

Механика

Лекция 1. Кинематика поступательного движения.

Механика – наука о движении и равновесии тел.

Материальной точкой называется тело, размеры и форма которого в условиях данной задачи несущественны.

Абсолютно твердое тело – система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

Механическое движение – изменение положения тела в пространстве с течением времени.

Виды механического движения:

1. Поступательное
2. Вращение вокруг неподвижной оси
3. Вращение вокруг неподвижной точки
4. Плоское движение
5. Свободное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, все время остается параллельной своему начальному положению.

Плоским называется такое движение твердого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной (в данной системе отсчета) плоскости.

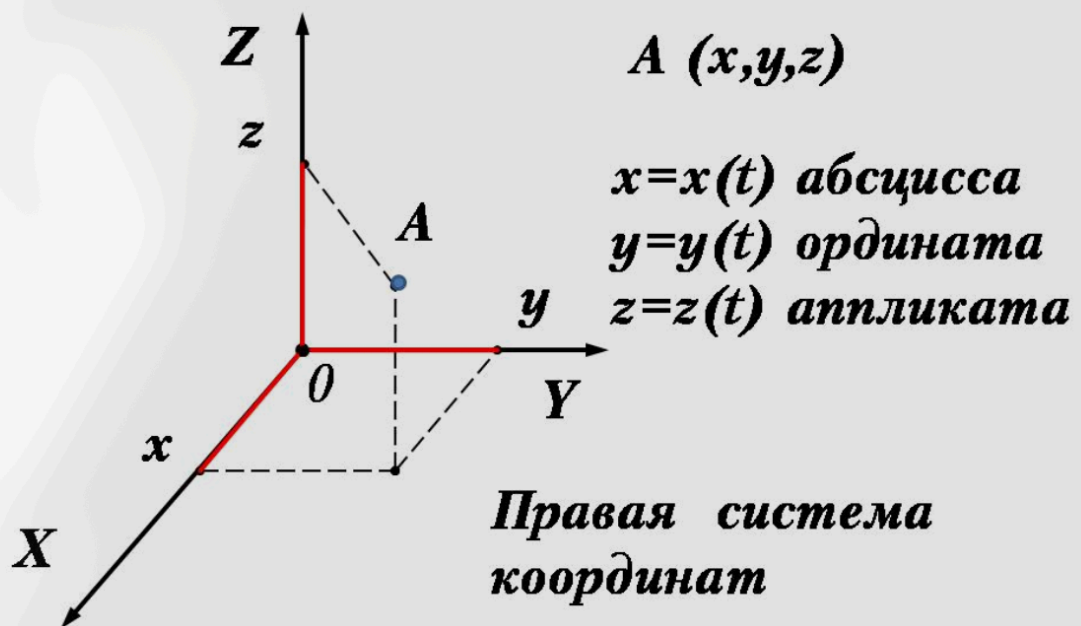
Описание механического движения.

Тело отсчета – тело, относительно которого задается положение данного тела или данной точки.

Система отсчета – совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат, и синхронизованных между собой часов.

Международный стандарт ISO 31-11 предполагает использование следующих систем координат:

Декартова (прямоугольная) система координат.



Цилиндрическая система координат.



$\rho \geq 0$ - расстояние от начала координат до A'

$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ - угол между осью OX и отрезком OA'

z - аппликата точки A

Цилиндрическая система координат удобна при анализе поверхностей, симметричных относительно какой-либо оси, если взять ось OZ в качестве оси симметрии. Бесконечный цилиндр в декартовых координатах имеет уравнение $x^2 + y^2 = r^2$,

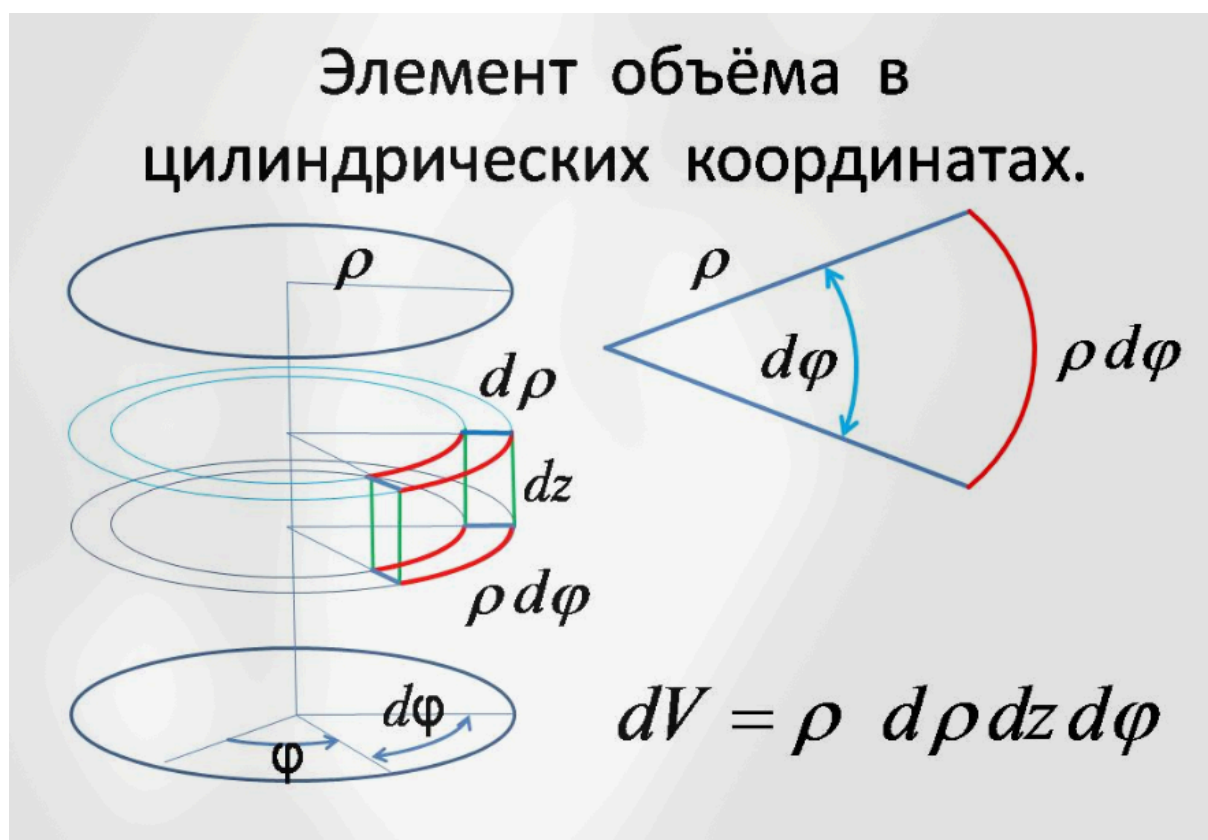
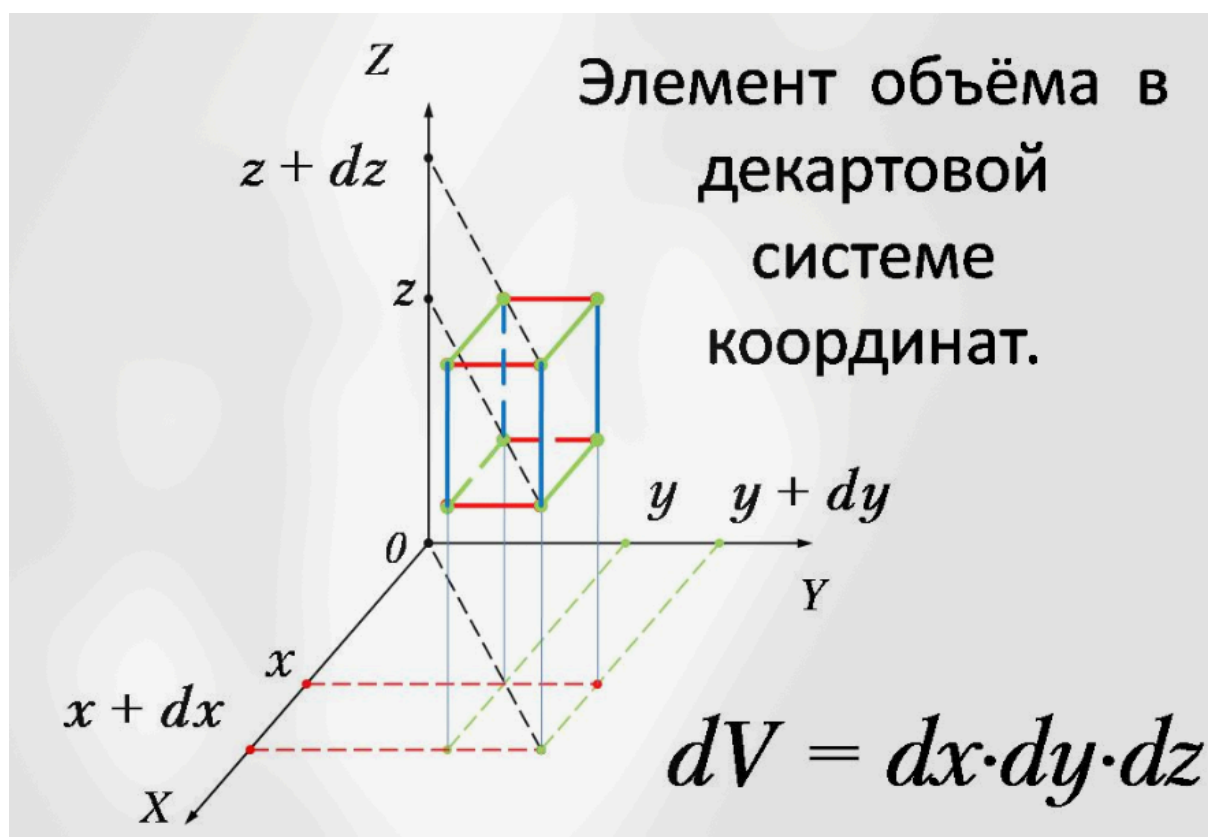
А в цилиндрических – простое: $\rho = r$



$r \geq 0$ – расстояние от начала координат до заданной точки A .

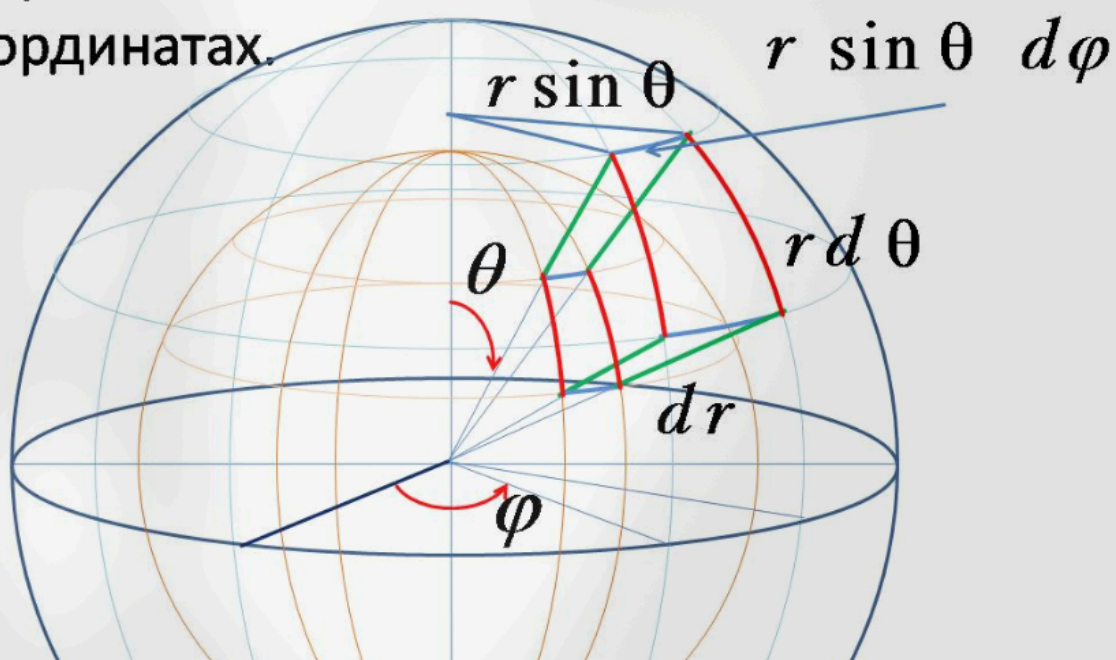
θ – угол между осью OZ и отрезком, соединяющим начало координат и точку A .

$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ – угол между осью OX и проекцией на плоскость XOY отрезка, соединяющего точку A с началом координат. Сферическая система координат удобна при анализе поверхностей, имеющих сферическую симметрию. Начало координат нужно поместить в центр симметрии, тогда уравнение сферы $r = r_{\text{сферы}}$

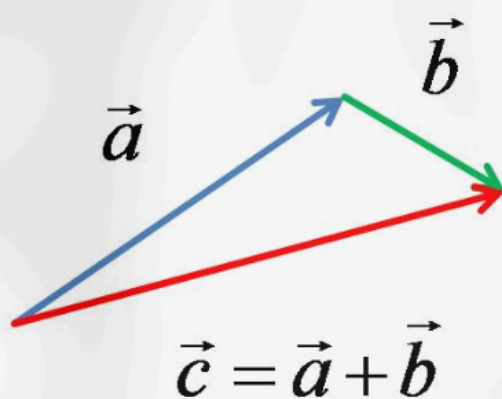


Элемент объёма в
сферических
координатах.

