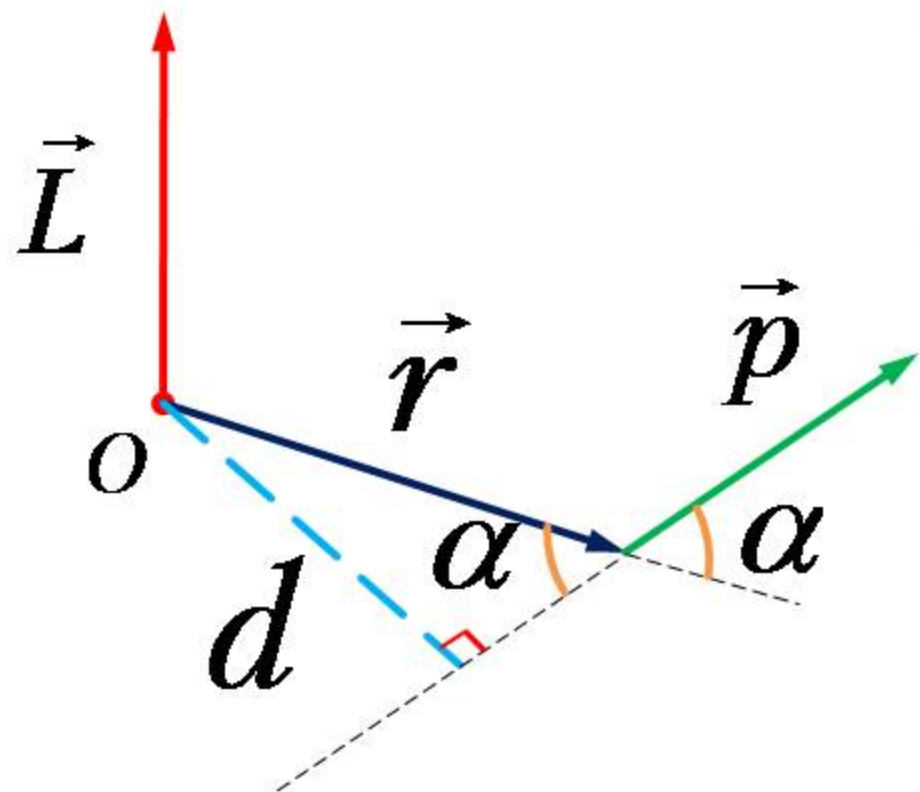


Лекции 6,7.

Динамика вращательного движения.

Момент импульса частицы относительно точки



$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

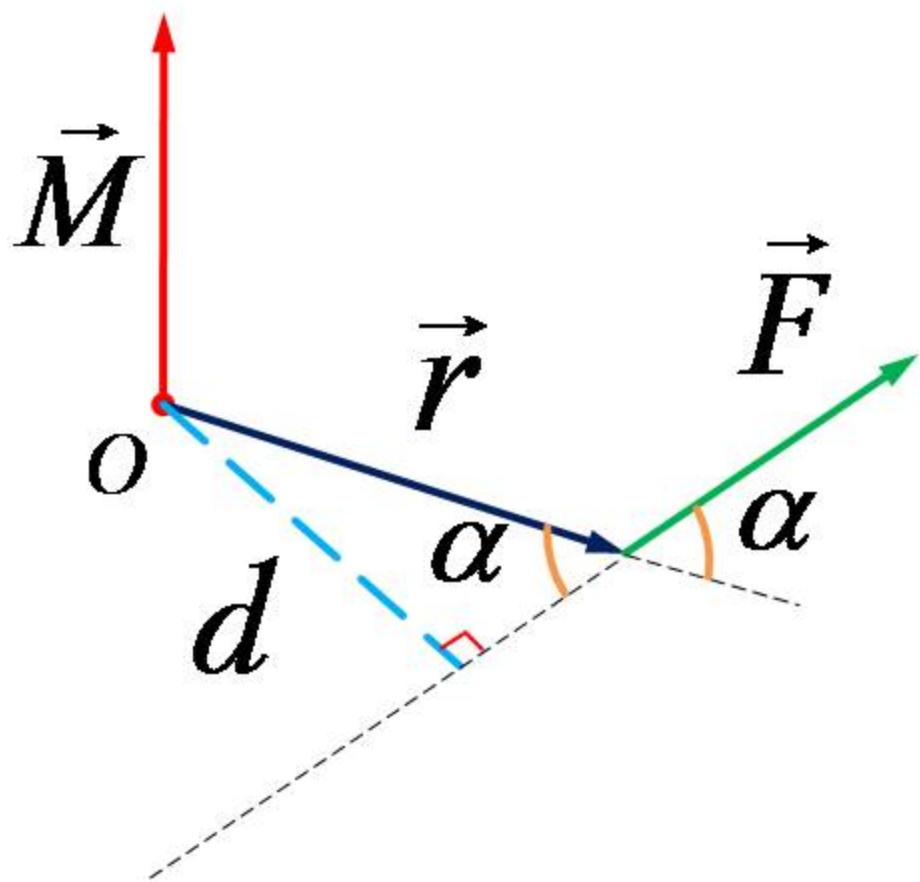
$$|\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin(\hat{\vec{r}}, \vec{p}) = \\ = p \cdot d$$

$$[L] = \frac{\kappa z \cdot \mathcal{M}^2}{c}$$

d – плечо импульса $\vec{p}$
относительно точки O .

Момент силы относительно точки

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$



$$|\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) = F \cdot d$$

d – плечо силы $\vec{F}$
относительно точки
 O .

$$[M] = H \cdot \mathcal{M}$$

Уравнение моментов

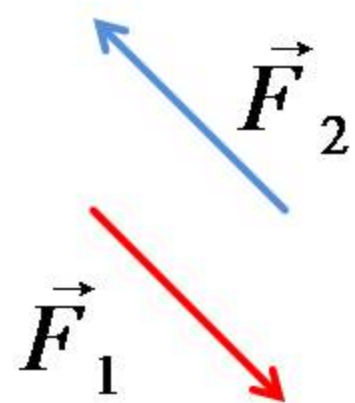
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] =$$
$$= \underbrace{\left[\vec{v}, \vec{p} \right]}_{0, \text{ т.к. } \vec{v} \uparrow \uparrow \vec{p}} + \left[\vec{r}, \vec{F} \right]$$

0, т.к. $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{p}$

Закон динамики вращения
частицы вокруг точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Пара сил



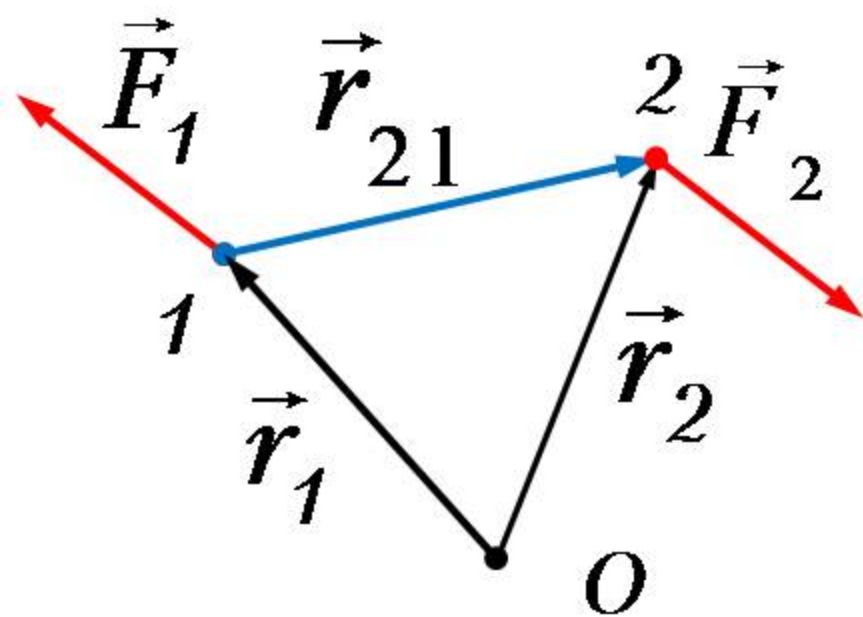
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Две параллельные силы, равные по модулю и противоположные по направлению, образуют **пару сил**.

Это вспомогательное определение, поэтому встречаются разночтения- в учебнике Савельева И.В. силы, образующие пару, не должны быть направлены вдоль одной прямой.

