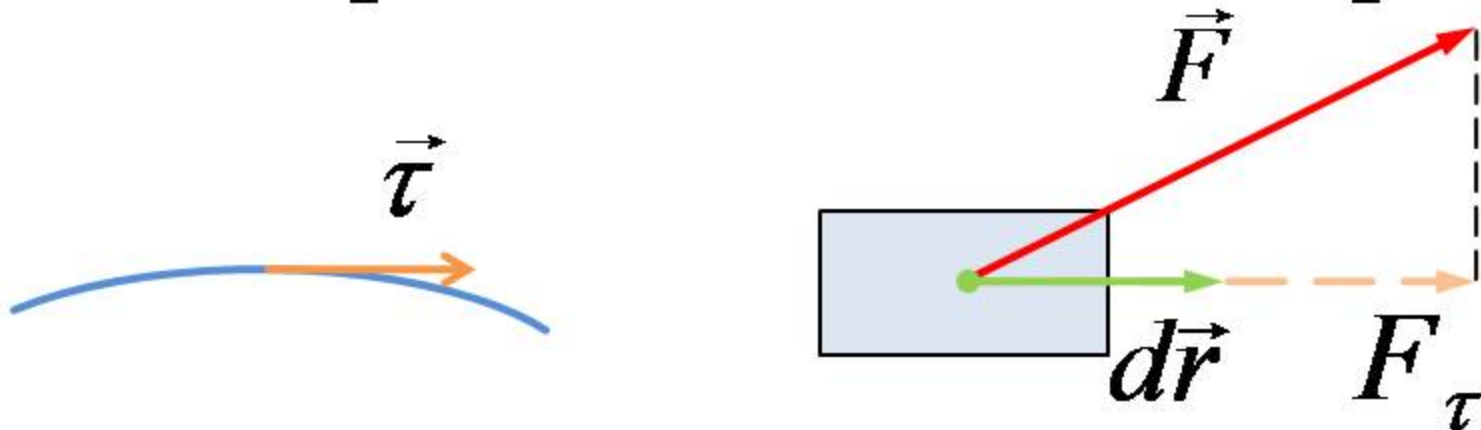


Лекция 5.

Работа. Мощность. Энергия.

Элементарная механическая работа



$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F_\tau dl$$

F_τ - проекция силы на направление
перемещения точки её приложения

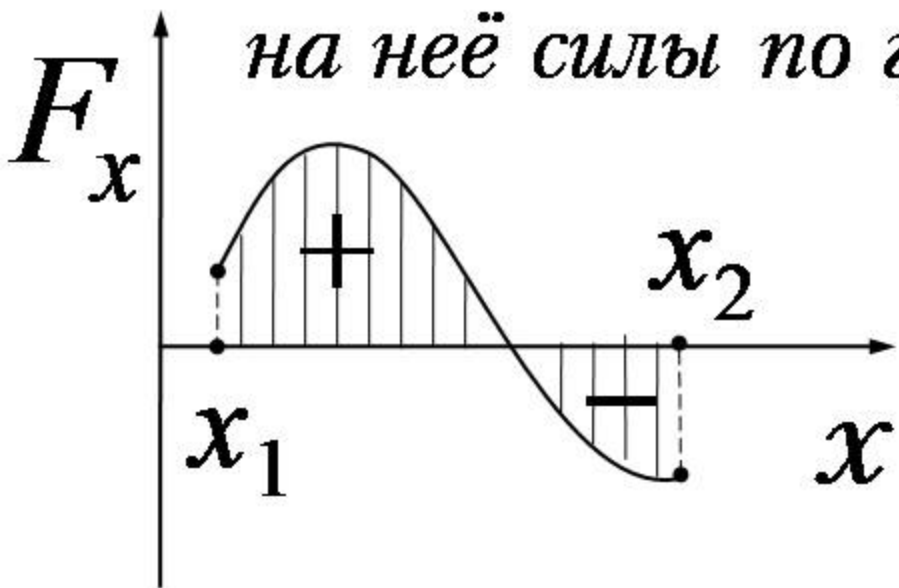
$$[A] = \text{Дж}$$

Элементарной работой δA силы $\vec{F}$ на малом перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение $\vec{F}$ на $d\vec{r}$. **Работой** A , совершаемой силой $\vec{F}$ на конечном участке траектории точки её приложения, называется алгебраическая сумма элементарных работ этой силы на всех малых частях этого участка.

Полная механическая работа

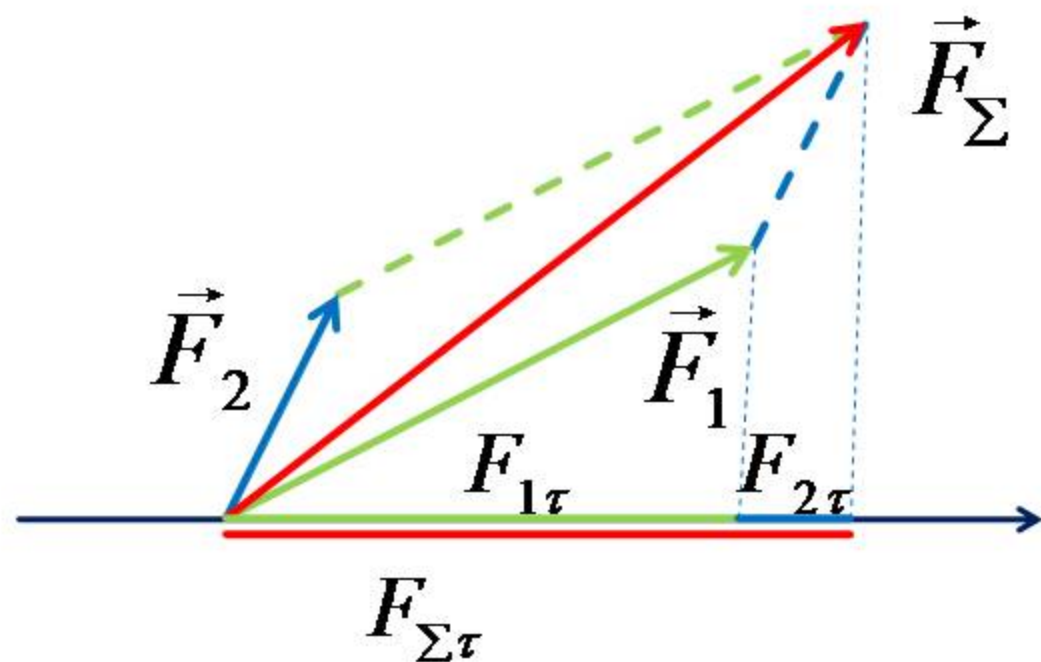
$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_{\tau} dl$$

Материальная точка движется вдоль оси Ox . Вычислим работу действующей на неё силы по графику зависимости $F_x(x)$.