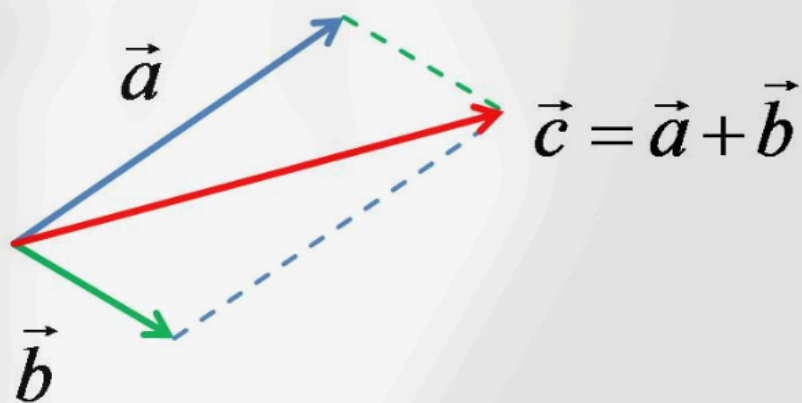
$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$



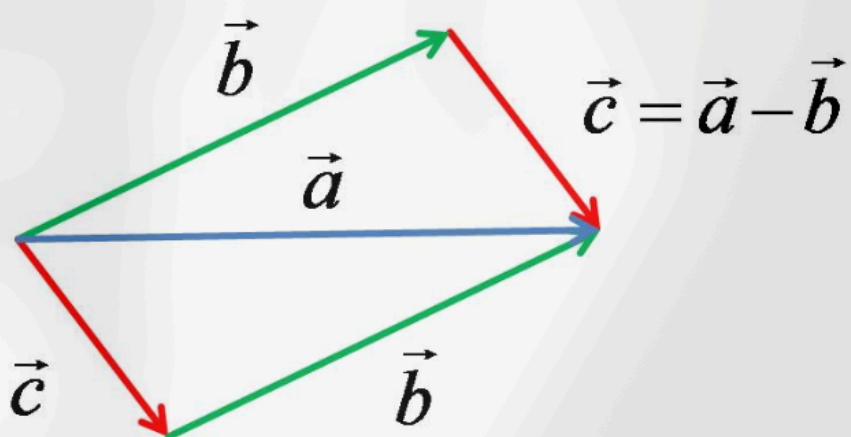
Сумма векторов.
Правило треугольника.



Сумма векторов.
Правило параллелограмма.

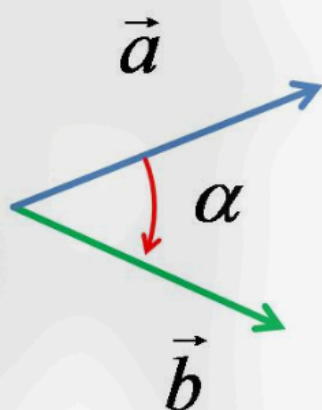


Разность векторов.



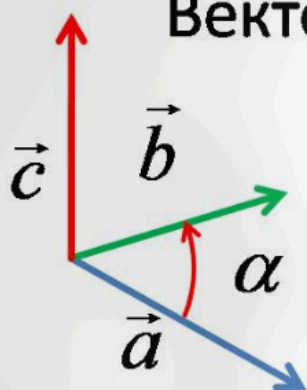
Скалярное произведение.

$$c = (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$



Скалярным произведением векторов a и b называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними (первый вектор вращаем ко второму по кратчайшему пути) .

Векторное произведение.



$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

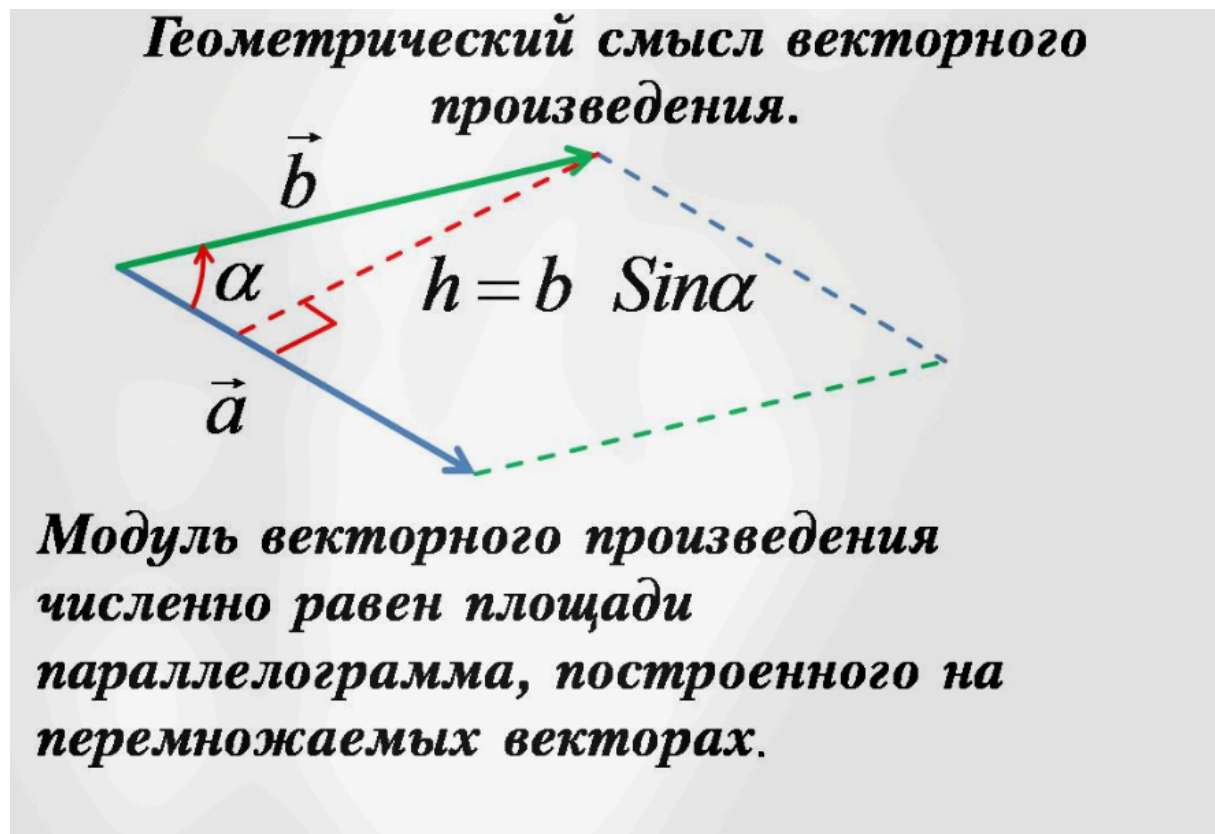
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \cdot \vec{n}$$

Последовательность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ образует правую тройку

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого равен произведению модулей этих векторов на синус угла между ними, а направление определяется следующим образом: если

смотреть на конец вектора $\vec{c}$, то поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути осуществляется против часовой стрелки.



Дифференциалы – малые приращения

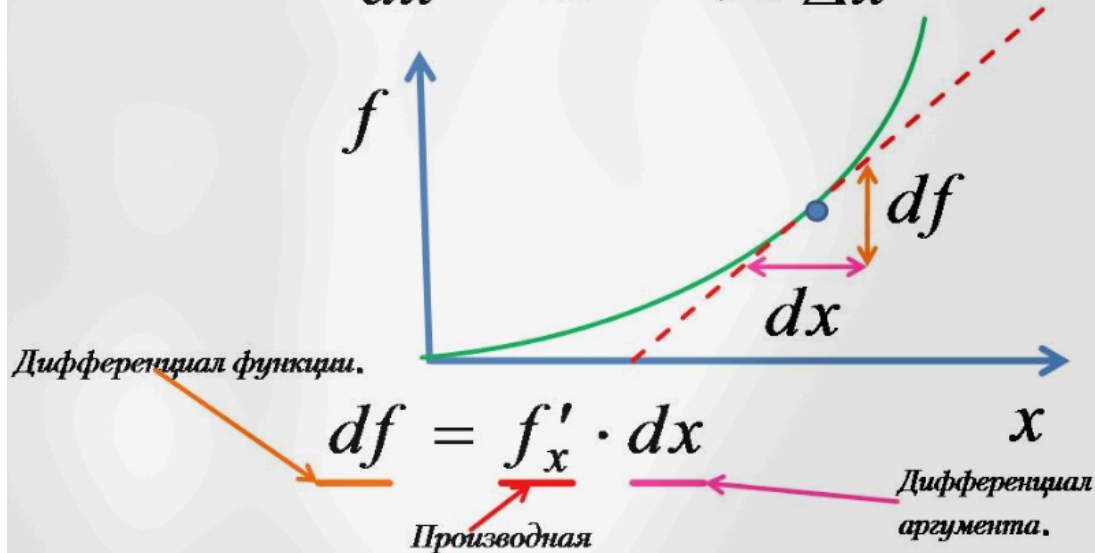
$$\Delta x \quad dx$$

В математике спокойно говорим “бесконечно малые”

В физике тоже так говорим, но понимаем, что это малые, но конечные (доступные для измерения) приращения, иначе они могут менять физический смысл – вместо классической, окажемся в мире квантовой механики.

Геометрический смысл производной

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Примеры вычисления дифференциалов

Рассмотрим, например, такую функцию.

$$f = 3x^2$$

Теперь вычислим дифференциалы левой и правой части этого уравнения.

$$df = \underline{6x} \, dx$$

Подчеркнута производная.

Дифференциальное уравнение

$$f'_x = 6x \quad \frac{df}{dx} = 6x$$

Разделяем переменные. $df = 6x \, dx$

Нужно знать начальные условия. Пусть, например, при $x = 0$ $f(x) = 3$

Интегрируем $\int df = \int 6x \, dx$

$$f = 3x^2 + \text{const} = 3x^2 + 3$$

Измерение времени.

Часы – тело или система тел, в которых совершается периодический процесс, служащий для измерения времени.

Одна секунда

9102631700

колебаний электромагнитного излучения между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия 133.

Измерение расстояний.

Один метр – длина пути, проходимая светом в вакууме в течение

$$\frac{1}{299792458} \text{ секунды}$$

Такое измерение эталона метра вызвано тем, что экспериментальная погрешность определения скорости света в вакууме в настоящее время составляет примерно 0,3 м/с. Это превышает относительную точность воспроизведения метра $4 \cdot 10^{-9}$ предложенным выше способом.

Относительная точность измерения расстояния будет непрерывно повышаться, чтобы каждый раз не менять определения метра, зафиксировали скорость света. Это позволило зафиксировать значения ряда физических констант.

Частота сверхтонкого расщепления основного состояния атома цезия-133 в точности равна 9192631770 Гц;

скорость света в вакууме c в точности равна $299792458 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

световая эффективность k_{cd} монохроматического излучения частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц в точности равна 683 лм/Вт

Планируется зафиксировать следующие константы

постоянная Планка h в точности равна $6.62606X \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

элементарный электрический заряд e в точности равен $1.60217X \cdot 10^{-19}$ Кл;

постоянная Больцмана k в точности равна $1.3806X \cdot 10^{-23}$ Дж/К;

число Авогадро N_A в точности равно $6.02214X \cdot 10^{23}$ моль⁻¹;

На XXIV Генеральной конференции по мерам и весам 17 – 21 октября 2011 года была единогласно принята резолюция, в которой, в частности, предложено в будущей ревизии Международной системы единиц переопределить четыре основные единицы СИ: килограмм, ампер, кельвин и моль.

Предполагается, что новые определения будут базироваться на фиксированных численных значениях постоянной Планка, элементарного электрического заряда, постоянной Больцмана и постоянной Авогадро, соответственно. Всем этим величинам будут приписаны точные значения, основанные на наиболее достоверных результатах измерений, рекомендованных Комитетом по данным для науки и техники (CODATA). Под фиксированием (или фиксацией) подразумевается “принятие некоторого точного численного значения величины по определению”. В резолюции сформулированы следующие положения, касающихся этих единиц

Килограмм останется единицей массы, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Планка равным в точности $6.62606X \cdot 10^{-34}$, когда она выражена единицей СИ $\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$, что эквивалентно Дж·с.

Ампер останется единицей силы электрического тока, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения элементарного электрического заряда равным в точности $1.60217X \cdot 10^{-19}$, когда он выражен единицей СИ $\text{с} \cdot \text{А}$, что эквивалентно Кл.

Кельвин останется единицей термодинамической температуры, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Больцмана равным в точности $1.3806X \cdot 10^{-23}$, когда она выражена единицей СИ $\text{м}^{-2} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$, что эквивалентно Дж·К⁻¹.

Моль останется единицей количества вещества, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Авогадро равным в точности $6.02214X \cdot 10^{23}$, когда она выражена единицей СИ моль^{-1} .

Выше и далее X заменяет одну или более значащих цифр, которые будут определены в дальнейшем на основании наиболее точных рекомендаций CODATA.

Систем единиц СИ

“Système International d’Unités” Включает в себя основные и производные единицы.

Основные единицы системы СИ: секунда, метр

Килограмм – единица массы, равная массе международного эталона килограмма.

Ампер – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ на каждый метр длины.

Кельвин – единица абсолютной температуры, равная $\frac{1}{273.16}$ части температуры тройной точки воды.

Моль – единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул), сколько содержится атомов углерода в углероде-12 массой 0.012 кг.

Кандела – единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет $\frac{1}{683}$ Вт/ср.

Дополнительные единицы СИ.