Момент пары сил

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

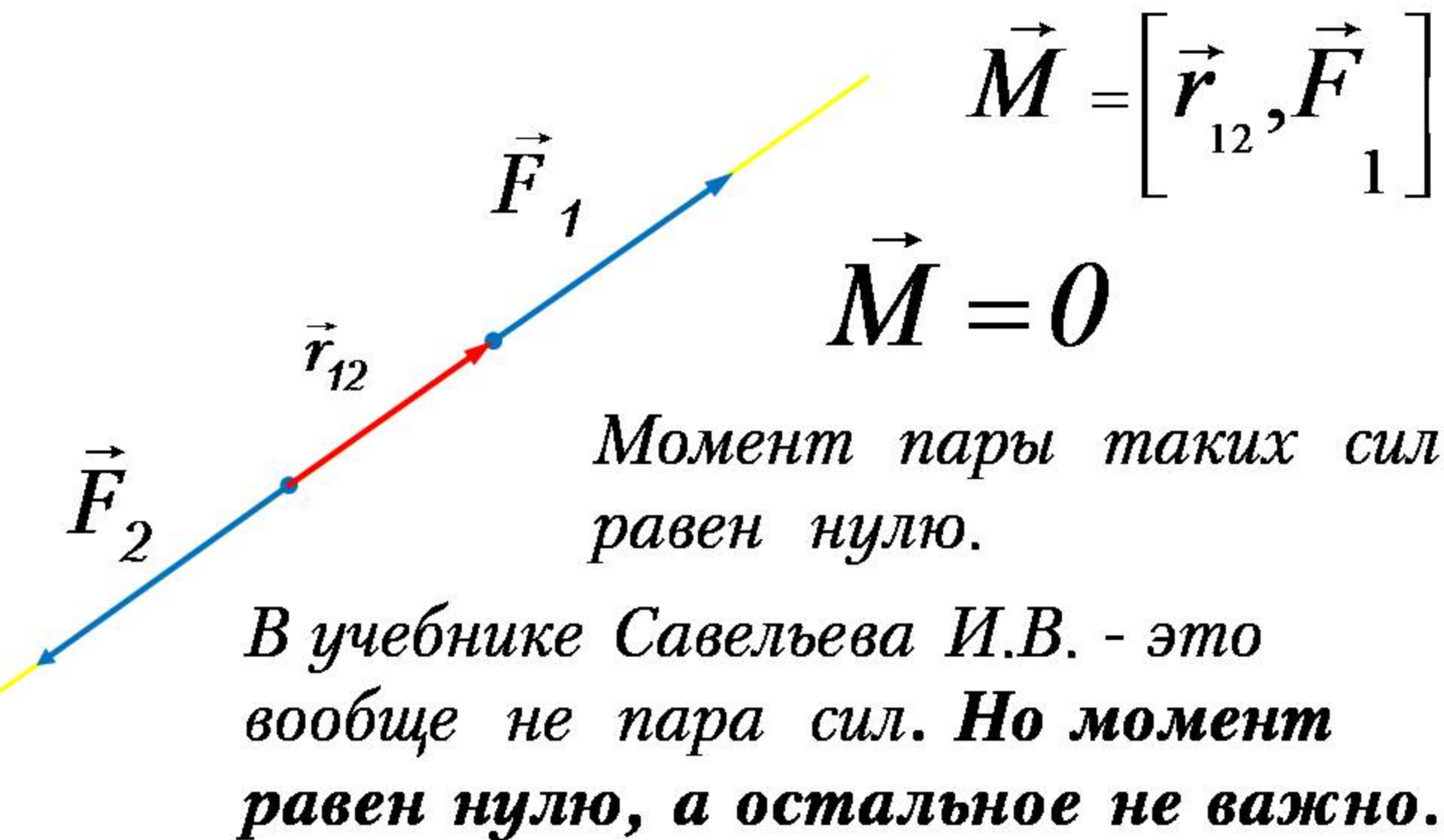


$$\begin{aligned}\vec{M} &= [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = \\ &= [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_1] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \vec{F}_2] = \\ &= [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1] = [\vec{r}_{21}, \vec{F}_2]\end{aligned}$$

1) Момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой.

2) Величина момента пары сил не зависит от положения точки начала отсчёта O .

Если силы направлены вдоль одной прямой



Вращение системы материальных точек вокруг точки. Уравнение моментов.

$$\vec{L}_{\text{системы}} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \underbrace{\vec{M}_{\text{внутренних сил}}}_{} + \sum_i \vec{M}_{\text{внешних сил}} = \sum_i \vec{M}_{\text{внешних сил}}$$

По 3 закону Ньютона

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

Внутренние силы направлены вдоль одной
прямой. Их $\vec{M}_{\Sigma} = 0$

Вращение твёрдого тела вокруг точки.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

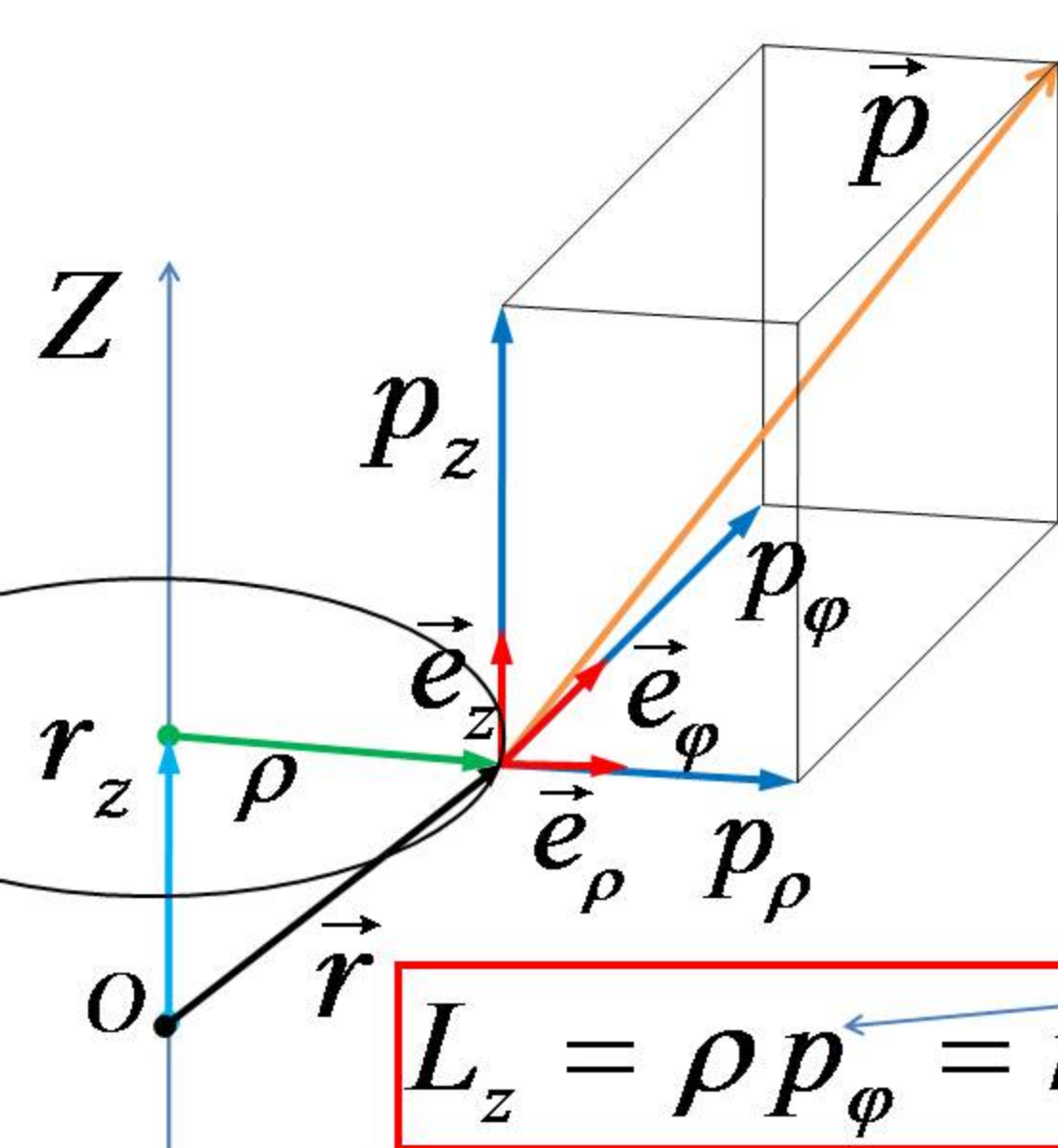
Закон динамики вращательного движения.

$$\frac{d \vec{L}}{d t} = \sum_i \vec{M}_{\text{внешних сил}}$$

Момент импульса частицы относительно оси.

Момент импульса частицы относительно оси равен проекции момента импульса частицы относительно любой из точек оси на эту ось.

Момент импульса частицы относительно оси



$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + r_z \vec{e}_z$$

$$\vec{p} = p_\rho \vec{e}_\rho + p_\phi \vec{e}_\phi + p_z \vec{e}_z$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & r_z \\ p_\rho & p_\phi & p_z \end{vmatrix}$$