$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Сумма работ всех сил,
приложенных к телу, равна
работе равнодействующей.



$$\delta A = F_{\Sigma\tau} dl = (F_{1\tau} + F_{2\tau}) dl = \delta A_1 + \delta A_2$$

Мгновенная мощность силы

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_{\tau} \cdot v$$

$$[N] = \text{Вт}$$

Мощностью (мгновенной мощностью) силы называется скалярная физическая величина N , равная отношению элементарной работы этой силы δA к малому промежутку времени dt , в течение которого эта работа совершается.

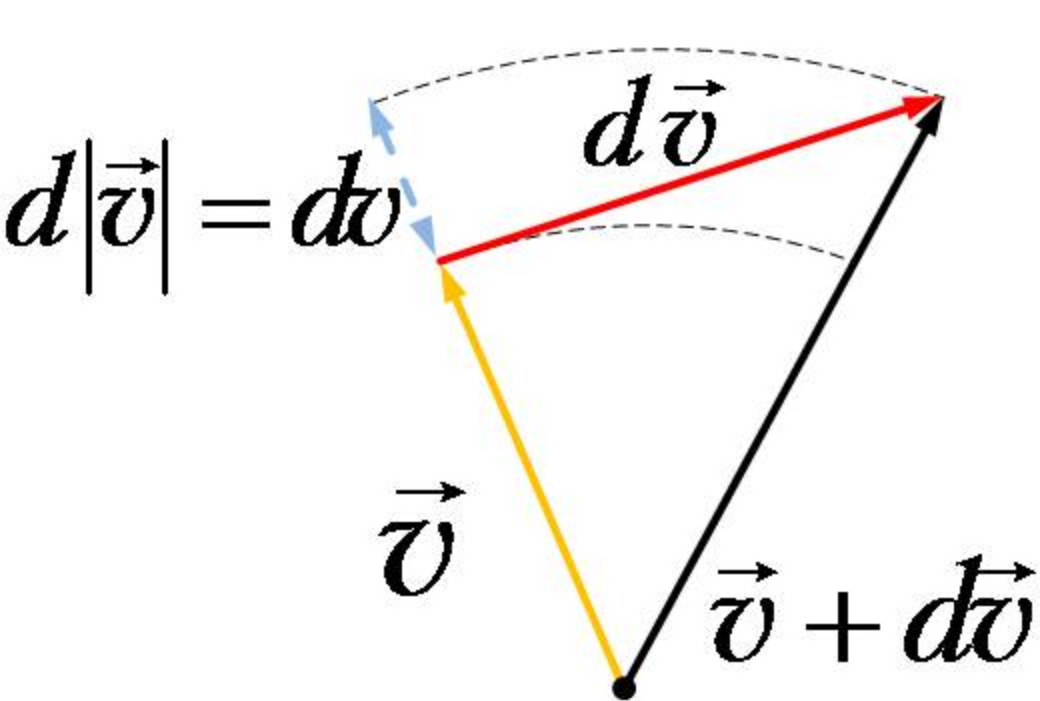
Средняя мощность силы

Средней мощностью силы в интервале времени от t до $t+\Delta t$ называется физическая величина N_{cp} , равная отношению работы A , совершаемой этой силой за промежуток времени Δt к его продолжительности.

$$N_{cp} = \frac{A}{\Delta t}$$

Кинетической энергией тела называется энергия его механического движения.

Теорема о кинетической энергии



$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}$$

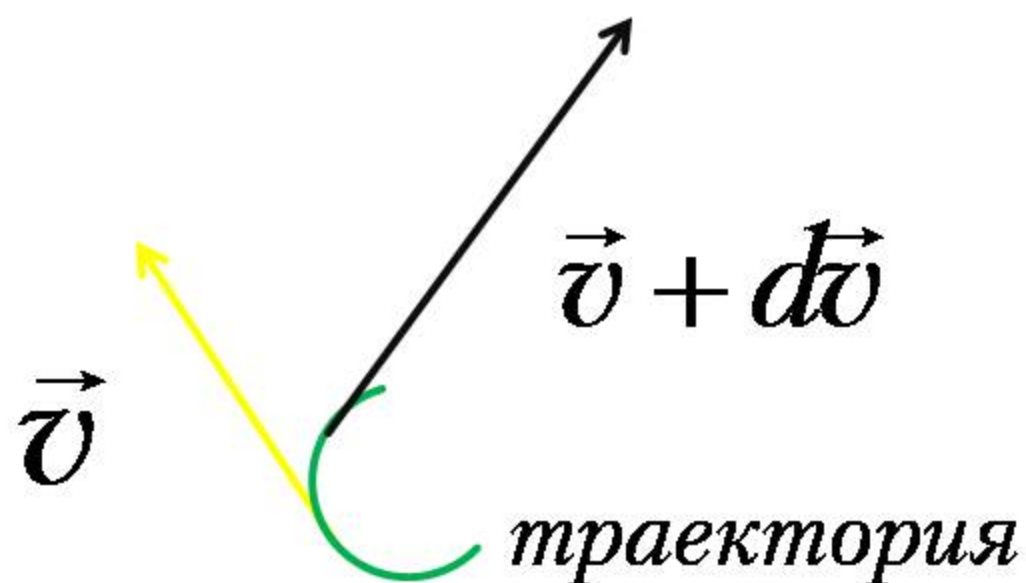
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m d\vec{v}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\delta A = m d\vec{v} \vec{v}$$

$$d\vec{v} \vec{v} = d|\vec{v}| v = dv \cdot v$$

Рисунок для тех, кто не понял, как движется точка.