Радиян – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

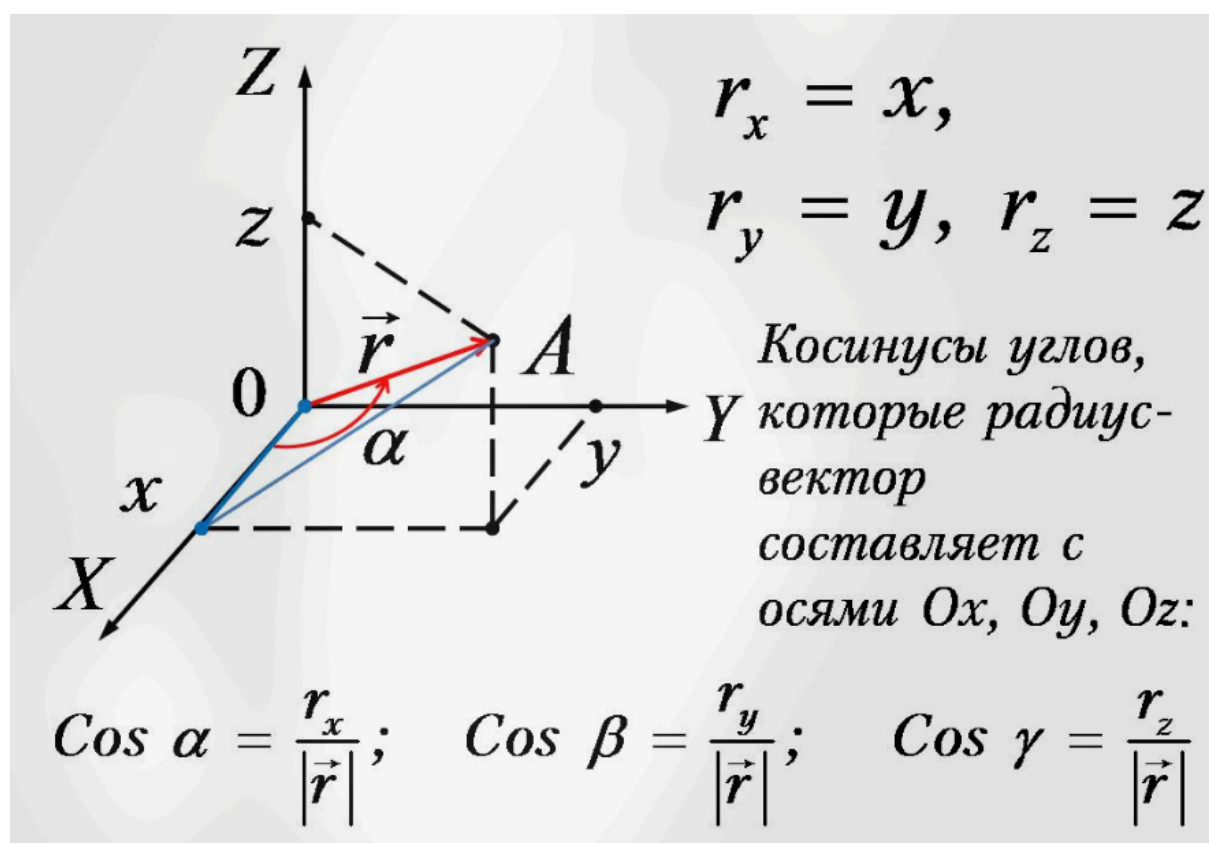
Стерadian – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площади, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Принципы, используемые при построении классической механики.

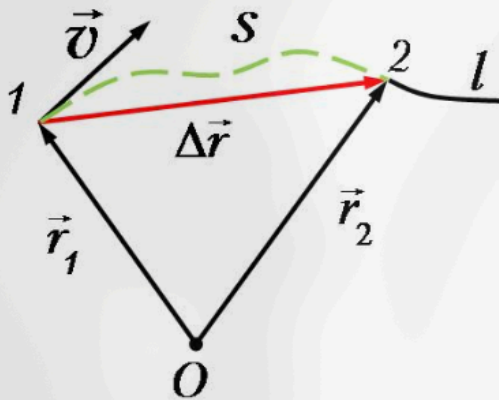
1. Однородность пространства – все пространственные точки эквивалентны между собой. (Начало отсчета можно выбрать в любой точке.)
2. Изотропность пространства – все направления в пространстве эквивалентны. (Систему координат можно поворачивать произвольным образом)
3. Однородности времени – все моменты времени эквивалентны. (В любой момент можно начать отсчет времени)

Радиус-вектор

Радиус-вектор точки – вектор, проведенный из начала координат в данную точку.



Основные понятия кинематики.



Пусть за интервал времени от t_1 до t_2 материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2.

O – начало отсчёта.

$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

l – траектория материальной точки.

S – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 .

$\vec{S} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 .

Перемещением материальной точки за интервал времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ называется вектор, проведенный из ее положения в момент времени t_1 в ее положение в момент времени t_2 .

Траекторией материальной точки называется линия, которую она описывает при своем движении.

Длиной пути S называется сумма длин всех участков траектории, пройденных материальной точкой за рассматриваемый промежуток времени.

Скорость и ускорение (повторение).



Мгновенная скорость.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Направлена по касательной к траектории



Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

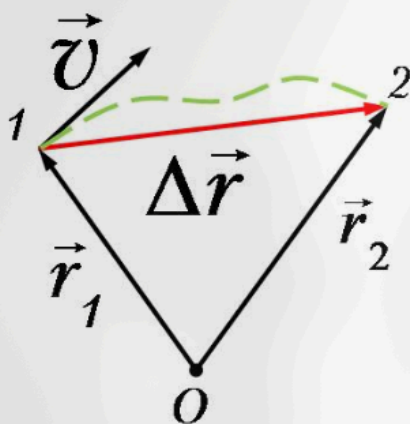
Вектор скорости точки в каждый момент времени направлен по касательной к ее пространственной траектории. Для получения траектории в пространстве скорости необходимо все векторы скорости,

относящиеся к выбранному моменту времени, отложить от одной точки-начала отсчета в пространстве скоростей.

Конец, изменяющегося во времени вектора скорости, вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называющуюся годографом вектора скорости. (Гамильтон 1846 г.) Вектор мгновенного ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости.

Мы будем использовать три способа описания движения – векторный, координатный и траекторный.

Векторный способ описания движения.

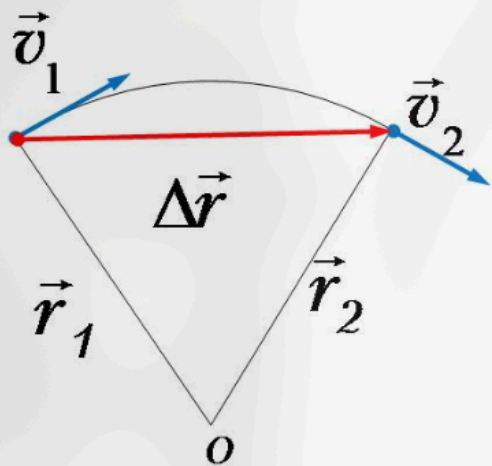


Для того, чтобы описать движение материальной точки, необходимо указать зависимость её радиуса-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 равно приращению её радиуса-вектора за этот интервал времени

Скорость и ускорение материальной точки.



Средняя скорость
материальной точки в
интервале времени от
 t_1 до t_2 :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Среднее ускорение материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Скорость материальной точки в момент времени t :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt,$$

где $\vec{v}_0$ - скорость материальной точки в момент времени $t = 0$.

Радиус-вектор материальной точки в момент времени t :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки в момент времени $t = 0$.

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t :

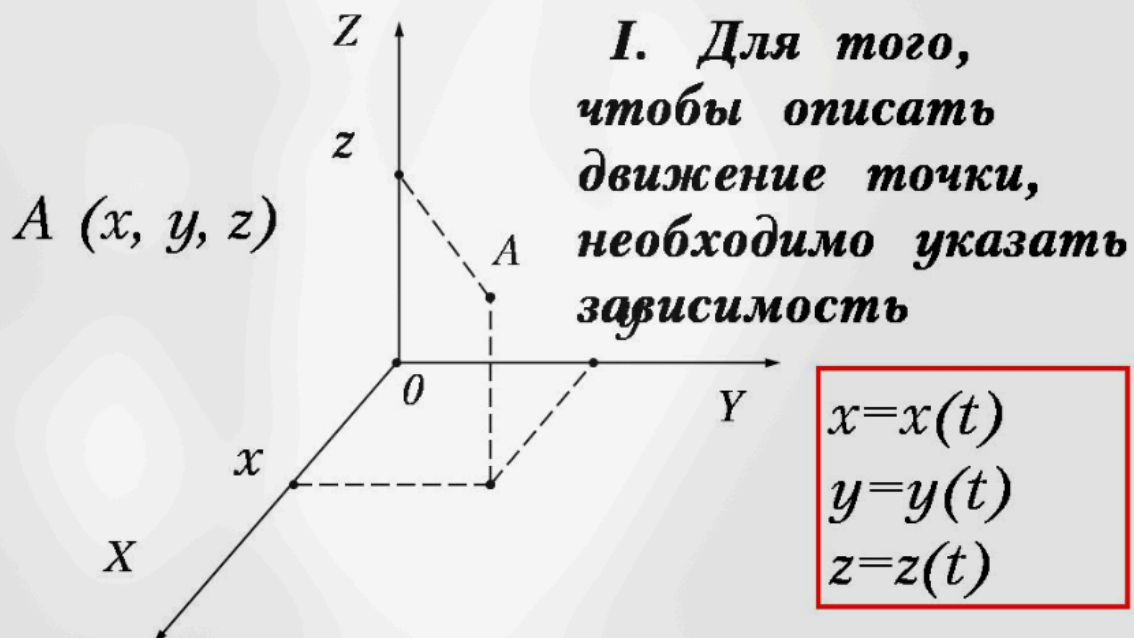
$$\Delta \vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Почему траектория тела, брошенного под углом к горизонту, плоская кривая?

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

В любой момент времени вектор перемещения лежит в плоскости, содержащей векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$

Координатный способ описания движения.



II Вектор скорости материальной точки.

Проекции вектора скорости на оси координат.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

Модуль вектора скорости:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор скорости составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

III. Ускорение материальной точки.

Проекции вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль вектора ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор ускорения составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

IV. Перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2

Проекции вектора перемещения на оси координат:

$$(\vec{S})_x = x_2 - x_1$$

$$(\vec{S})_y = y_2 - y_1$$

$$(\vec{S})_z = z_2 - z_1$$

Модуль вектора перемещения:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор перемещения составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{S_x}{|\vec{S}|}; \quad \cos \beta = \frac{S_y}{|\vec{S}|}; \quad \cos \gamma = \frac{S_z}{|\vec{S}|};$$

V. Приращение радиуса-вектора материальной точки (перемещение)

Проекции приращения радиуса-вектора на оси координат:

$$\Delta r_x = x_2 - x_1$$

$$\Delta r_y = y_2 - y_1$$

$$\Delta r_z = z_2 - z_1$$

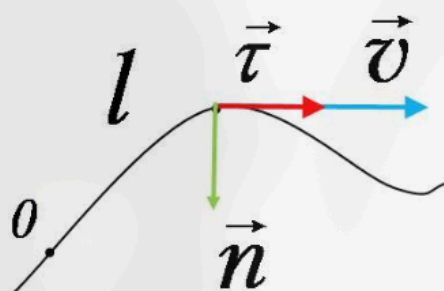
Модуль приращения радиуса-вектора:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2 + \Delta r_z^2}$$

Косинусы углов, которые приращение радиуса-вектора составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{\Delta r_x}{|\Delta \vec{r}|}; \quad \cos \beta = \frac{\Delta r_y}{|\Delta \vec{r}|}; \quad \cos \gamma = \frac{\Delta r_z}{|\Delta \vec{r}|}$$

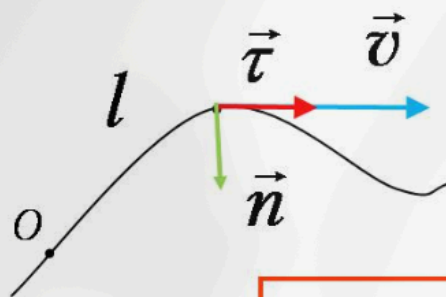
Траекторный способ описания движения



Используется , когда траектория движения материальной точки известна заранее.

Положение материальной точки задаётся с помощью дуговой координаты l , отсчитываемой от выбранного на траектории начала.

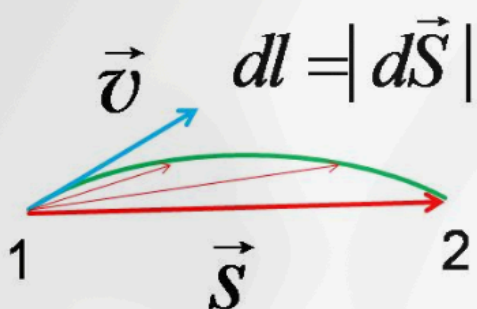
$$l = l(t)$$



**Скорость
материальной точки:**

$$\vec{v} = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{\tau} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ — **единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.**



**Обратите внимание!
Модуль вектора скорости равен производной от пути по времени.**

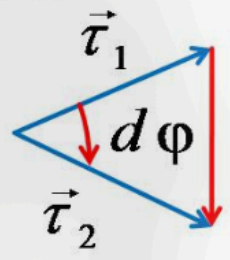
Через перемещение

$$|\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\vec{S}}{dt} \right|$$

Через путь

$$|\vec{v}| = \frac{dl}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Вычислим производную от вектора $\vec{\tau}$ по времени



$$|\vec{\tau}| = 1$$

$$d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \vec{n} \quad |d\vec{\tau}| = d\varphi$$

$$d\vec{\tau} = d\varphi \vec{n}$$

Орт $\vec{n}$ лежит в той же плоскости, в которой поворачивается вектор $\vec{\tau}$, направлен в ту же сторону, в которую происходит вращение.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}$$

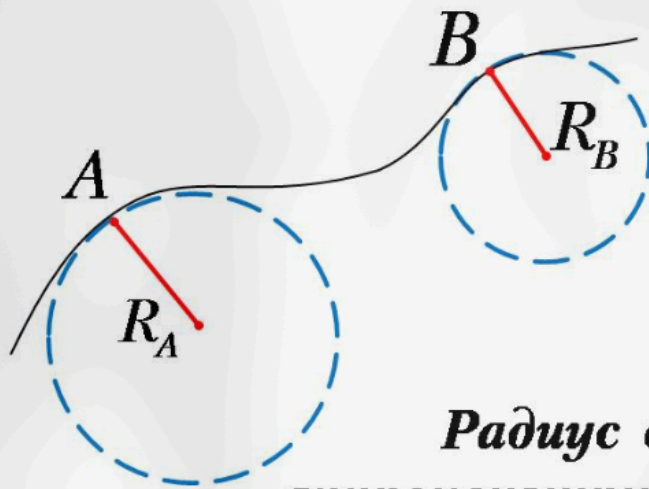
Полное ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{\frac{|\vec{v}| \cdot d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{|\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Если $|\vec{v}| \uparrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$ Если $|\vec{v}| \downarrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