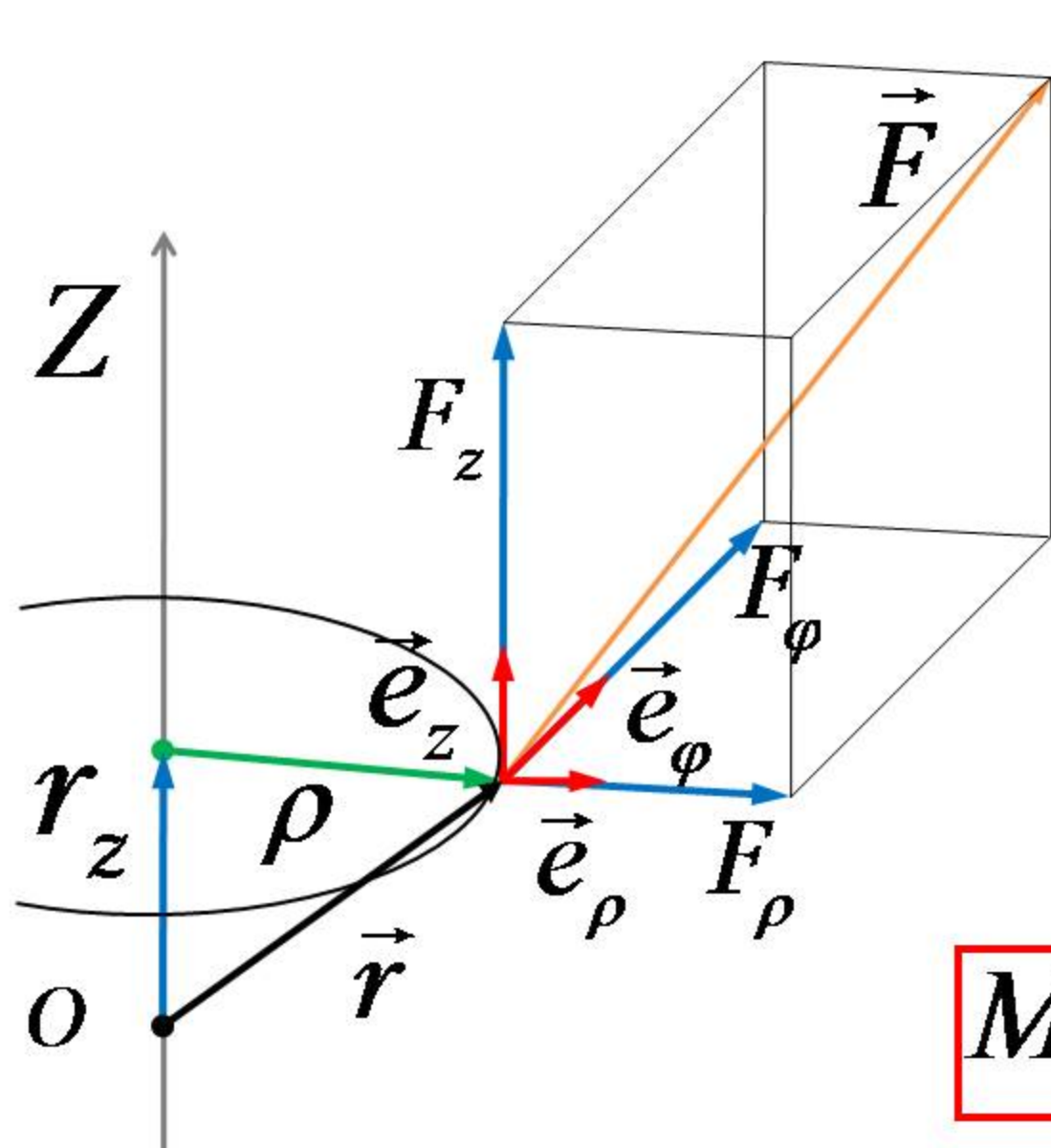
$$L_z = \rho p_\phi = m \rho^2 \omega_z$$

$$v_\phi = \rho \omega_z$$

Момент силы, действующий на частицу, относительно оси.

*Момент силы относительно оси равен
проекции момента силы относительно
любой из точек оси на эту ось.*

Момент силы, действующий на частицу, относительно оси.



$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + r_z \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\phi \vec{e}_\phi + F_z \vec{e}_z$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & r_z \\ F_\rho & F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_z = \rho F_\phi$$

При вращении материальной точки
вокруг неподвижной оси

$$L_z = \underline{\rho p_\varphi} = \underline{m \rho^2 \omega_z} \quad M_z = \rho F_\varphi$$

2 Закон Ньютона

$$\frac{\underline{d L_z}}{\underline{d t}} = \rho \frac{d p_\varphi}{d t} = \rho F_\varphi = \underline{M_z}$$

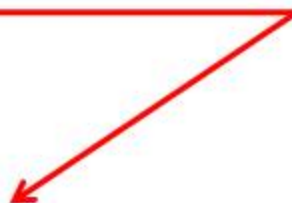
$$\begin{aligned} \frac{d L_z}{d t} &= \underline{m \rho^2 \frac{d \omega_z}{d t}} = \\ &= \underline{m \rho^2 \varepsilon_z} = \underline{M_z} \end{aligned}$$

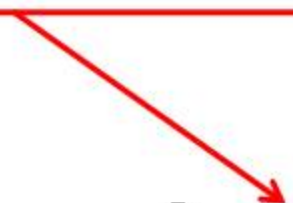
Основной
закон
динамики
вращательного
движения.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Полученные выше уравнения справедливы для каждой из точек твёрдого тела. Но необходимо помнить о том, что внутренние сил (силы взаимодействия частей тела) образуют пары. Моменты пар внутренних сил равны нулю. Момент импульса твёрдого тела может изменяться под действием только внешних сил.

Для каждой из точек твёрдого тела
закон динамики вращательного движения


$$\frac{d L_z}{d t} = M_z$$

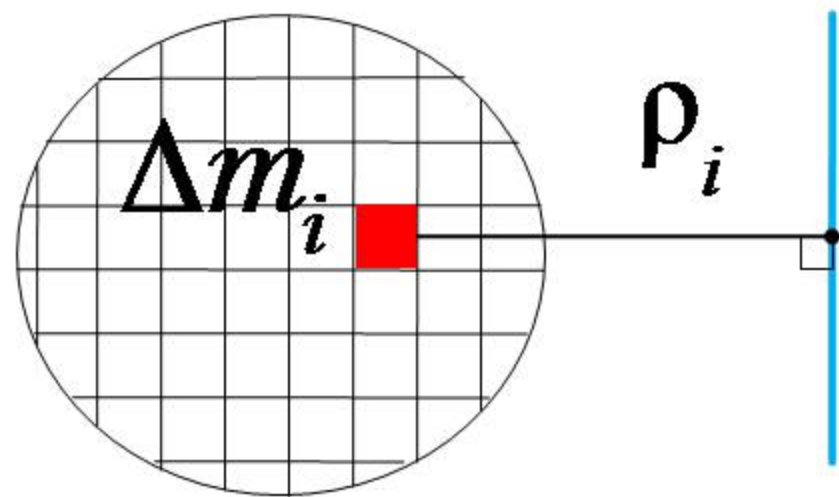

$$m \rho^2 \varepsilon_z = M_z$$

Для всех точек твёрдого тела значения ω_z и ε_z одинаковы.

Произведения $m \rho^2$ для всех точек различны.

Просуммируем эти значения для всех точек твёрдого тела (получим момент инерции), тогда можно будет записать закон динамики вращательного движения для всего твёрдого тела.

Момент инерции твёрдого тела



$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot \rho_i^2$$

$$I = \int_M \rho^2 \cdot dm$$

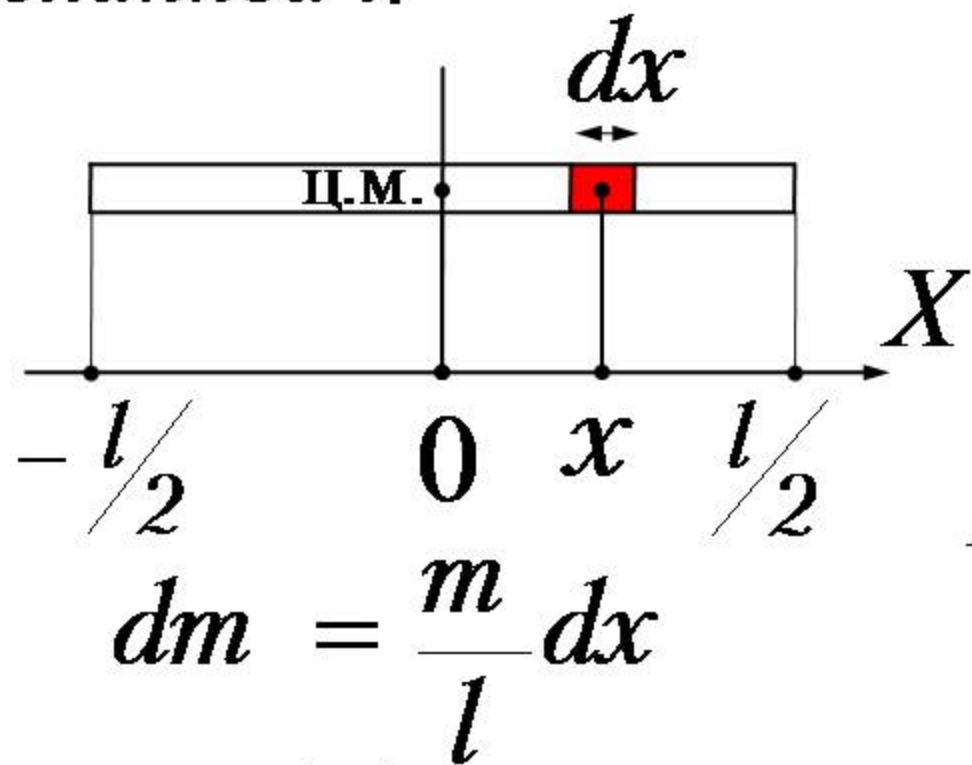
Момент инерции твёрдого тела равен сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояния до оси вращения.

$$I = \int_V \tilde{\rho}_{\text{плотн}} \rho^2 dV$$

I_0

*Центральный момент инерции-
момент инерции относительно
оси, проходящей через центр масс.*

Пример: Вычислим I_0 стержня массой m и длиной l .