$$\delta A = m v dv$$

$$A = \int_I^{\text{II}} m v dv = \frac{m v_{\text{II}}^2}{2} - \frac{m v_I^2}{2} = \Delta E_K$$

$$E_K = \frac{m v^2}{2}$$

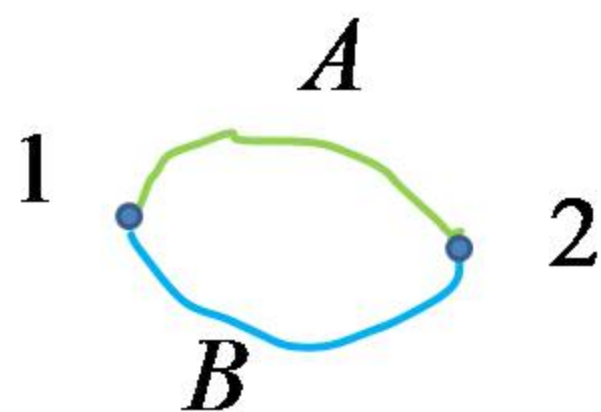
Сумма работ всех сил, приложенных к телу, равна приращению кинетической энергии тела.

Консервативные силы.

Стационарным называют поле, остающееся постоянным во времени.

Консервативными называют силы, работа которых при перемещении частицы из одной точки в другую не зависит от пути между этими точками.

Силы поля являются консервативными, если в стационарном случае их работа на любом замкнутом пути равна нулю.



$$A_{1A2} = A_{1B2}$$

$$A_{2B1} = -A_{1B2}$$

$$A_{\text{замкн}} = A_{1A2} + A_{2B1} = 0$$

Диссипативными называются силы, суммарная работа которых при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна.

Гироскопическими называются силы, зависящие от скорости материальной точки, на которую они действуют, и направленные перпендикулярно к этой скорости. (Эти силы не могут совершать работы.)

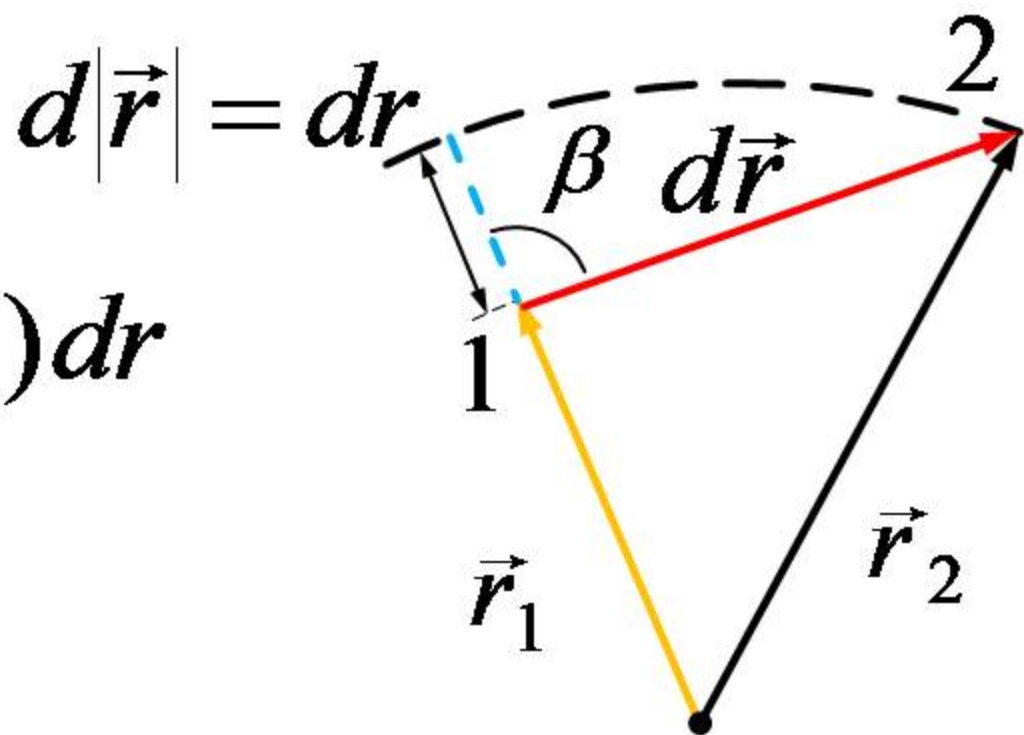
Центральные силы.

Центральными называют силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами, и направленные по прямой, проходящей через эти частицы.

$$\vec{F} = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Все центральные силы являются консервативными

$$\vec{F} = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$



$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \pm F(r) dr$$

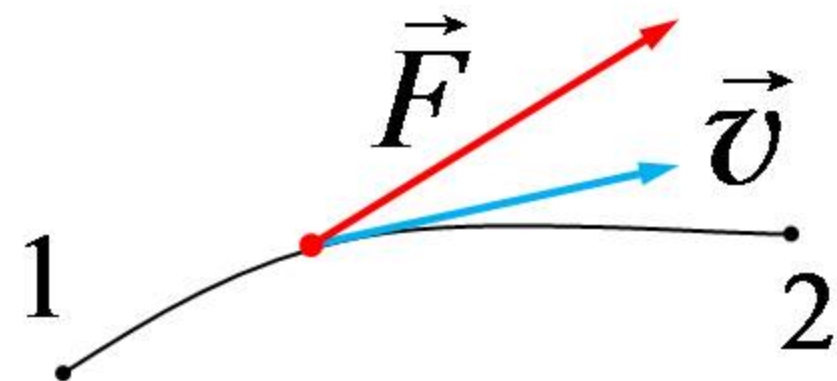
$$A = \pm \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$

Полученное выражение зависит только от вида функции $F(r)$ (характер взаимодействия) и от начального r_1 и конечного r_2 расстояния от частицы до силового центра и не зависит от пути.