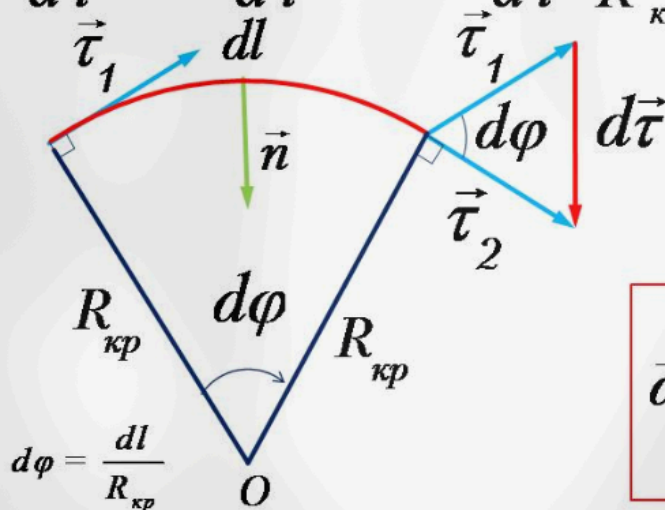
Радиус кривизны траектории



**Радиус окружности,
аппроксимирующей траекторию
в данной точке**

Выразим нормальное ускорение материальной точки через радиус кривизны её траектории:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = \frac{dl}{dt} \frac{1}{R_{кр}} \vec{n} = |\vec{v}| \frac{1}{R_{кр}} \vec{n}$$



$$\vec{a}_n = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

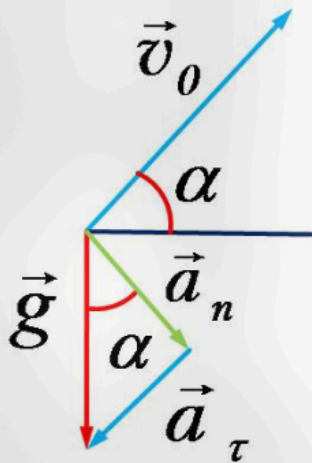
Тангенциальное ускорение отвечает за скорость изменения модуля скорости

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Нормальное ускорение пропорционально скорости изменения направления вектора скорости

$$\vec{a}_n = |\vec{v}| \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = |\vec{v}|^2 \frac{1}{R} \vec{n}$$

Пример. Камень брошен со скоростью $\vec{v}_0$ под углом к горизонту. Определите его нормальное и тангенциальное ускорение, и радиус кривизны траектории в начальный момент времени.



$$a_n = g \cos \alpha$$

$$a_\tau = g \sin \alpha$$

$$R = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}$$

Движение с постоянным ускорением

Зависимость скорости материальной точки от времени:

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$\vec{v}_0$ – скорость материальной точки в момент времени $t = 0$.

Зависимость радиуса-вектора материальной точки от времени:

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор материальной точки в момент времени $t = 0$

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\vec{a} = \text{const}, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Формула для разности квадратов скоростей

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

Приращение координаты материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}$$

Проекция на ось Ox перемещения материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$(\Delta \vec{r})_x = \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}$$

Средняя скорость прохождения отрезка пути.

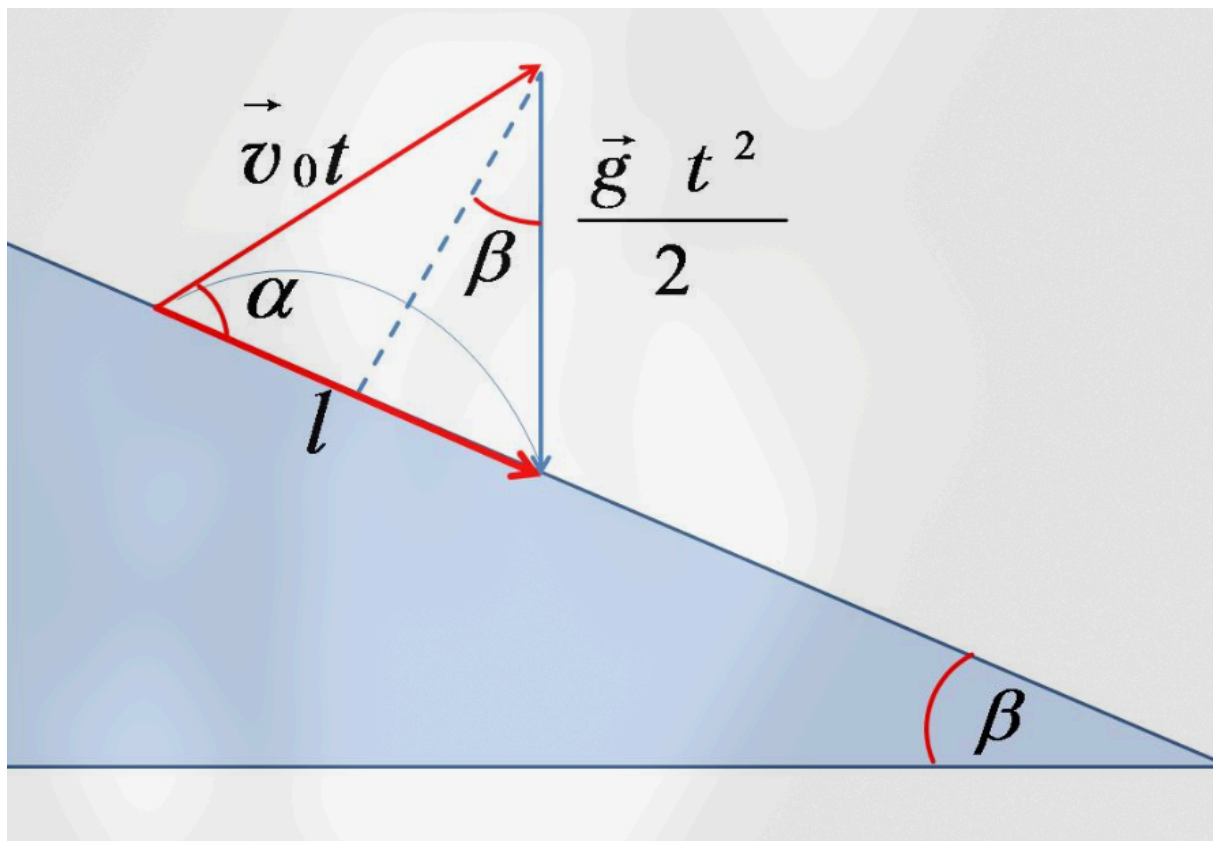
$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{\Delta t}$$

Средней путевой скоростью движения точки называется скалярная величина равная отношению пути, пройденного точкой за интервал времени Δt , к его продолжительности.

Пример . Материальная точка прошла путь из точки A в точку B со скоростью v_1 и обратно со скоростью v_2 . Вычислите среднюю путевую скорость.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\vec{v}_1} \quad \xleftarrow{\vec{v}_2} \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 A \quad S \quad B
 \end{array}
 \quad
 v_{cp} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} \right)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Пример. Камень брошен со склона горы с начальной скоростью v_0 , направленной под углом α к склону горы, составляющего угол β с горизонтом. На каком расстоянии от точки бросания l упадет камень?



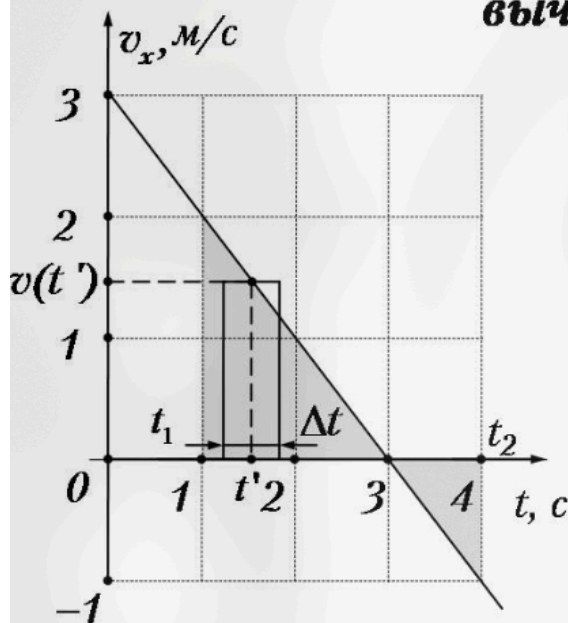
Выразим высоту в треугольнике через модуль каждого из векторов по очереди.

$$v_0 t \sin \alpha = \frac{gt^2}{2} \cos \beta$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta}$$

$$l = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \beta} \cos(\alpha - \beta)$$

Пример 2. Материальная точка движется вдоль оси Ox . По графику зависимости $v_x(t)$ вычислим:



1). Путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$S = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м}$$

2). Приращение координаты материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$x_2 - x_1 = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

3). Проекцию перемещения материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$(\Delta \vec{r})_x = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$



Пример. Материальная точка движется вдоль оси Ox .

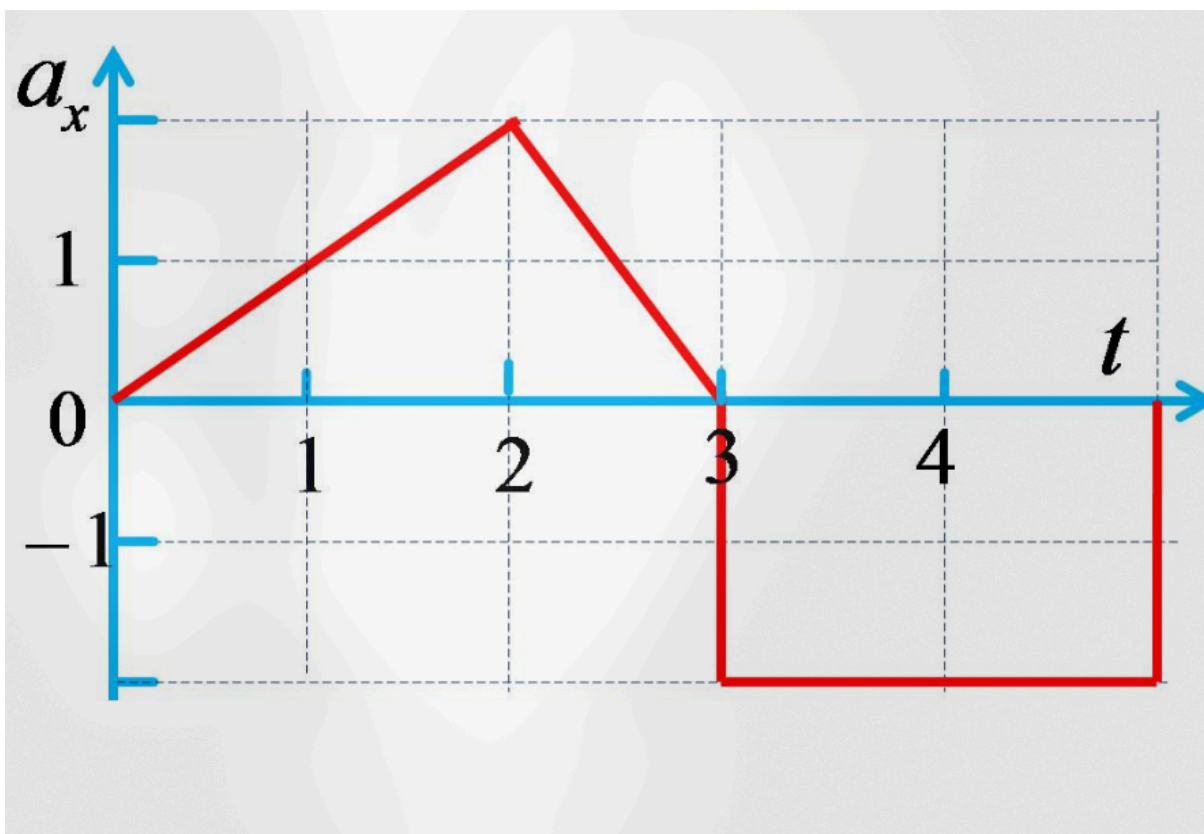
1. Укажите момент времени, когда мгновенная скорость точки максимальна.

2. Укажите момент времени t_1 , когда мгновенная скорость совпадает по величине со средней путевой скоростью за интервал времени от 0 до t_1 .



Пример. Материальная точка покоится в начале координат. В момент времени $t=0$ она начинает движение вдоль оси Ox . На рисунке показан график зависимости проекции ее ускорения на ось Ox от времени. Определите:

1. В какие моменты времени модуль скорости точки возрастает
2. В какой момент времени направление движения точки изменяется на противоположное.
3. Максимальное значение модуля скорости точки
4. На какое максимальное расстояние точка удалилась от начала координат



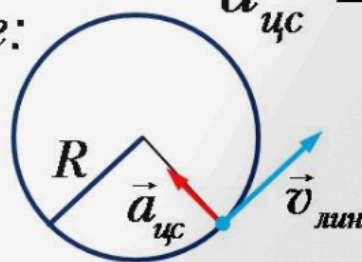
Лекция 2. Кинематика вращательного движения.

Кинематика равномерного вращения материальной точки по окружности

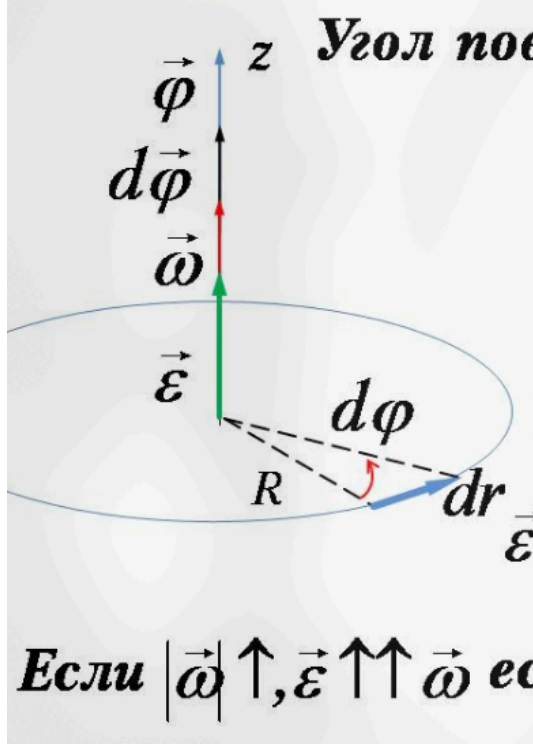
Период обращения точки: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ $[T] = c$

Частота обращения точки: $\nu = \frac{1}{T}$ $[\nu] = c^{-1}$

Центростремительное ускорение: $a_{\text{цс}} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$



Кинематика вращения материальной точки вокруг неподвижной оси.