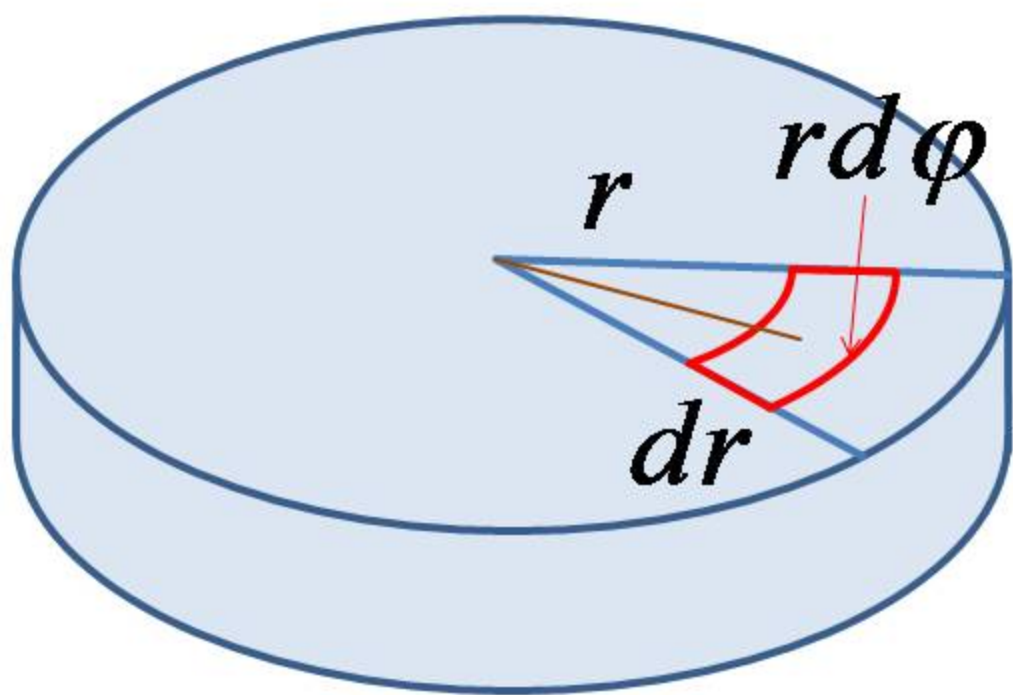


$$I = \int_M \rho^2 \cdot dm$$

$$I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx =$$

$$\frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m l^2}{12}$$

Пример: Вычислим I_0 диска массой m и радиусом R .

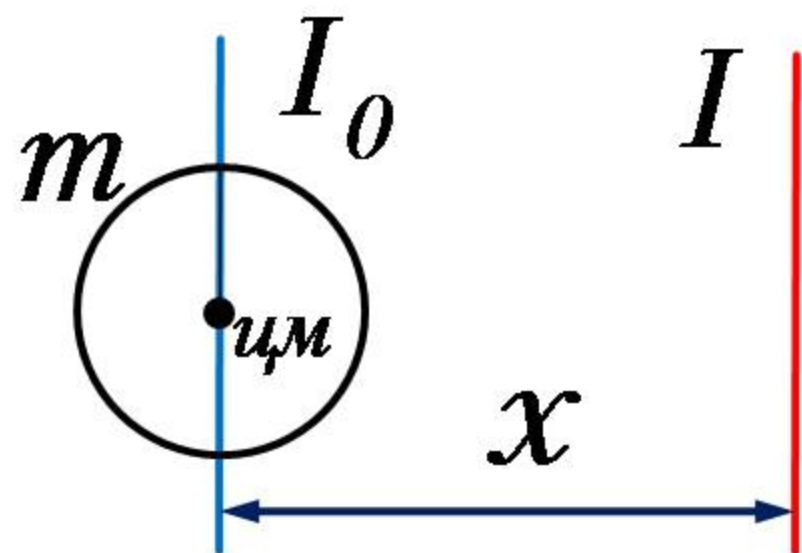


$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r d\varphi dr$$

$$I_0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{m}{\pi R^2} r^3 d\varphi dr$$

$$I_0 = \frac{2\pi m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{m R^2}{2}$$

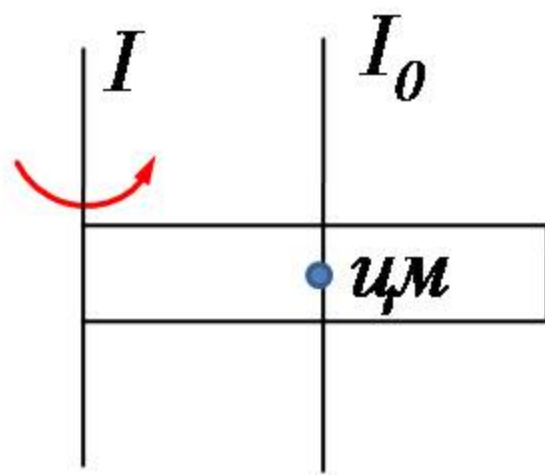
Теорема Штейнера



$$I = I_0 + mx^2$$

Момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме центрального момента инерции относительно параллельной оси и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пример: Вычислим I стержня массой m и длиной l при вращении его относительно оси, проходящей через его конец.



$$I = I_0 + mx^2$$

Центральный
момент
инерции

$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

$$I = I_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

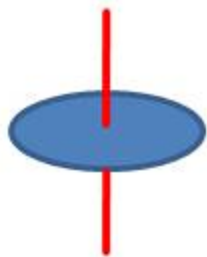
Центральные моменты инерции

Стержень массой m и длиной l



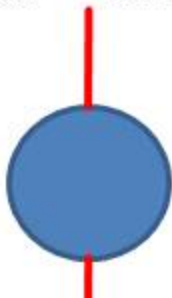
$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

Диск (цилиндр) массой m и радиусом R



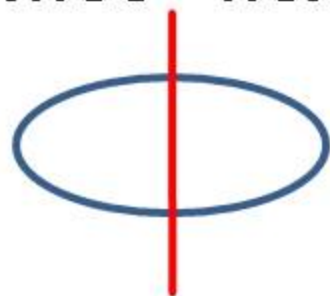
$$I_0 = \frac{mR^2}{2}$$

Шар массой m и радиусом R



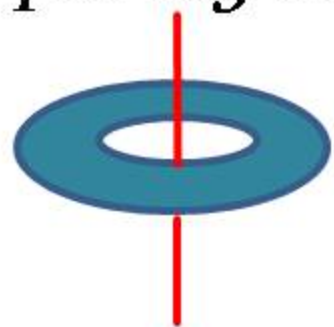
$$I_0 = \frac{2mR^2}{5}$$

Тонкое кольцо массой m и радиусом R



$$I_0 = mR^2$$

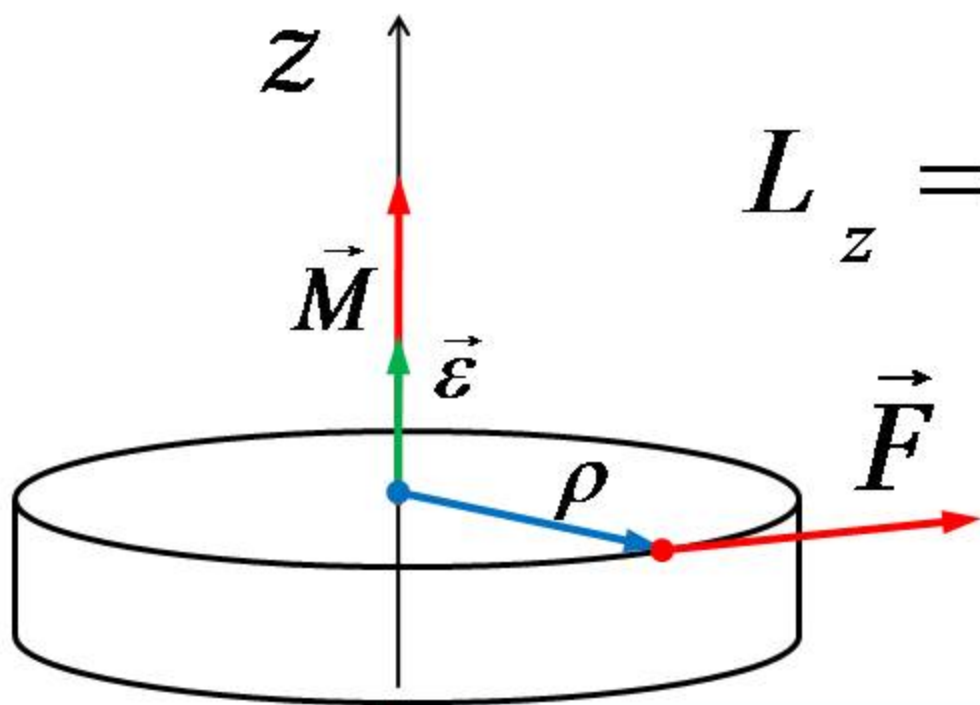
Широкое кольцо массой m с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 .



$$I_0 = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\varphi$$

$$I_0 = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

Закон динамики вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



$$L_z = \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right)}_{I - \text{момент инерции}} \cdot \omega_z$$

$$M_{z \text{ внешн}} = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

Закон динамики вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси связывает скалярные величины.