Потенциальной энергией частицы называется энергия зависящая от её положения в потенциальном поле.

Потенциальной энергией системы частиц называется часть энергии механической системы, зависящая только от её конфигурации, т.е. от взаимного расположения всех частиц системы и от их положения во внешнем потенциальном поле.

Потенциальная энергия частицы в поле

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r}$$


Поскольку работа консервативной силы не зависит от пути, а зависит только от начальных и конечных координат частицы, существует скалярная функция координат, такая, что работа равна разности значений этой функции.

Потенциальная энергия. $U = U(\vec{r})$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = \underbrace{U_1}_{\text{Условились}} - \underbrace{U_2}_{\text{Условились}} = -\Delta U$$

Работа сил поля на пути 1-2 равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле. Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной (не зависящей от $\vec{r}$) постоянной.

Потенциальная энергия и сила поля.

$$-dU = \delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_{\tau} dl$$

$$F_{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial l}$$

Знак частной производной указывает на то, что производная берётся по определённому направлению

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad}U = -\nabla U$$

Векторный дифференциальный оператор набла

$$\underline{\nabla} C = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) C = \textit{grad} C$$

Напряженность и потенциал силового поля.

*Выделим величину, характеризующую
частицу, находящуюся в силовом
поле(q, m). Останутся величины,
характеризующие само поле —
напряжённость и потенциал.*

$$\vec{F} = q \vec{E} \qquad U = q \varphi$$

$\vec{E}$ — силовая характеристика поля

φ — энергетическая характеристика поля

Связь напряжённости и потенциала

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad} \varphi$$

Напряженность поля направлена в сторону
наибыстрейшего убывания его потенциала.

Линии напряженности
направлены перпендикулярно
эквипотенциальным поверхностям.

$$E_{\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0$$

Силовое поле можно задать
двумя способами:

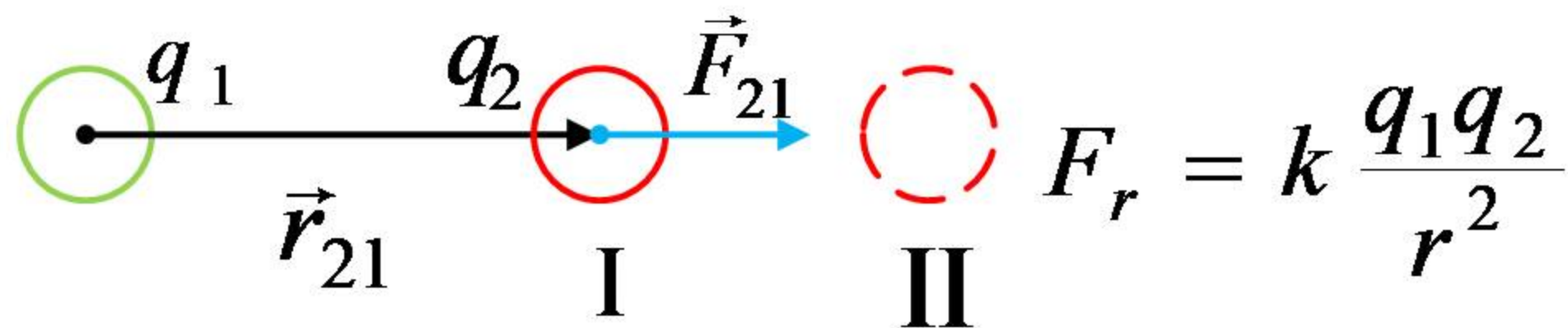
1) Указать значение потенциала в каждой точке

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) = -grad \varphi$$

2) Указать значение напряжённости в каждой точке

$$\varphi = -\int E_r dr$$

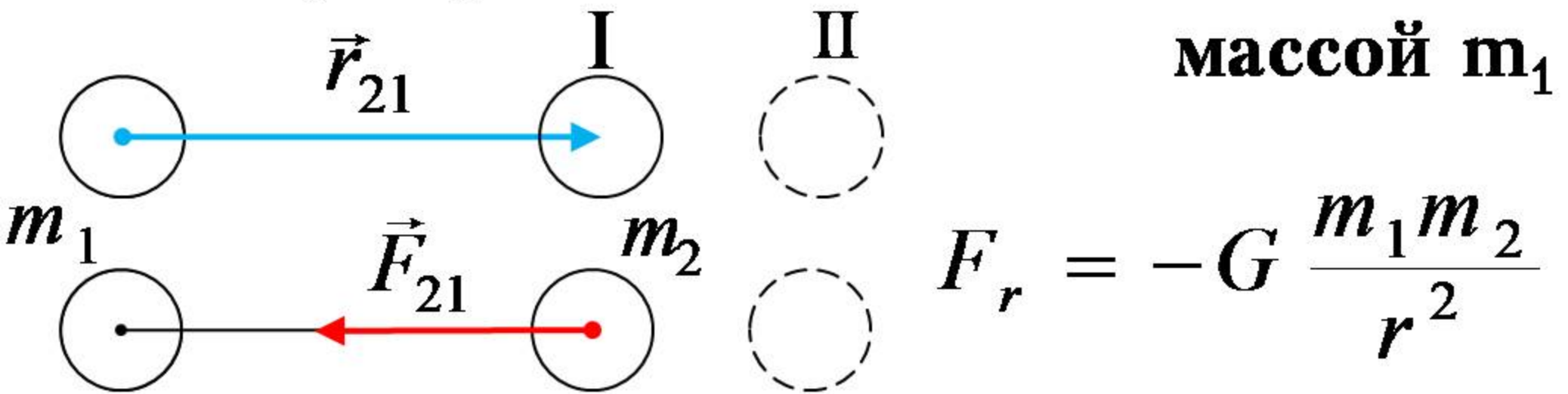
Потенциальная энергия заряда q_2 в электрическом поле заряда q_1



$$A = \int_{r_I}^{r_{II}} k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k \frac{q_1 q_2}{r_I} - k \frac{q_1 q_2}{r_{II}} = U_I - U_{II}$$