The diagram illustrates the kinematics of rotation around a fixed vertical axis labeled z . A horizontal disk is shown rotating. Several vectors are depicted along the z -axis: $\vec{\varphi}$ (blue arrow pointing up), $d\vec{\varphi}$ (red arrow pointing up), $\vec{\omega}$ (green arrow pointing up), and $\vec{\varepsilon}$ (green arrow pointing up). A point on the disk is at a distance R from the axis. A small arc of angle $d\varphi$ is shown, with a corresponding displacement vector $d\vec{r}$ (blue arrow) tangent to the arc. A red curved arrow indicates the direction of rotation.

Угол поворота: $\vec{\varphi}$ аксиальный вектор

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{c}$$

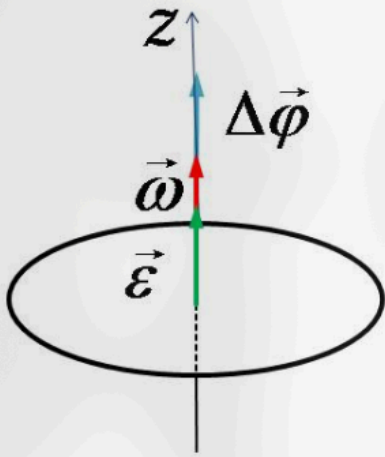
Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \quad [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{c^2}$$

Если $|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ **если** $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$

Направление вектора угла поворота определяют по правилу правого винта: если смотреть вдоль вектора угла поворота, то мы будем видеть поворот, совершающимся по часовой стрелке.

Равноускоренное движение материальной точки по окружности.



Зависимость угловой скорости от времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t$$

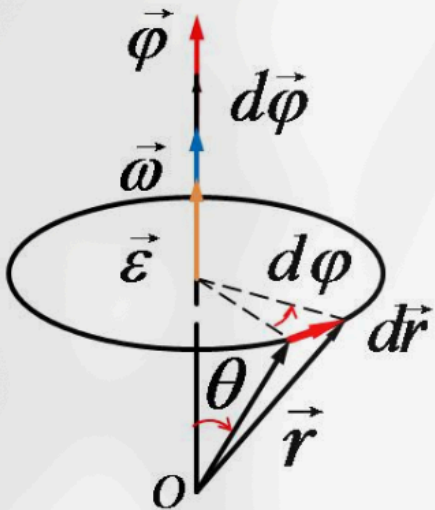
**Зависимость приращения
угла поворота от времени:**

$$\Delta \vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t$$

$$\Delta\varphi_z = \omega_{0z}t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}$$

Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



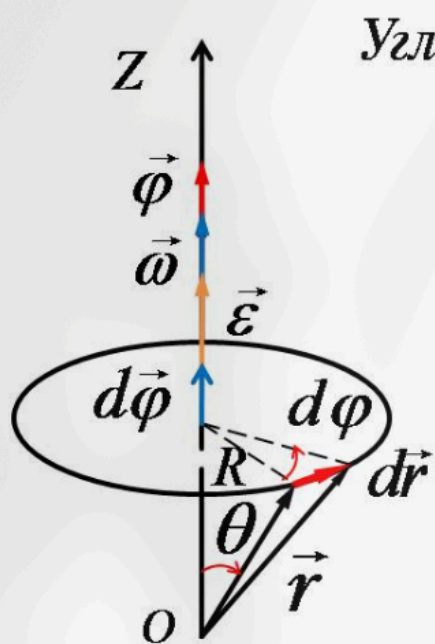
Для точек твёрдого тела начало отсчёта в общем случае не совпадает с центром окружности, по которой движется точка

Угол поворота: $\vec{\varphi}$

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

$$[\omega] = \frac{p a \partial}{c}$$



Угловое ускорение:

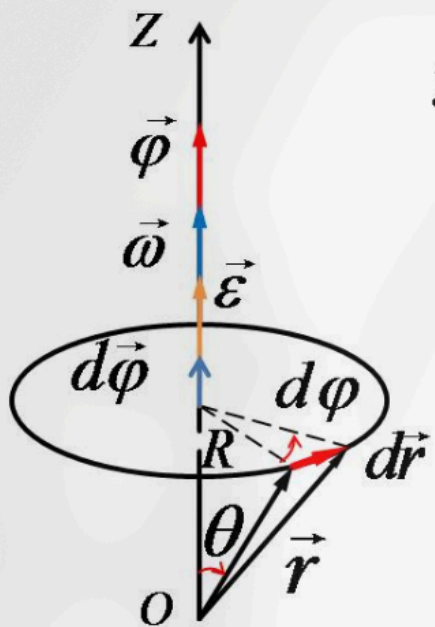
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Если:

$$|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

Если: $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$



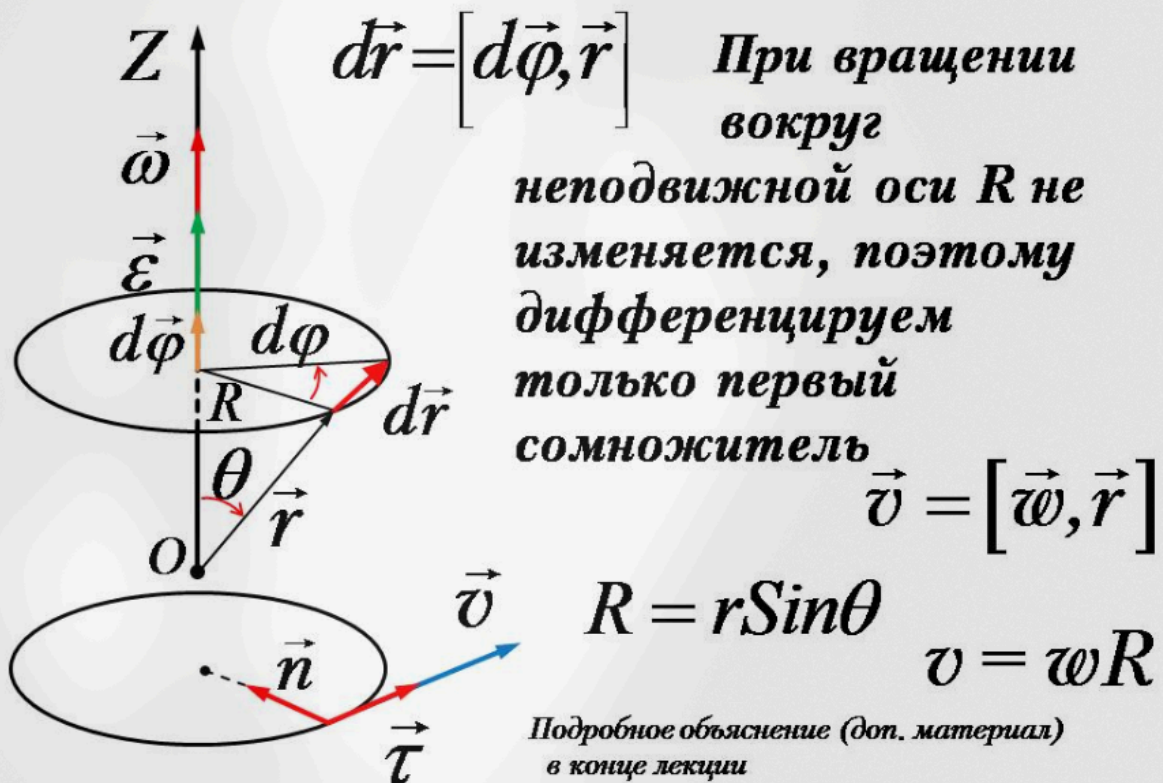
**Вращение с постоянным
угловым ускорением**

$$\vec{\varepsilon} = \text{const},$$

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t,$$

$$\Delta \vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0 \cdot t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

Связь линейных и угловых величин.



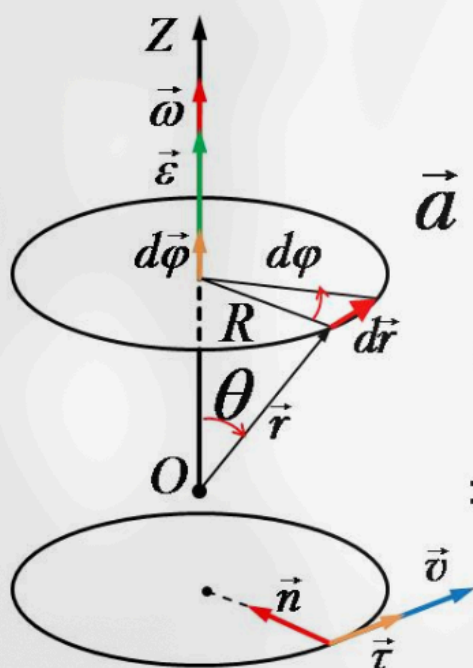
При рассмотрении таких векторов, как радиус-вектор, скорость или сила и. т. п., вопрос о выборе их направления не возникает – оно вытекает естественным образом из природы этих величин. Такие векторы называют полярными или истинными. Векторы, направление которых связано с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами.

При изменении условия, определяющего направление псевдовекторов, например, переходе от правой системы координат к левой псевдовекторы меняют направление на противоположное, а полярные остаются без изменений. Если оба вектора в векторном произведении полярные (или аксиальные), то векторное произведение – аксиальный вектор.

Произведение полярного вектора на аксиальный будет полярным вектором. Изменение условия, определяющего направление псевдовекторов на обратное приведет в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед аксиальным вектором. В итоге направление векторного произведения не изменится.

Продифференцируем скорость по времени- найдём ускорение

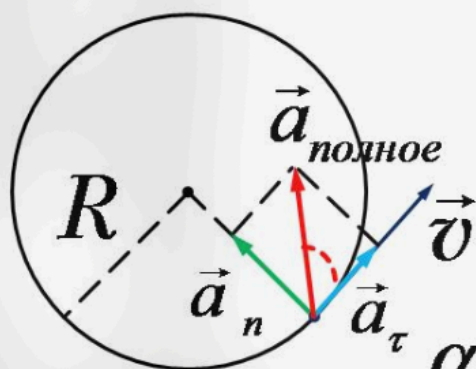
$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \\ &= \varepsilon \cdot R \cdot \vec{\tau} + \omega^2 \cdot R \cdot \vec{n} = \\ &= \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n \end{aligned}$$

Пример. Материальная точка начинает движение по окружности радиусом R с постоянным угловым ускорением ε . Вычислите угол между векторами её скорости и полного ускорения через t секунд после начала движения.

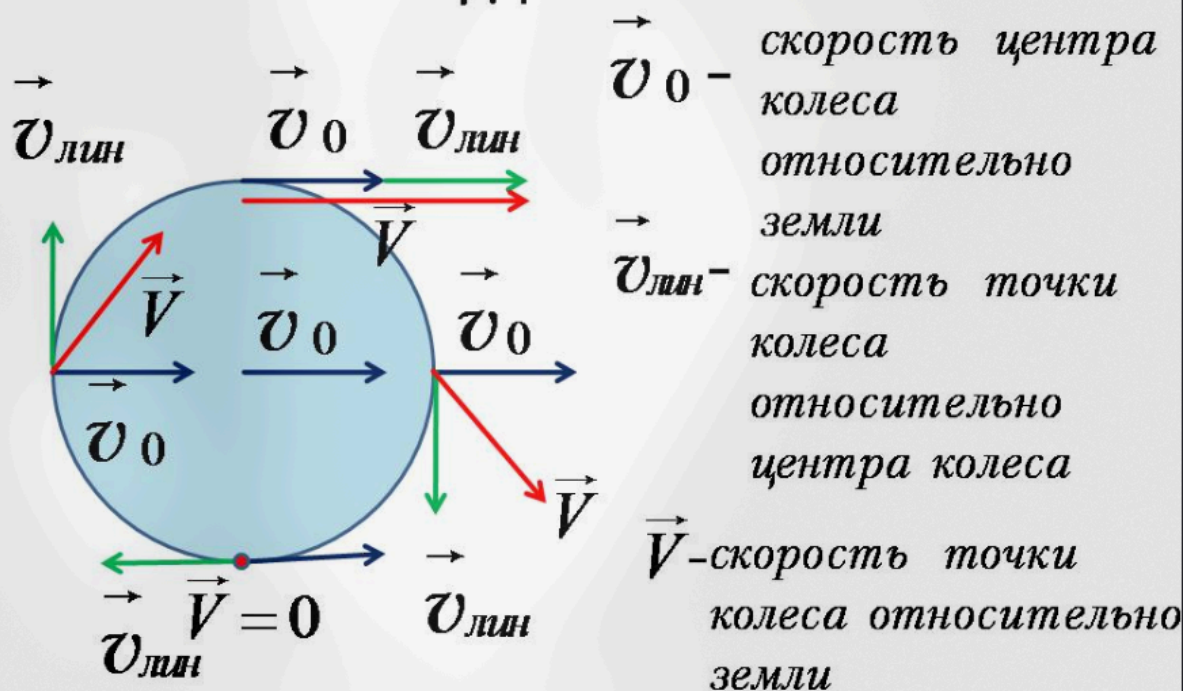
$$a_{\tau} = \varepsilon R$$



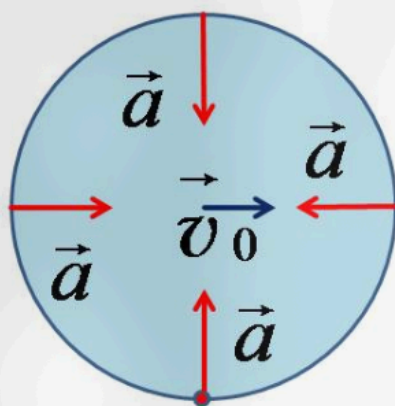
$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$$

$$\alpha = \arctg \frac{a_n}{a_{\tau}} = \arctg \varepsilon t^2$$

Плоское движение абсолютно твёрдого тела.

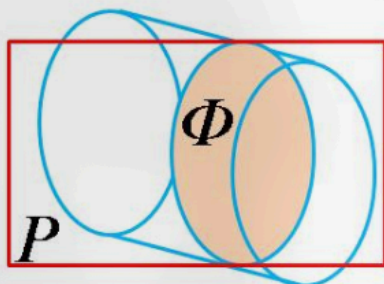


$$\frac{d\vec{V}_{\text{цм}}}{dt} = 0$$



При равномерном вращении колеса ускорение точек колеса так же, как при вращении вокруг неподвижного центра направлено к центру колеса, а не к мгновенной оси вращения.