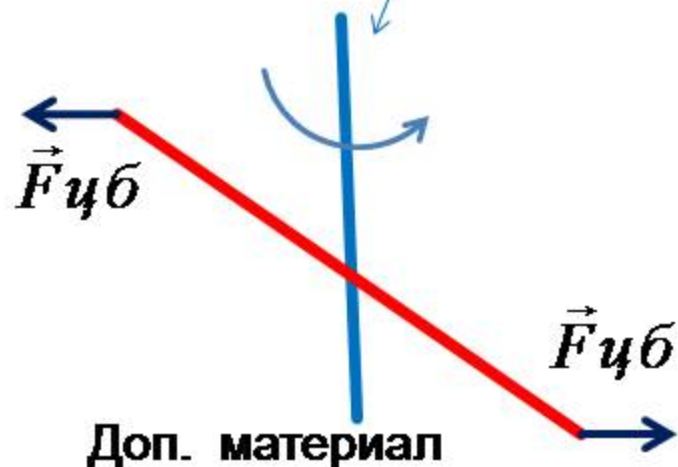
$$M_z^{\text{внешн}} = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

Однако, для каждого твёрдого тела есть особые оси (они называются главными) при вращении относительно которых тот закон можно записывать в векторном виде. (Просто L_z направлен вдоль оси вращения.)

Для любого твёрдого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, направление которых в пространстве остаётся неизменным без действия на них каких-либо внешних сил – главные оси. (Другие оси нужно удерживать) В простейших случаях это оси симметрии тела.

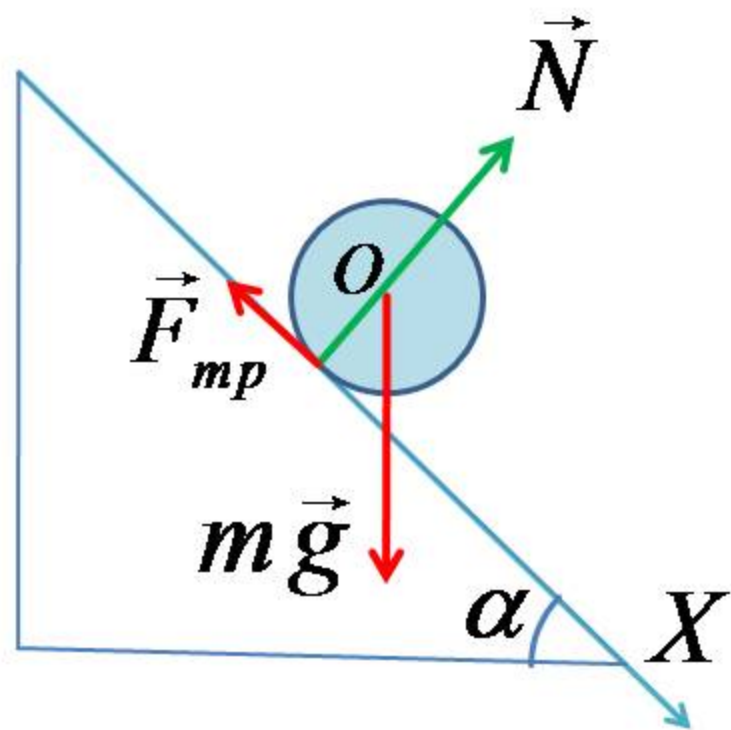
Для главных осей:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad \vec{M}_{\text{внешн}} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$



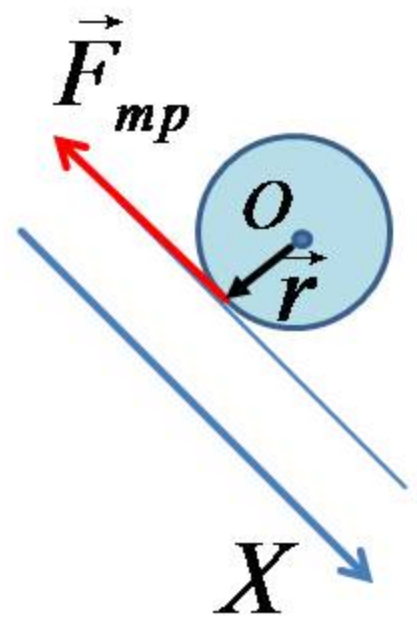
Вы будете решать самые простые задачи только про вращение твёрдых тел вокруг их главных осей, поэтому не удивляйтесь, если увидите в учебнике этот закон записанным в векторном виде.

Пример. Цилиндр массой m и радиусом R скатывается с горки, составляющей угол α с горизонтом. Вычислите ускорение цилиндра.



Будем рассматривать вращение вокруг оси, проходящей через центр масс O . Отличен от нуля только момент силы трения.

1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z , проходящую через O и направленную за плоскость рисунка.



$$I_0 \varepsilon = R F_{tr} \quad \frac{mR^2}{2} \varepsilon = R F_{tr} \quad (1)$$

2) Закон динамики поступательного движения центра масс. В проекции на ось X .

$$m a = m g \sin \alpha - F_{tr} \quad (2)$$

3) Связь линейного и углового ускорений.

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

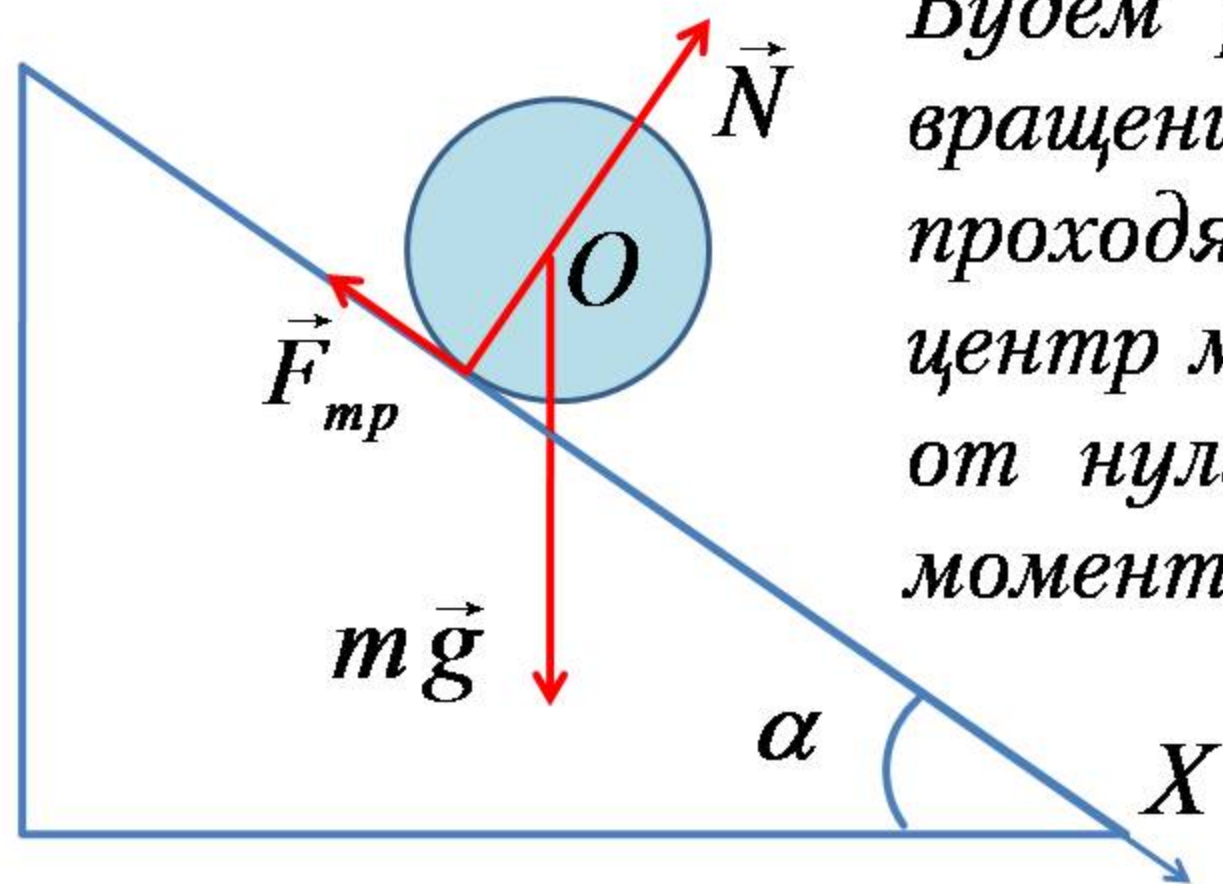
Из (1) и (3)

$$\frac{ma}{2} = F_{\text{тп}} \quad (4)$$

Из (2) и (4)

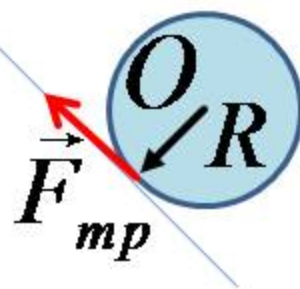
$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Пример: Цилиндр массой m и моментом инерции I_0 скатывается с горки длиной S , составляющей угол α с горизонтом. Вычислите время скатывания.



Будем рассматривать вращение вокруг оси, проходящей через центр масс O . Отличен от нуля только момент силы трения.

1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z , проходящую через точку O и направленную за плоскость рисунка.



$$I_0 \varepsilon = R F_{tr} \quad (1)$$

2) Закон динамики поступательного движения центра масс. В проекции на ось X .

$$m a = m g \sin \alpha - F_{tr} \quad (2)$$

3) Связь линейного и углового ускорений.