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r} + const \quad \varphi_1 = k \frac{q_1}{r} + const$$

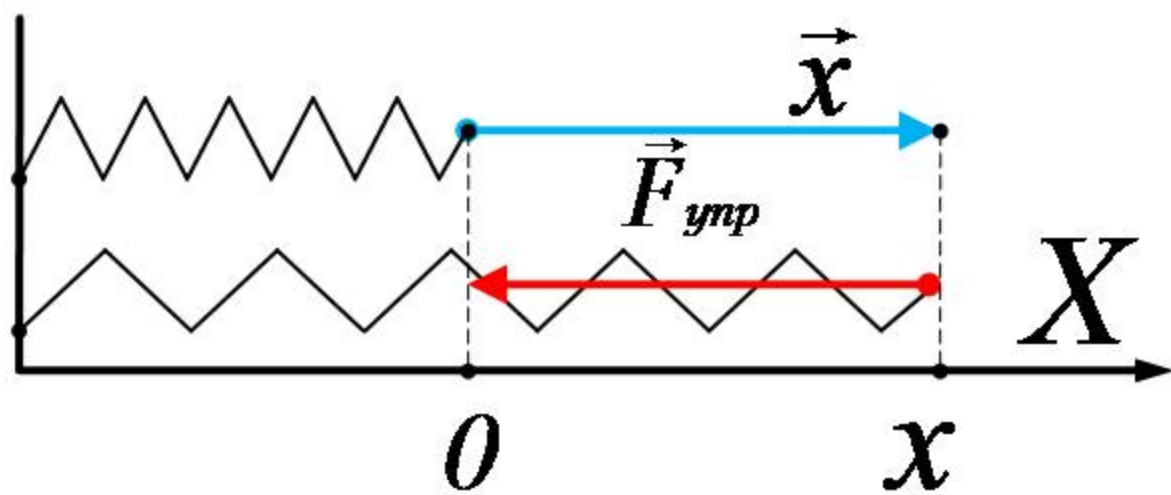
Потенциальная энергия частицы массой m_2 в гравитационном поле частицы массой m_1



$$A = - \int_{r_I}^{r_{II}} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G \frac{m_1 m_2}{r_I} - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r_{II}} \right) = U_I - U_{II}$$

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r} + const \quad \varphi_1 = -G \frac{m_1}{r} + const$$

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

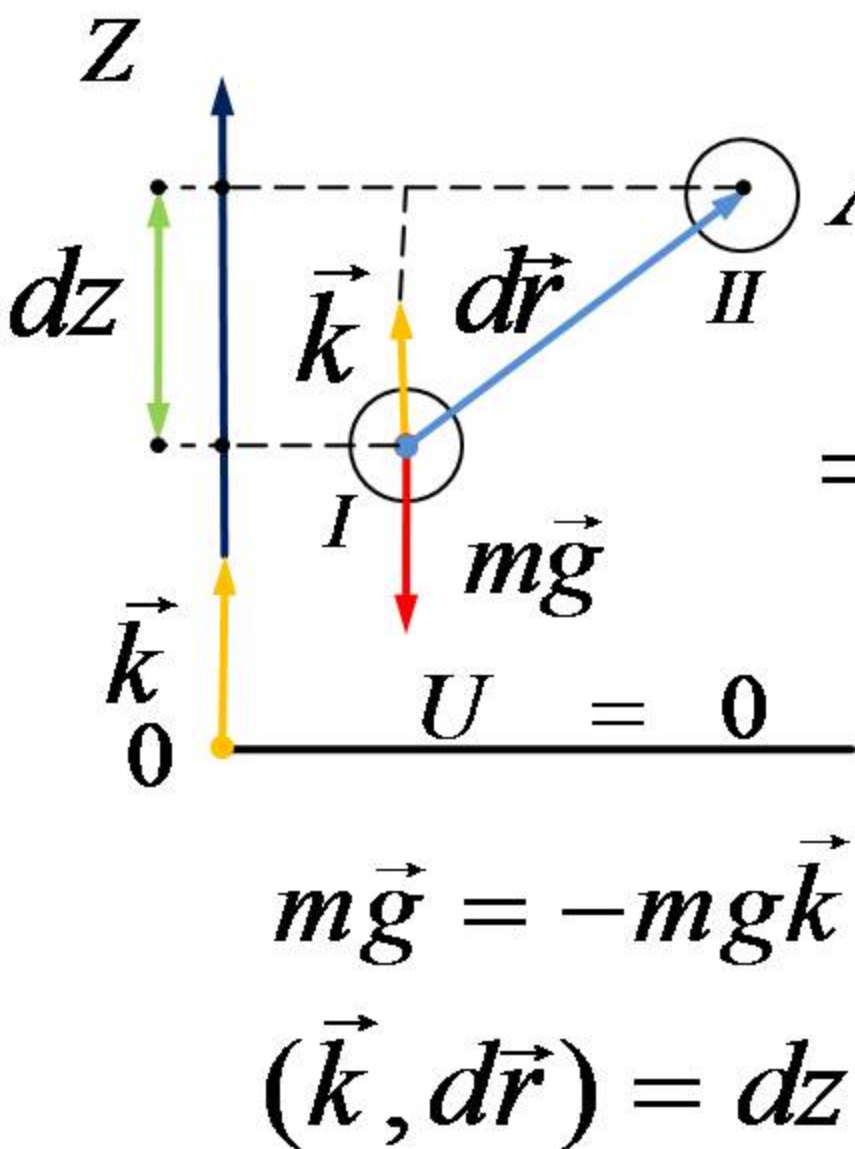


$$F_x = -kx$$

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = k \frac{x_1^2}{2} - k \frac{x_2^2}{2} = U_I - U_{II}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести



$$A = - \int_I^{II} mg\vec{k} d\vec{r} = - \int_{z_I}^{z_{II}} mg dz =$$

$$= mgz_I - mgz_{II} = U_I - U_{II}$$

$$U = mgz + const$$

$$\varphi = gz + const$$

Полная механическая энергия частицы в поле

Полной механической энергией частицы в поле называют сумму её кинетической и потенциальной энергии.