Плоское движение абсолютно твёрдого тела.



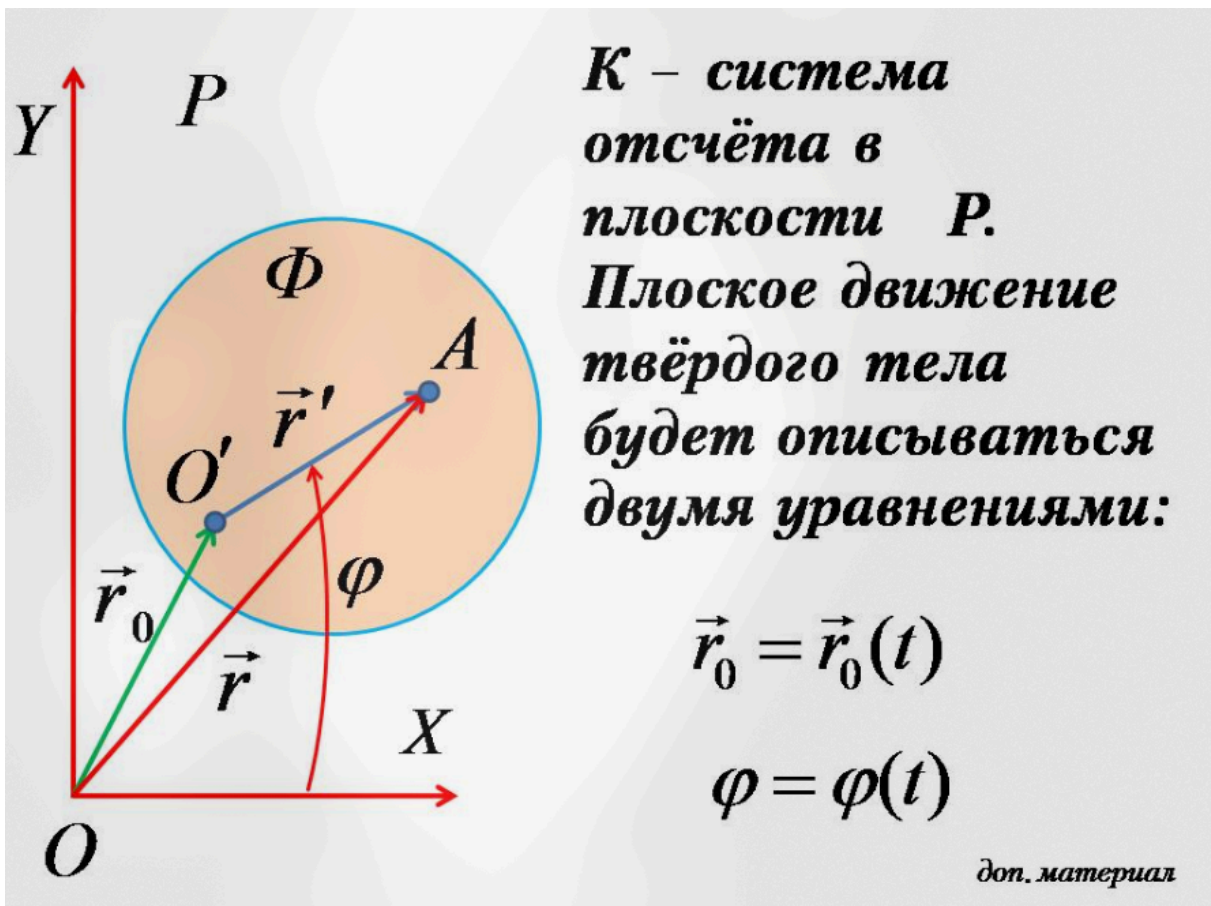
*Пример-цилиндр
катится по столу*

При плоском движении каждая точка твёрдого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной в данной системе отсчёта плоскости. Понятно, что при таком движении плоская фигура, образованная сечением тела этой плоскостью Φ всё время остаётся в этой плоскости P .

доп. материал

Положение твёрдого тела однозначно определяется положением плоской фигуры Φ в неподвижной плоскости P . Выберем произвольные точки A' и O' плоской фигуры Φ . Положение фигуры Φ в плоскости P можно определить, задав радиус-вектор $\vec{r}_0$ точки O' и угол между радиусом-вектором $\vec{r}'$ задающим положение A' относительно O' (этот вектор жестко связан с фигурой) и некоторым фиксированным направлением в K – системе отсчёта.

Выберем произвольные точки A и O' плоской фигуры Φ . Положение фигуры Φ в плоскости P можно определить, задав радиус-вектор $\vec{r}_0$ точки O' и угол между радиусом-вектором $\vec{r}'$, задающим положение A относительно O' , и некоторым фиксированным направлением в K – системе отсчёта (например, с осью Ox).

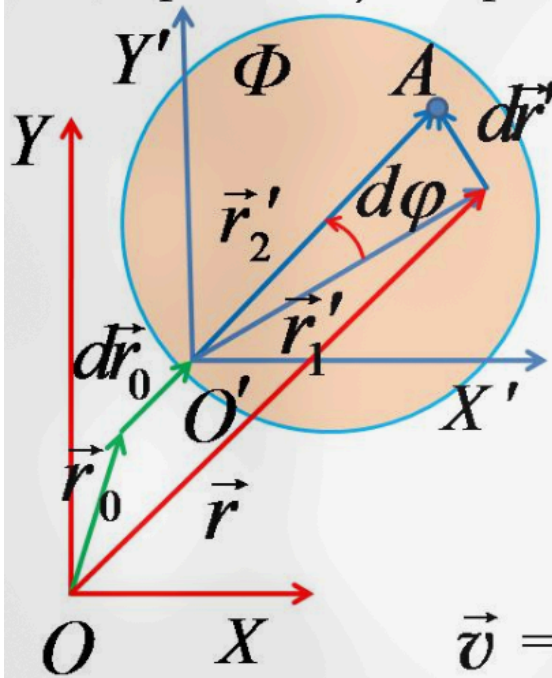


Заметим, что, если $\vec{r}'$ повернется на угол $d\varphi$, на такой же угол повернется и любой другой отрезок фигуры. Угловая скорости фигуры не зависит от выбора точки O'

Введем вспомогательную систему отсчета K' , с началом отсчета в точке O' . Оси Ox и Ox' направим параллельно. Пусть система отсчета K' перемещается поступательно относительно K . Элементарное перемещение $d\vec{r}$ точки A в K – системе

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \quad (1)$$

Перемещение $d\vec{r}'$ обусловлено вращением тела относительно неподвижной в K' системе оси, проходящей через точку O' .



$$d\vec{r}' = [d\vec{\phi}, \vec{r}'](2)$$

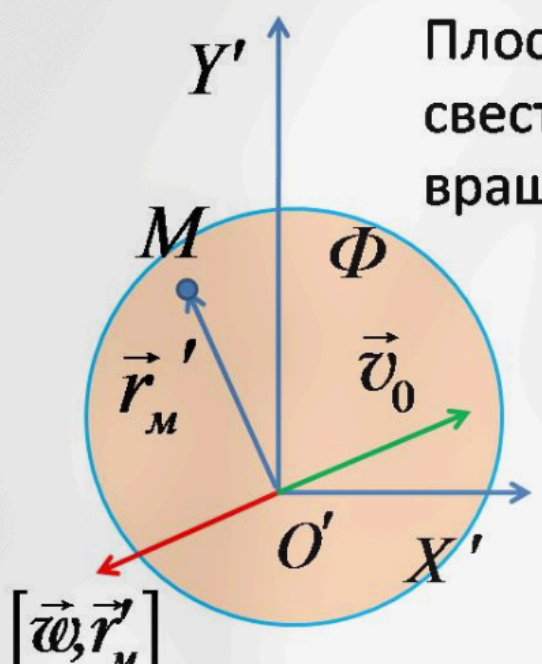
(2) в (1) и

дифференцируем
с учётом того,
что $\vec{r}'$
по модулю не
меняется

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \quad \text{доп. материал}$$

Скорость любой точки A твердого тела при плоском движении складывается из скорости $\vec{v}_0$ произвольной точки O' тела и $\vec{v}' = [\vec{\omega}, \vec{r}']$ скорости, обусловленной вращением тела вокруг оси, проходящей через точку O' .

Плоское движение можно свести к чисто вращательному



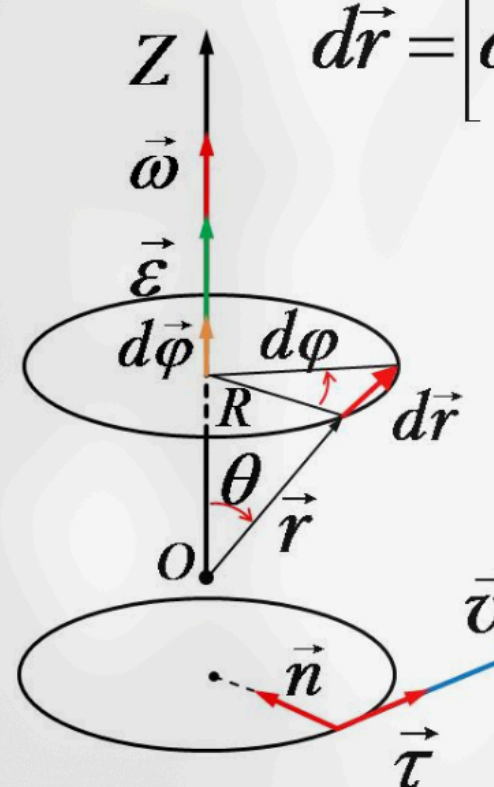
На предыдущем рисунке угловая скорость направлена на нас. Всегда найдётся такая точка M , что

$$0 = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}'_m]$$

Через точку M проходит мгновенная ось вращения

доп. материал

Связь линейных и угловых величин ●.



$$d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}]$$

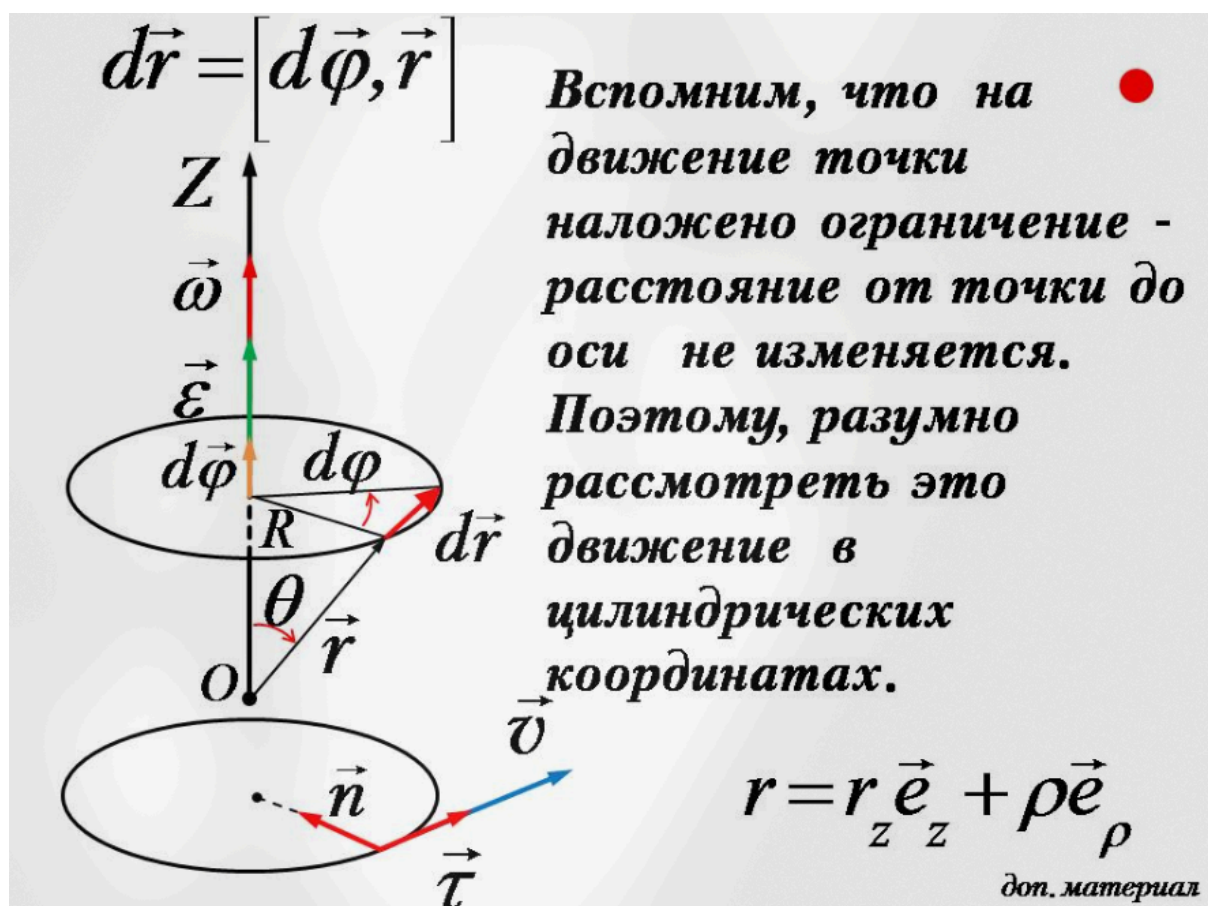
Казалось бы, надо продифференцировать сомножители векторного произведения по очереди, но ни в одном учебнике так не делают

Иродов И.Е., например, просто $d\phi$ делит на dt

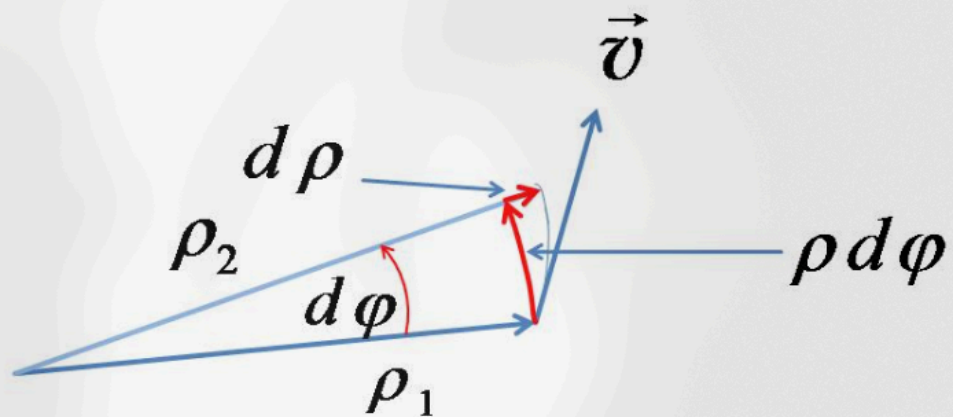
Савельев И.В. Вообще не говорит о перемещении, а сразу вводит формулу для линейной скорости без доказательства.