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

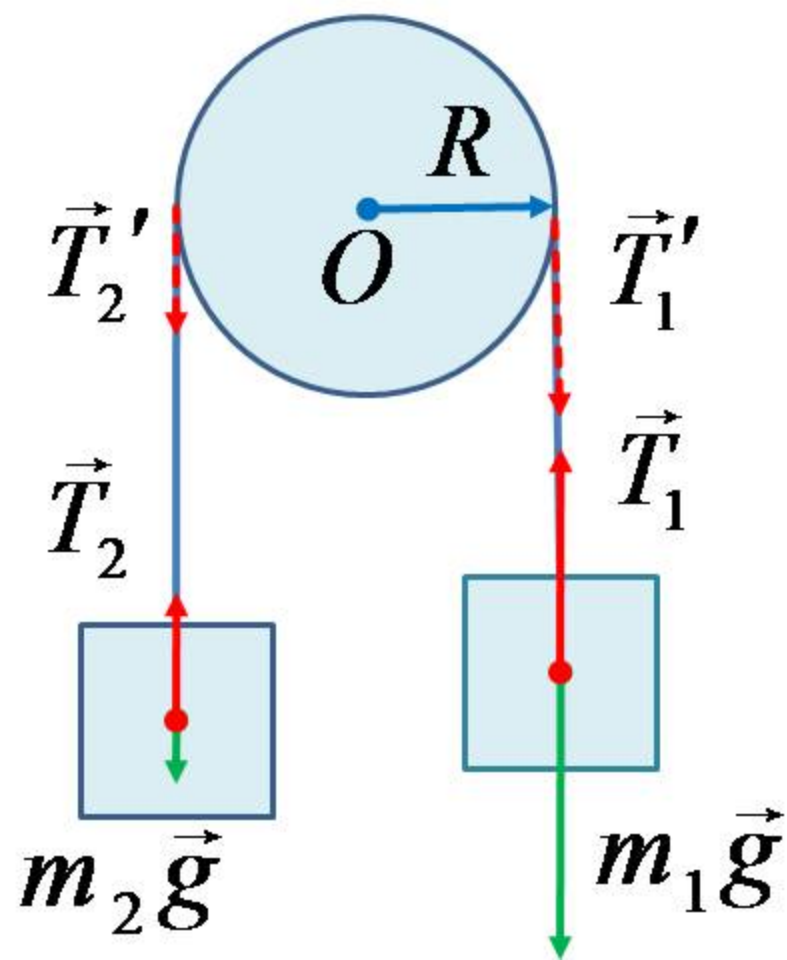
Из (1),(2) и (3)

$$a = \frac{m g \sin \alpha}{m + \frac{I_0}{R^2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$$

*Чем больше момент инерции цилиндра,
тем больше время скатывания.*

Пример. Грузы массами m_1 и m_2 связаны нитью, перекинутой через блок массой m и радиусом R . Вычислите ускорение грузов и силы натяжения нитей.



1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z , проходящую через точку O и направленную за плоскость рисунка. $I = \frac{mR^2}{2}$

$$(T_1' - T_2')R = I\varepsilon \quad (1)$$

2)Закон динамики поступательного движения грузов. В проекции на ось X .

$$m_1 a = m_1 g - T_1 \quad (2)$$

$$m_2 a = -m_2 g + T_2$$

3)Связь линейного и углового ускорений.

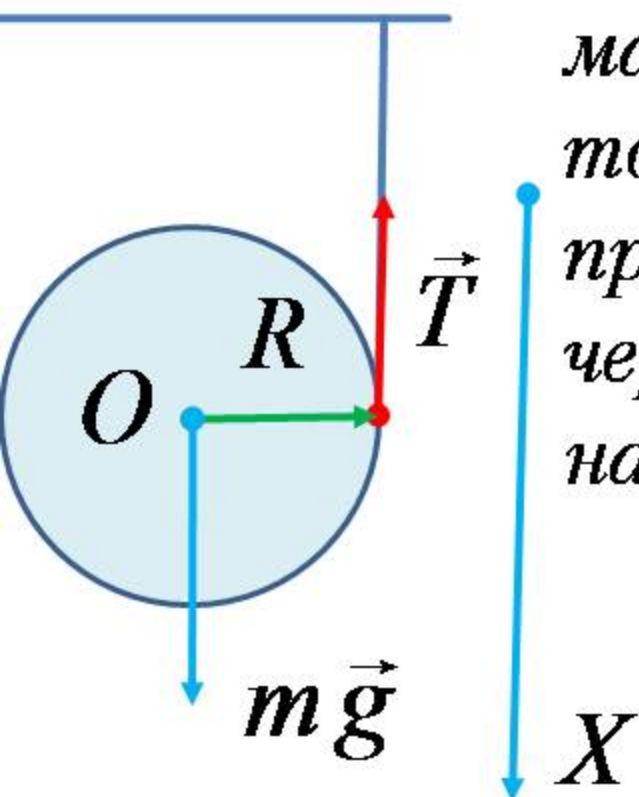
$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1),(2) и (3).

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{\left(\frac{m}{2} + m_1 + m_2\right)} \quad (4)$$

Из (2) и (4) определяем T_1 и T_2 .

Пример. На цилиндр, массой m и радиусом R намотана нить. Концы нити закреплён на потолке. Определите ускорение, с которым цилиндр будет опускаться.



1) Закон динамики вращательного движения. Относительно центра масс вращающий момент создаёт только сила натяжения нити T проекции на ось Z , проходящую через точку O и направленную к нам.

$$M = I\varepsilon \quad (1)$$

$$TR = \frac{mR^2}{2} \varepsilon \quad (1)$$

2) Закон динамики поступательного движения цилиндра. В проекции на ось X .

$$m a = m g - T \quad (2)$$

3) Связь линейного и углового ускорений.

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1) и (3).

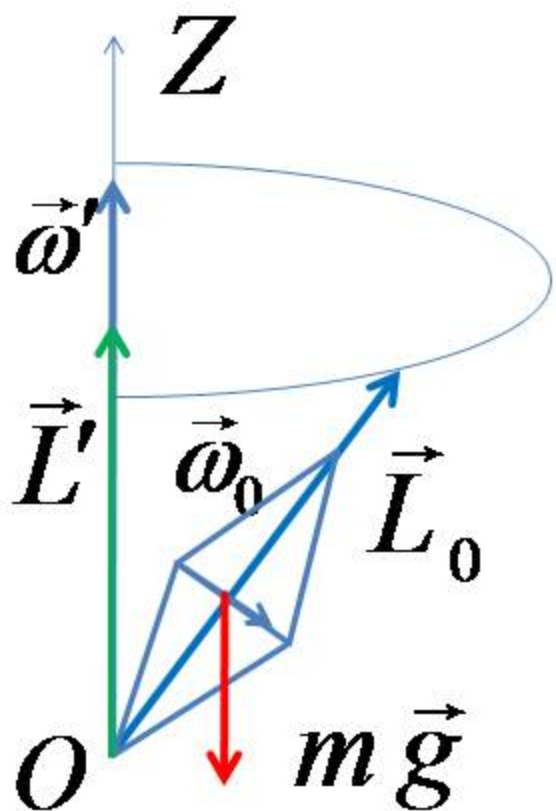
$$T = \frac{ma}{2} \quad (4)$$

Из (2) и (4).

$$a = \frac{2}{3}g$$

Теория гироскопа.

Гироскопом называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вокруг своей оси симметрии, называемой осью фигуры гироскопа. Обычно одна из точек оси фигуры закреплена. (Точка O)



$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}' \approx \vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}_0$$

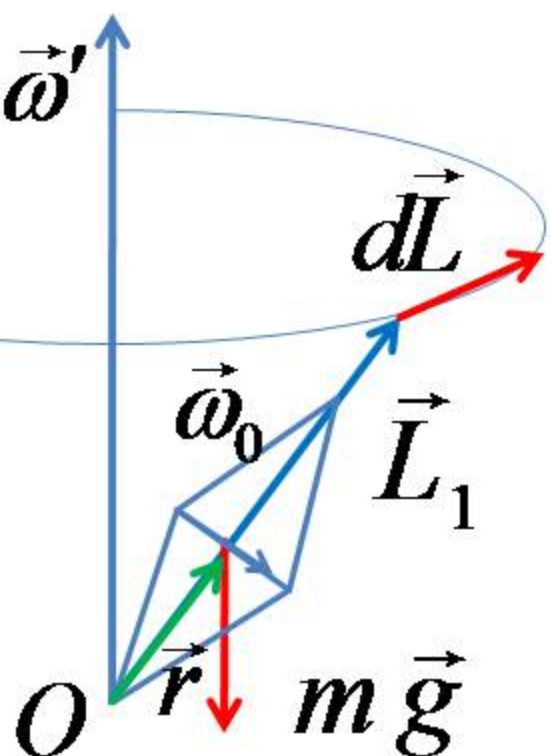
$\vec{L}_0$ - момент импульса вращения
вокруг оси симметрии

$\vec{L}'$ - момент импульса
вращения вокруг оси Z

Сила тяжести создаёт вращающий момент относительно точки O .

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

$$d\vec{L} \perp \vec{L}$$



Из-за этого ось гироскопа описывает конус - совершает прецессию.

Угловая скорость прецессии.