$$E_{\text{полн. мех.}} = E_K + U$$

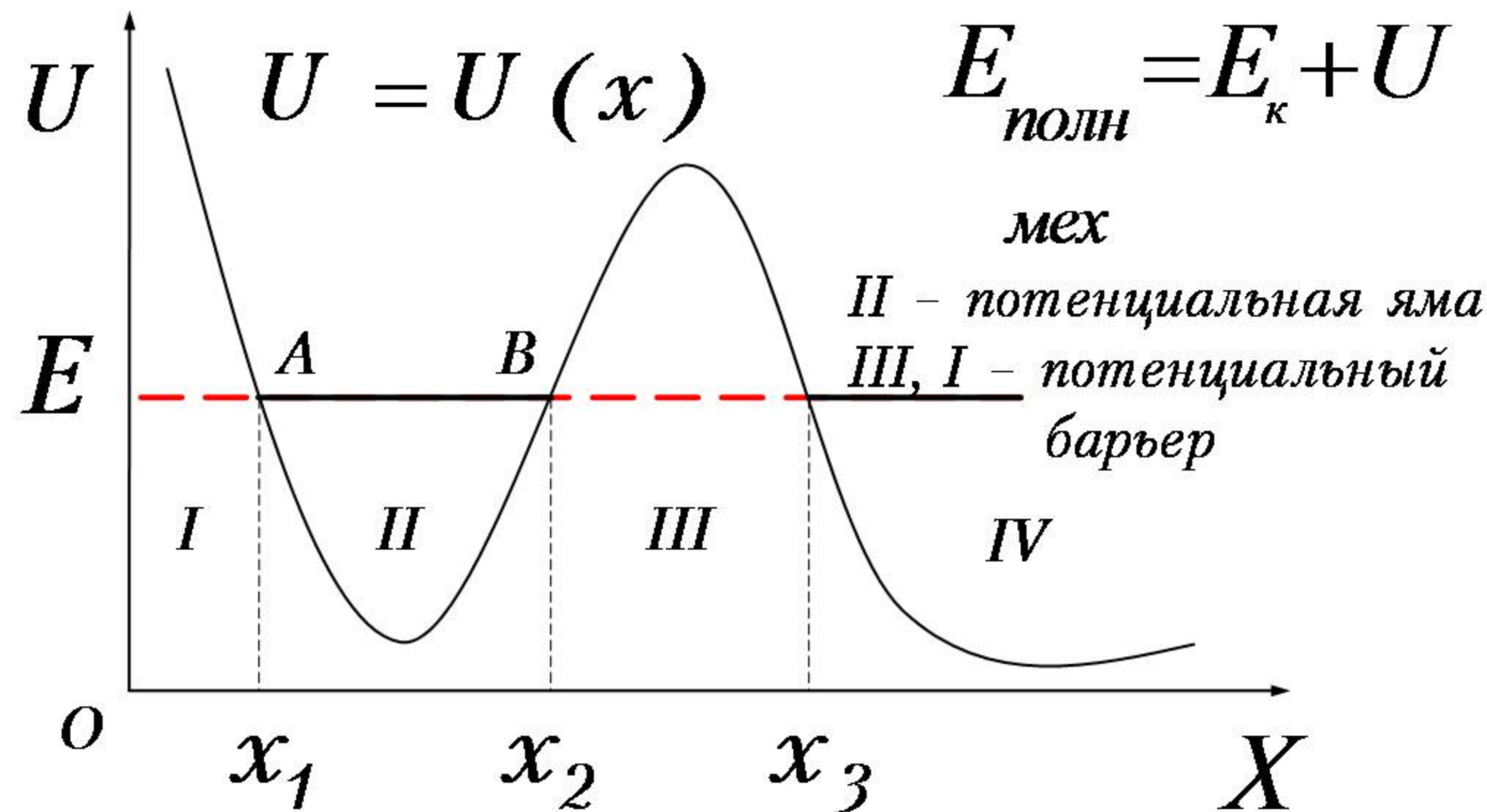
$$\Delta E_K = A_{\text{консервативных сил}} + A_{\text{сторонних сил}}$$

$$A_{\text{конс}} = -\Delta U$$

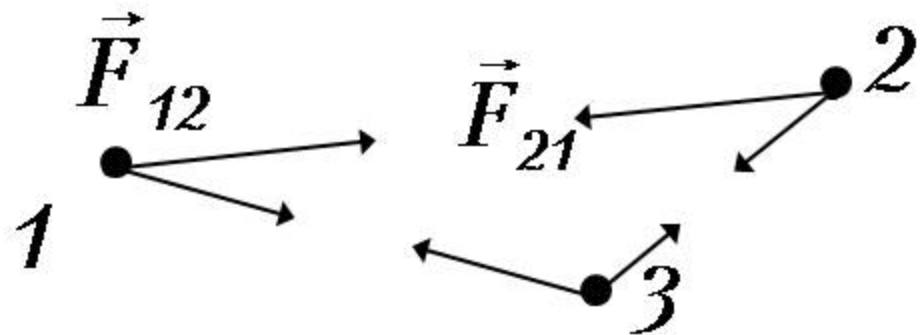
$$\Delta E_{\text{полн. мех.}} = \Delta(E_K + U) = A_{\text{сторонних сил}}$$

Приращение полной механической энергии частицы на некотором пути равно алгебраической сумме работ всех сторонних сил, действующих на частицу на этом пути.

Финитное и инфинитное движение частицы в потенциальном поле.