Не заметите неточности, не страшно... а если заметили...

доп. материал



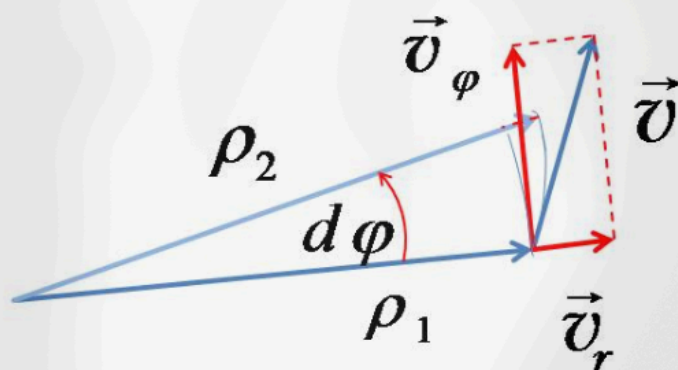
Орт $\vec{e}_z$ направлен вдоль вектора угла поворота, первое слагаемое при подстановке в векторное произведение обратится в нуль. Рассмотрим второе слагаемое. Сначала рассмотрим общий случай, когда на движение точки не наложено никаких ограничений, в цилиндрической системе координат перемещение точки разделяют на две составляющие.



Перемещение вдоль ρ равно $d\rho \vec{e}_r$
 В перпендикулярном направлении $\rho d\phi \vec{e}_\phi$

Продифференцируем эти перемещения,
 найдём радиальную

$$\vec{v}_r = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_r$$



и тангенциальную или поперечную
 скорости

$$\vec{v}_\phi = \rho \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi = \rho \omega \vec{e}_\phi$$

доп. материал

При вращении вокруг неподвижной оси $\rho = R$ не изменяется. Нет радиального перемещения dp , есть только поперечное перемещение $\rho d\varphi$. Нет радиальной скорости

$$\vec{v}_r = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_r$$

есть только трансверсальная скорость

$$\vec{v}_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \rho \omega \vec{e}_\varphi$$

А она в свою очередь может быть представлена в виде

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$R = r \sin \theta$$

$$v = \omega R$$

Лекция 3. Динамика поступательного движения.

Законы динамики Ньютона.

I закон:

Существуют такие системы отсчета, в которых свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такие системы отсчета называются инерциальными.

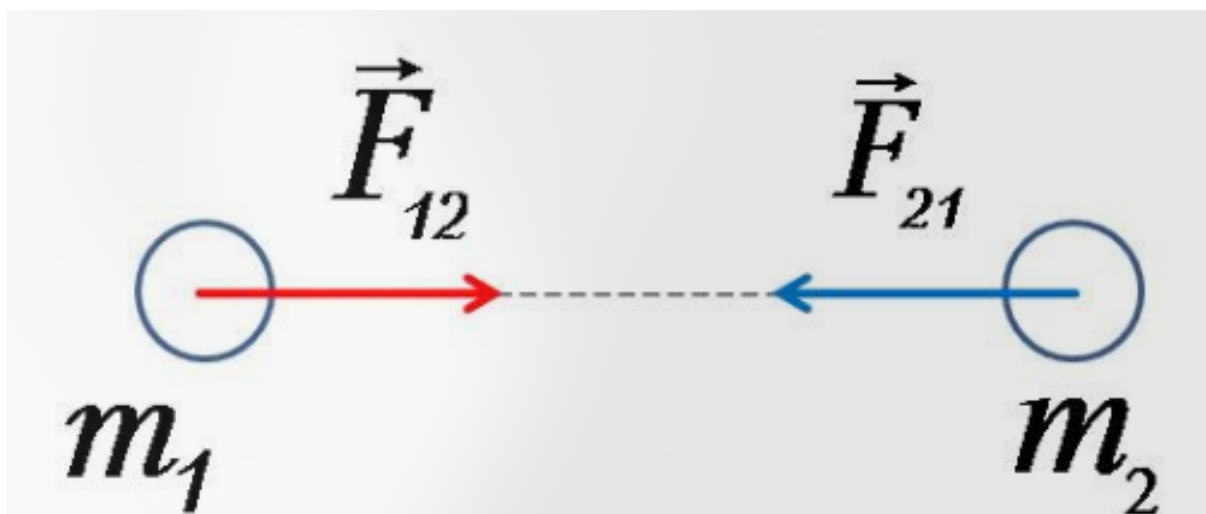
II закон:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_\Sigma}{m}$$

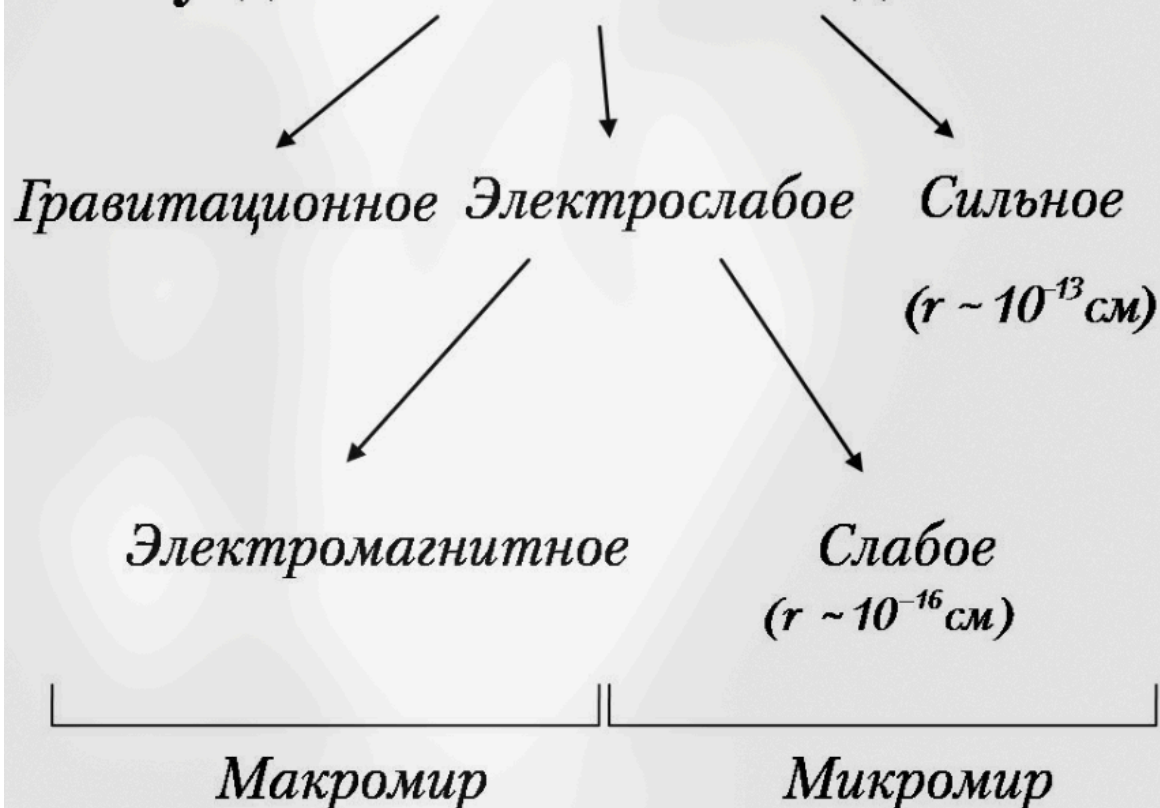
$\vec{F}_\Sigma$ – сумма всех сил, действующих на тело

III закон:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Фундаментальные взаимодействия



Закон всемирного тяготения

Diagram illustrating the Law of Universal Gravitation:

Two masses, m_1 and m_2 , are shown. The force vector $\vec{F}_{21}$ (red arrow) points from m_2 towards m_1 . The position vector $\vec{r}_{21}$ (green arrow) points from m_1 towards m_2 .

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$
$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

Масса инертная и гравитационная

Казалось бы, инертность и способность к гравитационным взаимодействиям представляют собой совершенно различные свойства материи. Количественные меры этих свойств могли бы быть разными, но...

I. Впервые (сам не подозревая об этом) доказать на опыте равенство инертной и гравитационной масс пытался Галилей. Он проводил опыты, стремясь опровергнуть утверждение Аристотеля о том, что тяжелые тела падают быстрее легких.

$$m_{\text{инертн}} a = m_{\text{грав}} g$$

для всех тел.

II. Ньютон открыл закон всемирного тяготения, анализируя законы Кеплера и используя свой закон динамики.

$$m_{\text{инертн}} a = F_{\text{грав}} = G \frac{m_{\text{грав}} M}{r^2}$$

Он первый проверил пропорциональность инертной и гравитационной масс с точностью до 10^{-3}

III. Современные эксперименты доказали равенство инертной и гравитационной масс с относительной погрешностью измерений до 10^{-12} .

В классической механике можно выбрать один и тот же эталон для измерения обеих масс и говорить просто и массе, которая выступает как мера инертности тела и как мера его гравитационного взаимодействия.

Принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции Эйнштейна.

Общая теория относительности релятивистская теория гравитации. Равенство инертной и гравитационной масс заложено в основу теории. Все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции.

Законы Кеплера.

1. Траектории, по которым движутся планеты, представляют собой эллипсы, а одним из фокусов которых находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты, проведенный из Солнца, зачерчивает за равные промежутки времени одинаковые площади.
3. Для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси эллиптической орбиты имеет одно и то же значение.

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Вывод третьего закона Кеплера из закона всемирного тяготения.

Будем рассматривать движение по круговым орбитам

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{F_{\text{грав}}}{m} = G \frac{M_{\text{Солн}}}{R^2}$$

Для всех планет, вращающихся вокруг Солнца,

$$G \frac{M_{\text{солн}}}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2} = \text{const}$$

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Приближенные силы.

I. Однородная сила тяжести $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$

II. Сила упругости. Закон Гука.

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}$$

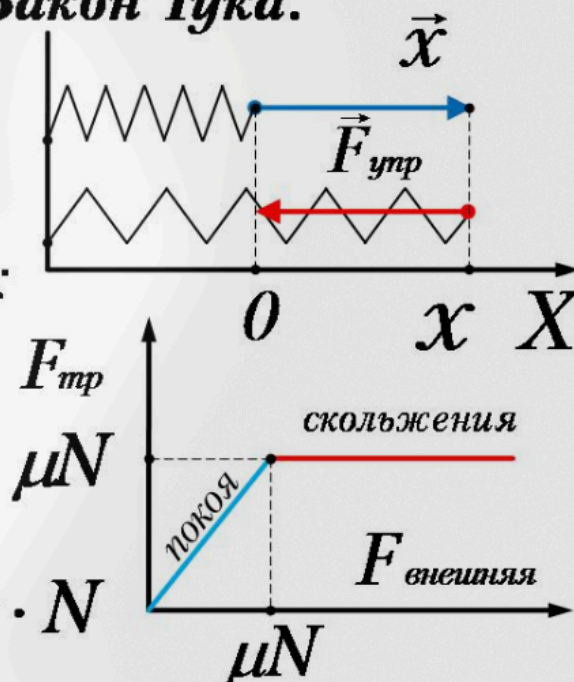
III. Сила трения:

1). Сила трения покоя:

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = |\vec{F}_{\text{внешн}}|$$

2). Сила трения

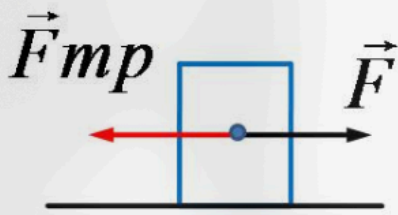
скольжения: $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu \cdot N$



Пример. Брусок массой $m=3\text{ кг}$ находится на горизонтальной поверхности.