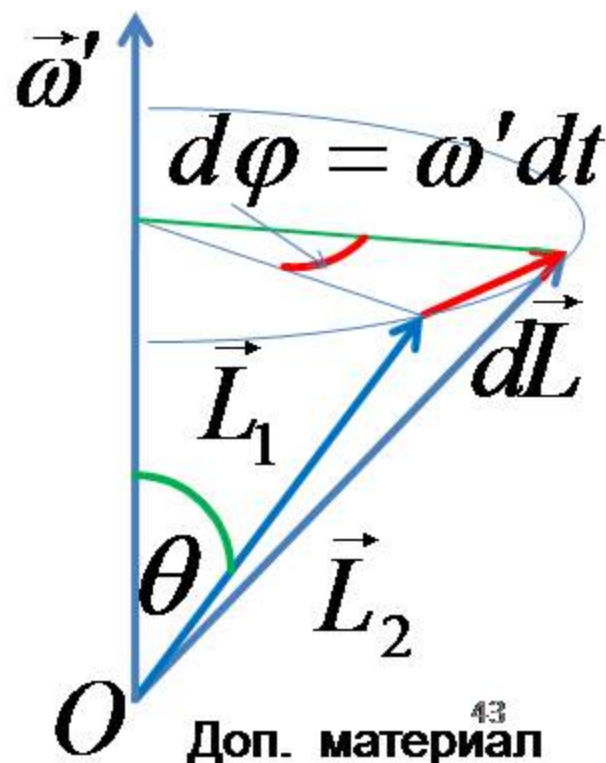
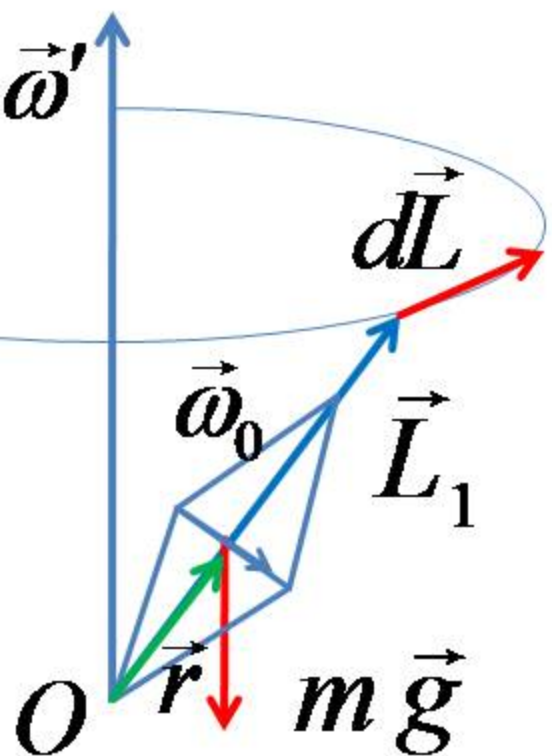
$$d\vec{L} = \vec{M} dt \quad (1)$$

$$dL = L \sin \theta \cdot \omega' dt \quad d\vec{L} = [\vec{\omega}', \vec{L}] dt \quad (2)$$

Из (1) и (2)

$$[\vec{\omega}', \vec{L}] = \vec{M}$$

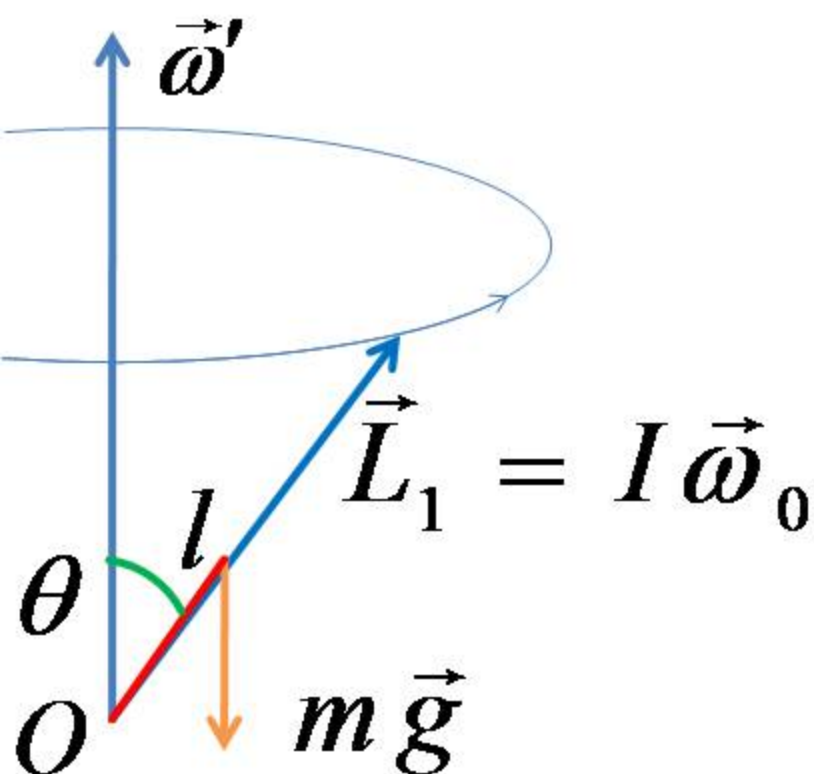
Момент силы
определяет
угловую скорость
прецессии.



$$[\vec{\omega}', \vec{L}] = \vec{M}$$

$$\omega' I \omega_0 \sin \theta = mgl \sin \theta$$

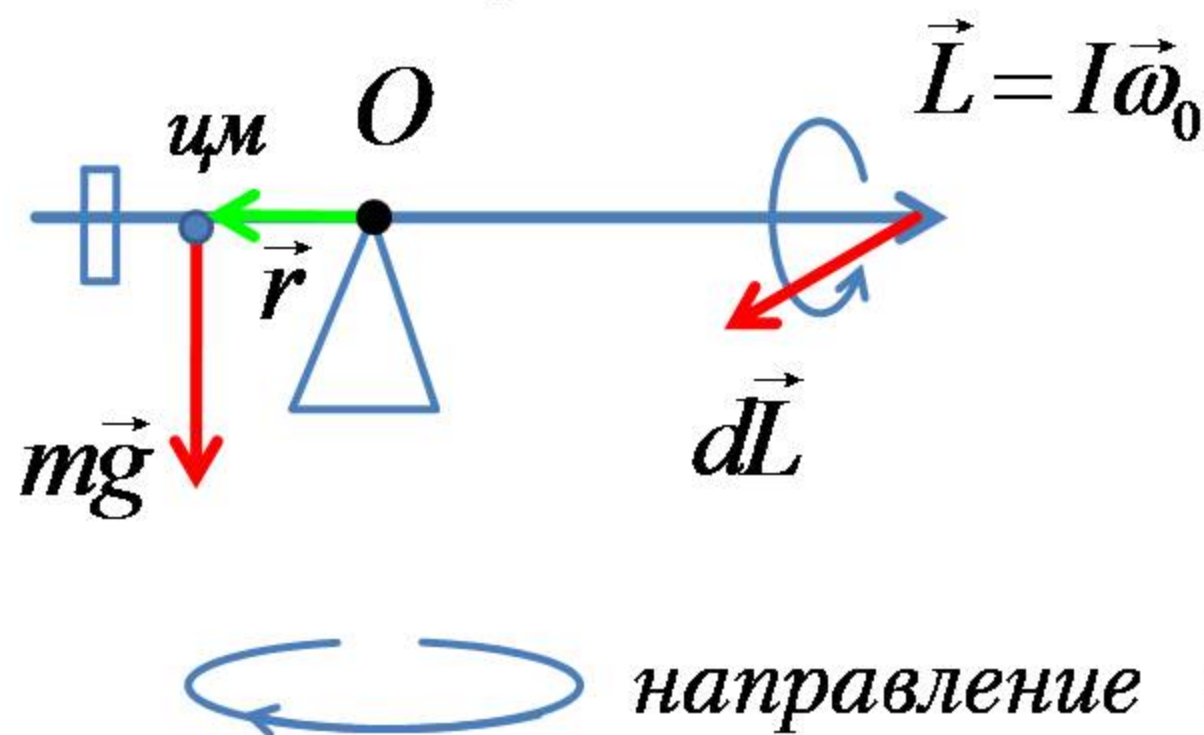
$$\omega' = \frac{mgl}{I \omega_0}$$



При уменьшении угловой скорости вращения волчка вокруг своей оси ω_0 угловая скорость прецессии ω' возрастает.

Гироскоп, у которого можно изменять положение центра масс.

Направление прецессии изменяется на противоположное при перемещении центра масс за точку O .