Собственная потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц



$$U_{\text{соб}} = \frac{1}{2} \sum_i U_i$$

$$U_{\text{соб}} = \frac{U_{12} + U_{21}}{2} + \frac{U_{13} + U_{31}}{2} + \frac{U_{23} + U_{32}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} [(U_{12} + U_{13}) + (U_{21} + U_{23}) + (U_{31} + U_{32})] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i U_i$$

Здесь U_i — потенциальная энергия взаимодействия i частицы со всеми остальными частицами системы

Собственная механическая энергия системы взаимодействующих частиц

$$E_{\text{собств}} = E_K + U_{\text{собств}}$$

Собственной механической энергией системы взаимодействующих частиц называют сумму её кинетической и собственной потенциальной энергии.

$$\Delta E_{\text{системы}} = A_{\text{внешних консервативных и неконсервативных сил}} + A_{\text{консервативных внутренних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$

$$A_{\text{консервативных внутренних сил}} = -\Delta U_{\text{соб.}}$$

$$\Delta(E_K + U_{\text{соб}}) = A_{\text{внешних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$

Закон сохранения собственной механической энергии:

Собственная механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой нет диссипативных сил, сохраняется в процессе движения.

пример

Если в замкнутой системе частиц действуют диссипативные силы:

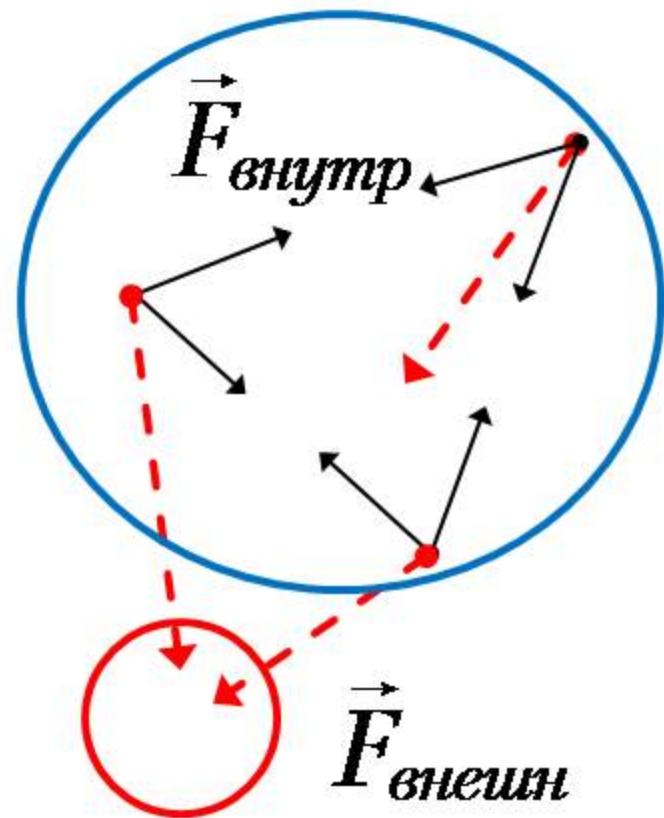
$$\Delta E_{\text{собств}} = A_{\text{диссипативных внутренних сил}} < \underline{0}$$

Часть собственной механической энергии переходит во внутреннюю.

Универсальный закон сохранения энергии
Энергия никогда не создаётся и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи.

Полная механическая энергия системы взаимодействующих частиц во внешнем поле консервативных сил

$$\Delta(E_{\text{соб}} + U_{\text{внешн}}) = A_{\text{сторонних внешних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$



Закон сохранения полной механической энергии системы, находящейся во внешнем поле консервативных сил: если на систему частиц не действуют внешние сторонние силы и нет внутренних диссипативных сил, то полная механическая энергия системы остаётся постоянной.

Теория соударений.

Ударом называется столкновение тел, при котором за весьма малый промежуток времени происходит значительное изменение скоростей тел.

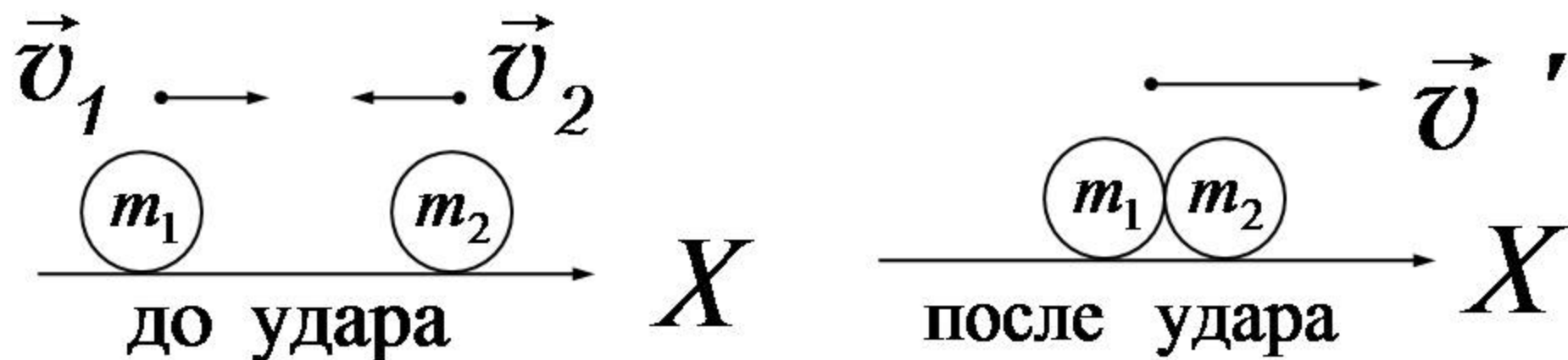
Линией удара называется общая нормаль, проведённая к поверхностям двух соприкасающихся тел в месте их соприкосновения при ударе.

Удар называется **центральный**, если в момент удара центры масс сталкивающихся тел находятся на линии удара.

Удар двух тел называется **абсолютно упругим**, если при этом ударе полная механическая энергия системы не изменяется.

Удар двух тел называется **абсолютно неупругим**, если после удара оба тела движутся как одно целое.