Закон сохранения момента импульса

1) *Классическая механика.*

*Запишем уравнение моментов
при вращении материальной
точки относительно точки*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = const$

При вращении материальной точки вокруг неподвижной оси

Закон динамики
вращательного
движения

$$\frac{d L_z}{d t} = M_z$$

Если $M_z = 0$, то $L_z = const$

$$m \rho^2 \omega_z = const$$

При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Закон динамики вращательного движения

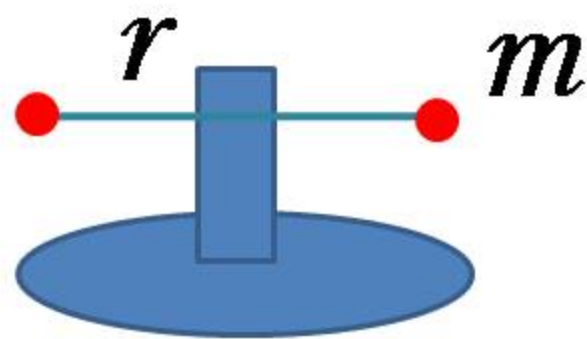
$$M_{z \text{ внешних сил}} = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

Если $M_{z \text{ внешних сил}} = 0$

$$L_z = I\omega_z = \text{const} \quad \varepsilon_z = 0$$

*2) Закон сохранения момента импульса -
фундаментальный закон природы*

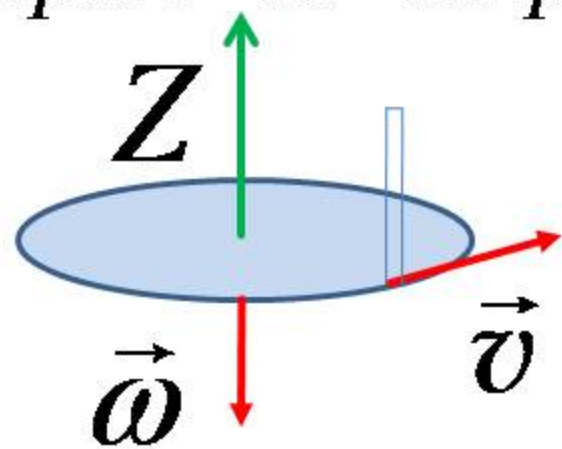
Пример. Человек стоит на скамейке Жуковского и держит в вытянутых руках на расстоянии r от оси вращения гири. Момент инерции человека и скамейки I , масса каждой гири равна m , угловая скорость вращения скамейки равна ω_0 . Какой будет угловая скорость вращения скамейки, если человек прижмёт гири к груди?



$$L_z = I_{\Sigma} \omega_z = \text{const}$$

$$(I + 2mr^2) \omega_0 = I \omega$$

Пример. Человек стоит на краю диска массой M и радиусом r . Момент инерции человека относительно оси диска равен I . С какой угловой скоростью ω будет вращаться диск, если человек пойдёт по его краю со скоростью v относительно диска.

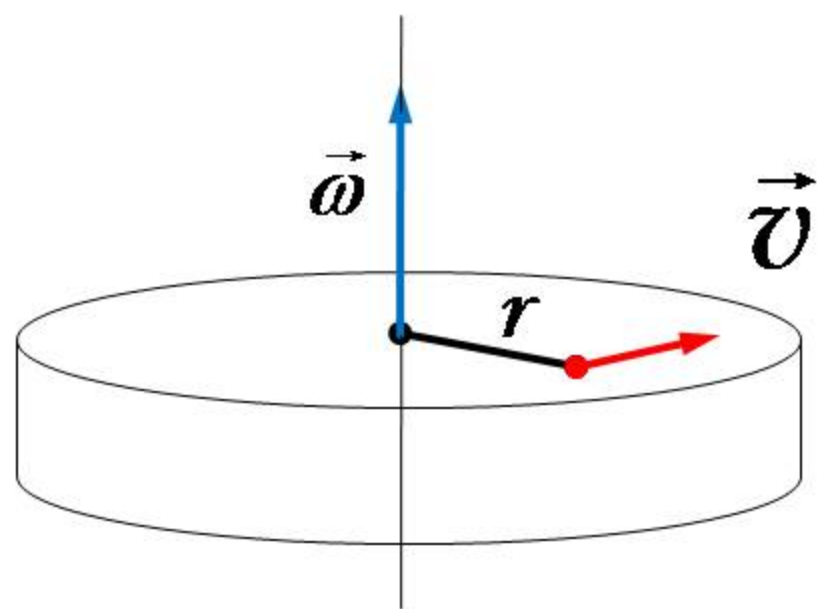


Закон сохранения момента импульса запишем в ис-земля.

$$0 = I \left(\frac{v}{r} - \omega \right) - \frac{Mr^2}{2} \omega$$

Угловая скорость человека относительно земли

Кинетическая энергия вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



*Угловая скорость
всех точек твёрдого
тела одинакова.*

$$v_i = \omega r_i$$

$$\underline{E_{\kappa}} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\sum_i (m_i r_i^2) \omega^2}{2} = \underline{\frac{I \omega^2}{2}}$$

Работа внешней силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

По теореме о кинетической энергии

$$\delta A = d \left(\frac{I \omega^2}{2} \right) = d \left(\frac{I \omega_z^2}{2} \right) = \omega_z \underbrace{I d \omega_z}_{M_z dt}$$

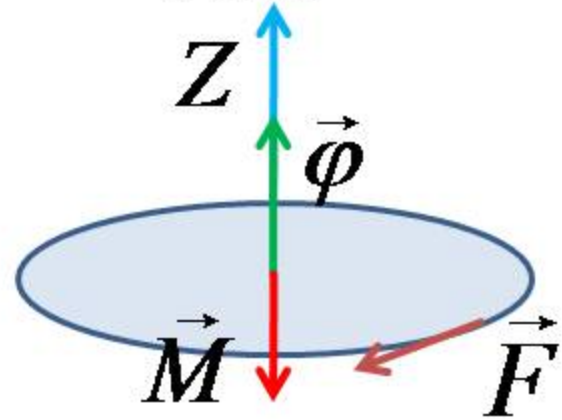
$$\underline{\delta A} = M_z \underbrace{\omega_z dt}_{d \varphi} = \underline{M_z d \varphi}$$

$$\underline{A} = \int_0^{\varphi \text{ конечн}} M_z d \varphi$$

Пример. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна E . Под действием постоянного тормозящего момента маховик останавливается, сделав n оборотов. Определить момент силы торможения.

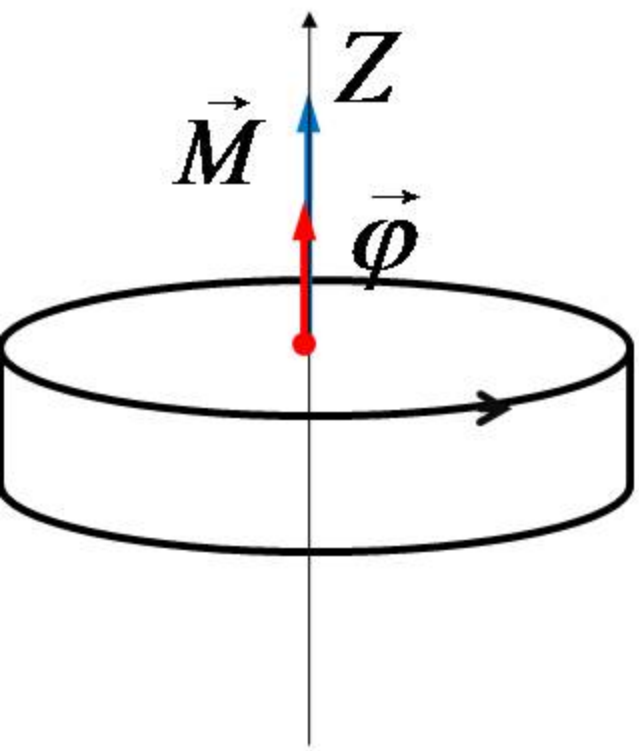
$$A = \int_0^{\varphi_{\text{конечн}}} M_z d\varphi$$

$$-E_{0\text{ кин}} = \Delta E_{\text{кин}} = A = M_z \varphi_{\text{конечн}} = -M \varphi_{\text{конечн}}$$



$$M = \frac{E_{0\text{ кин}}}{\varphi_{\text{конечн}}} = \frac{E_{0\text{ кин}}}{2\pi n}$$

Пример. Якорь мотора делает n оборотов в секунду. Определить вращающий момент, если мощность мотора равна N .



$$\partial A = M_z d\varphi$$

$$\underline{N} = \frac{\partial A}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = \underline{M_z \omega}$$

$$\omega = 2\pi n$$

$$M_z = \frac{N}{2\pi n}$$

Пример. Человек стоит на краю неподвижной карусели радиусом r и ловит мяч, летящий по касательной к карусели со скоростью v . Момент инерции человека $I_{\text{ч}}$, момент инерции карусели $I_{\text{к}}$. С какой угловой скоростью начнёт вращаться карусель? Как уменьшится кинетическая энергия карусели?

$$m v r = (m r^2 + I_{\text{к}} + I_{\text{ч}}) \omega$$

$$E_{\text{к}_1} - E_{\text{к}_2} = \frac{m v^2}{2} - \frac{(m r^2 + I_{\text{к}} + I_{\text{ч}}) \omega^2}{2} > 0$$

Кинетическая энергия при плоском движении твёрдого тела.

$$E_{\kappa} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_o \omega^2}{2}$$

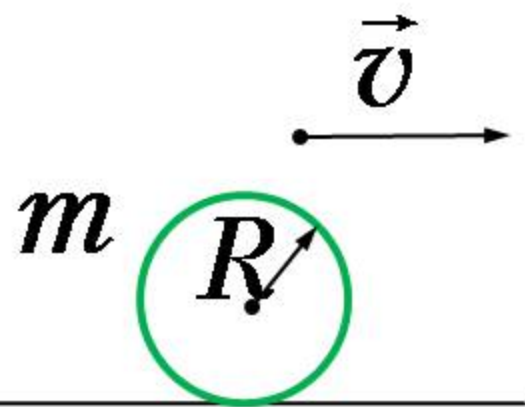
v_c - скорость движения центра масс

ω - угловая скорость вращения твёрдого тела, вокруг оси, проходящей через центр масс.

I_o - центральный момент инерции твёрдого тела

Пример: Однородный шар массой m и радиусом R катится со скоростью v . Вычислите его кинетическую энергию.

$$E_{\kappa} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5} m R^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10} mv^2$$



I_0

Задание. Вычислите центральный момент инерции шара