Абсолютно неупругий удар



Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}'$$

Часть полной механической энергии системы переходит во внутреннюю:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} + Q$$

Скорость центра масс системы не изменяется:

$$\vec{v}'_c = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_c$$

В системе отсчёта, связанной с центром масс.

$$\vec{\tilde{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} \quad \vec{\tilde{v}}_2 = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

До удара $\vec{\tilde{p}}_1 = -\vec{\tilde{p}}_2$, после удара $\vec{\tilde{p}}' = 0$

Закон сохранения импульса: $\vec{\tilde{p}}_1 + \vec{\tilde{p}}_2 = 0$

Суммарная
кинетическая
энергия частиц
целиком
переходит во
внутреннюю:

$$\frac{m_1 m_2^2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2}{2(m_1 + m_2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2 = Q$$

Абсолютно упругий удар



Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (1)$$

Закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (2)$$

$$m_1 v_{1x} - m_1 v'_{1x} = m_2 v'_{2x} - m_2 v_{2x} \quad (3)$$

$$m_1 (v_{1x}^2 - v_{1x}'^2) = m_2 (v_{2x}'^2 - v_{2x}^2) \quad (4)$$

$$v_{1x} + v'_{1x} = v'_{2x} + v_{2x} \quad (5)$$

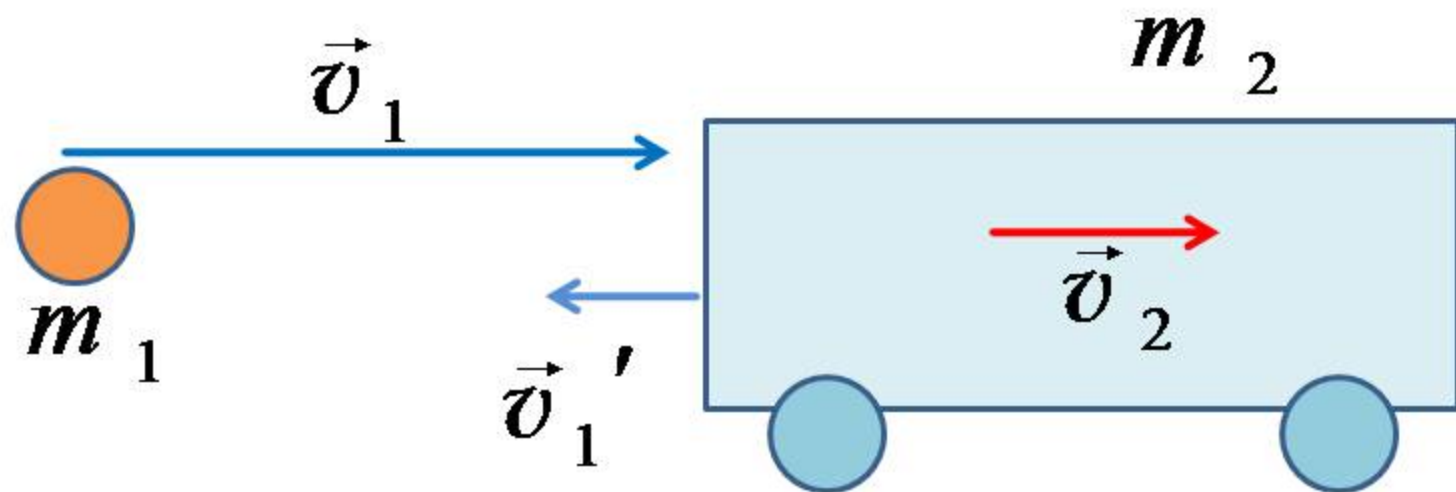
Из уравнений (3) и (5) определяем:

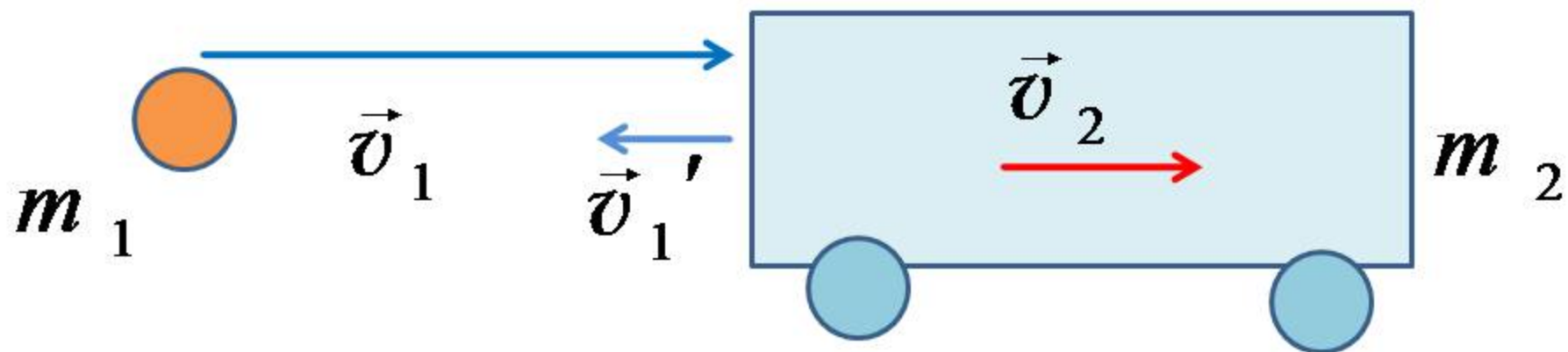
$$v'_{1x} = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

Пример. Мяч, летящий со скоростью $\vec{v}_1$ ударяется о вагон, движущийся в том же направлении со скоростью $\vec{v}_2$. Вычислите скорость мяча относительно земли после удара.

$$v_1 = 8 \text{ м / с}, v_2 = 3 \text{ м / с}.$$





$$v'_{1x} = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2} \approx$$

$$\approx 2v_{2x} - v_{1x} = -2u / c$$

$$v'_{1x} - v_{2x} = -(v_{1x} - v_{2x})$$

Скорость мяча относительно вагона до удара равна по модулю скорости мяча относительно вагона после удара