Коэффициент трения бруска о поверхность μ равен 0.1. К бруску приложили горизонтальную силу $F=1\text{ Н}$. Вычислите силу трения, действующую на брусок.

$$\mu N = \mu mg = 3\text{ Н}.$$



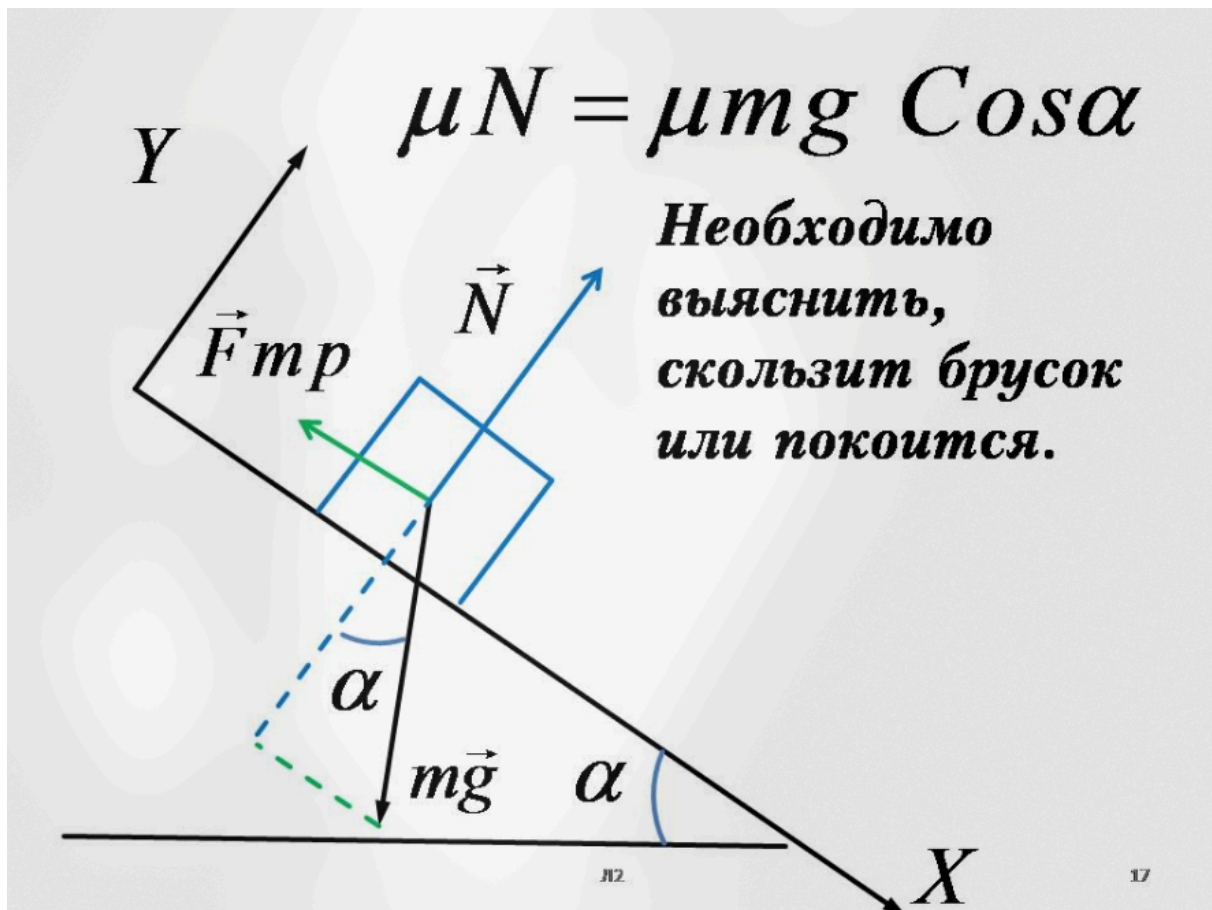
$$F = 1\text{ Н} < \mu mg$$

$$F_{\text{тр. покоя}} = F = 1\text{ Н}.$$

л2

15

Пример. Брусок массой m находится на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ . Вычислите силу трения, действующую на брусок.



Если составляющая силы тяжести, направленная вдоль плоскости,

$$mg \sin \alpha$$

больше максимально возможного значения силы трения покоя, брусок скользит вдоль наклонной плоскости

$$F_{\text{тр. ск.}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

Если

$$mg \sin \alpha < \mu mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр. покоя}} = mg \sin \alpha$$

Сила сопротивления

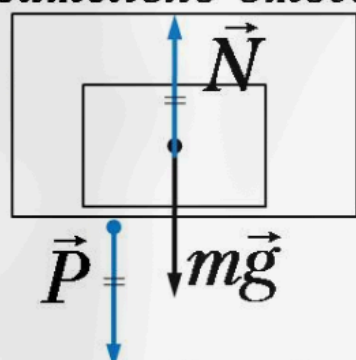
$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}$$

При больших скоростях

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -kv\vec{v}$$

Вес тела. Невесомость.

Вес тела – сила, с которой тело действует на опору или подвес, неподвижные относительно этого тела.



$$|\vec{P}| = |\vec{N}| = 0$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

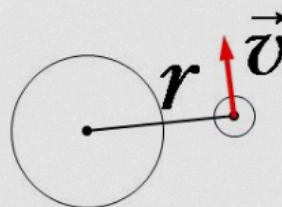
$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

1). Прямолинейное движение:

2). Движение по окружности:

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{r} = G \frac{M_{\text{земли}}}{r^2}$$



21

Второй закон Ньютона — уравнение движения материальной точки.

Основная задача динамики материальной точки

ТОЧКИ		
Известна зависимость	Известны	
$\vec{r}(t), m$	1) m	$\vec{F}(t)$
	2) Зависимость	$\vec{r}_0, \vec{v}_0$
Найти	3) Начальные условия	
$\vec{F}(t)$	Найти закон движения	$\vec{r}(t), \vec{v}(t)$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{суммарн}}}{m}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

Преобразования Галилея.

Начало отсчёта
времени
в
времени,
когда O и O'
совпадают.

$\vec{V}$ - скорость системы отсчёта K' относительно системы отсчёта K .

$t = t'$
 $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$
 $\vec{a}' = \vec{a}$

$$x' = x - V_x t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Покажем, что законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

1. Масса не зависит от скорости, т.е. одинакова во всех инерциальных системах отсчета:

$$m = m'$$

- 2.

$$t = t'; \quad \vec{a} = \vec{a}' \quad \left(\text{т.к.} \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} \right)$$

3. Сила может зависеть от масс взаимодействующих тел, от взаимного расположения тел и от их относительной скорости.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 &= \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 \\ m &= m' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}'$$

Принцип относительности Галилея.

Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Силы инерции

При переходе из инерциальной системы отсчета в неинерциальную ускорения приобретают, в худшем случае, три математические добавки

$$m\vec{a}_{\text{нсо}} = m(\vec{a}_{\text{исо}} + \vec{a}')$$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{взаимодействия}}$$

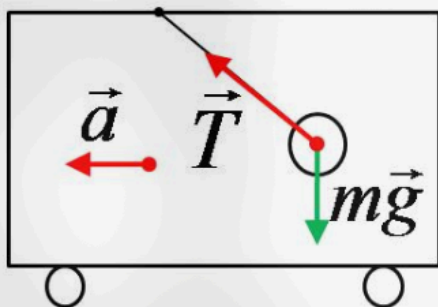
В неинерциальных системах отсчета можно формально сохранить вид II закона Ньютона, если добавить к силам взаимодействия силы инерции.

$$m\vec{a}_{\text{нсо}} = \Sigma \vec{F}_{\text{взаимодействия}} + \Sigma \vec{F}_{\text{инерции}}$$

Поступательная сила инерции:

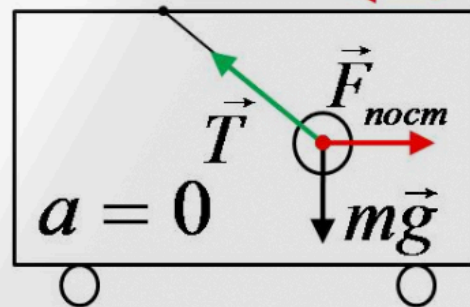
$$\vec{F}_{\text{пост}} = -m \vec{a}_{\text{со}}$$

ИСО – земля



$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

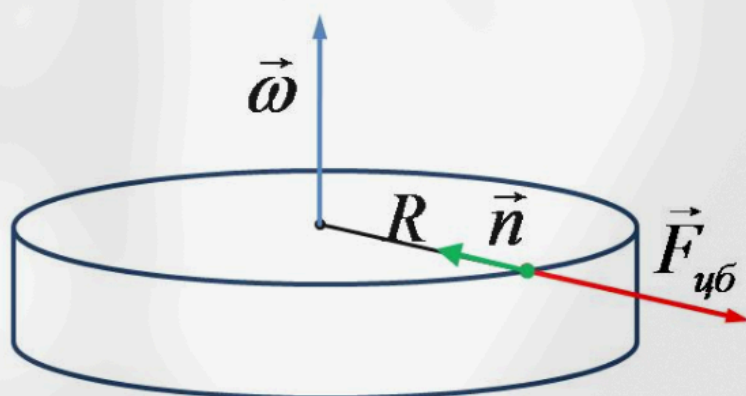
НСО – вагон $\vec{a}_{\text{со}}$



$$0 = \vec{F}_{\text{пост}} + \vec{T} + m\vec{g}$$

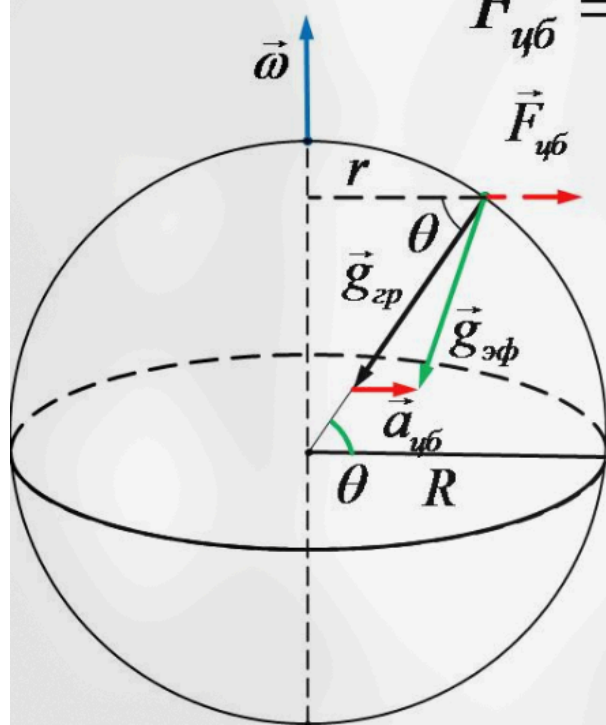
Центробежная сила инерции

$$\vec{F}_{цб} = m \left[[\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{\omega} \right] = -m\omega^2 R \vec{n}$$



Эффективное ускорение свободного падения

$$F_{цб} = m\omega^2 R \cos \theta = m\omega^2 r$$



g гравитационное:

на полюсе - 9,83 м/с²

на экваторе - 9,81

м/с²

g эффективное:

на полюсе - 9,83 м/с²

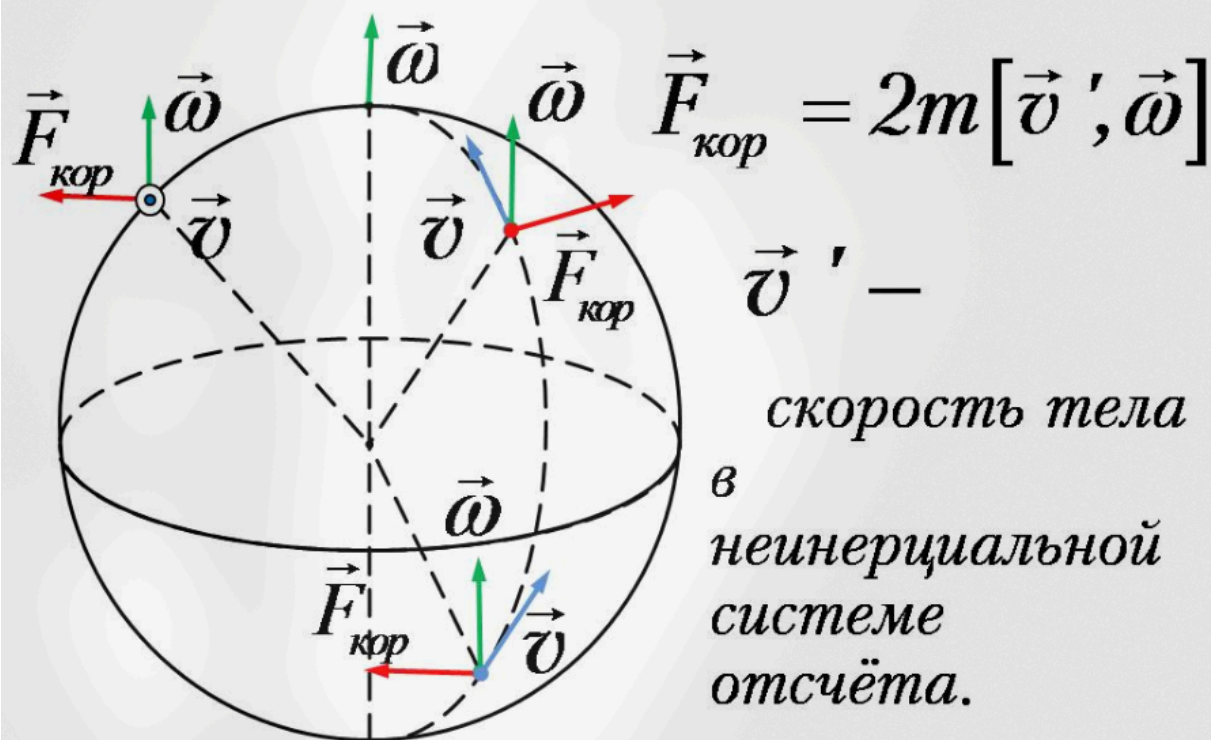
на экваторе - 9,78

м/с²

Среднее значение:

$g_{ср} = 9,81$ м/с²

Кориолисова сила инерции





Лекция 4. Второй закон Ньютона в импульсной форме. Закон сохранения импульса.

Второй закон Ньютона в импульсной форме. Основное уравнение динамики.

Импульс тела:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

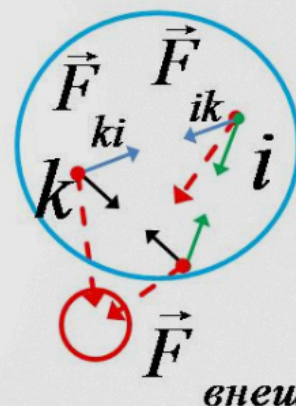
Приращение импульса тела равно импульсу действовавшей на него силы.

$$[\vec{p}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \quad [\vec{F}\Delta t] = \text{Н} \cdot \text{с}$$

Импульс системы частиц

$$\vec{P}_{сист} = \sum_i \vec{p}_i \quad \vec{F}_{ki} \text{ и } \vec{F}_{ik} - \text{внутренние силы}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_k \underbrace{\vec{F}_{ik}}_{\text{внутренние силы}} + \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{внешние силы}}$$



$$\frac{d\vec{P}_{системы}}{dt} = \underbrace{\sum_i \sum_k \vec{F}_{ik}}_{\text{внутр.}} + \sum_i \vec{F}_i \text{ внешн.}$$

III закон Ньютона
($\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$)

**Импульс системы частиц может изменяться
под действием только внешних сил**

Центр масс системы частиц. Закон движения центра масс.

1. Радиус-вектор центра масс: $\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

2. Скорость центра масс:

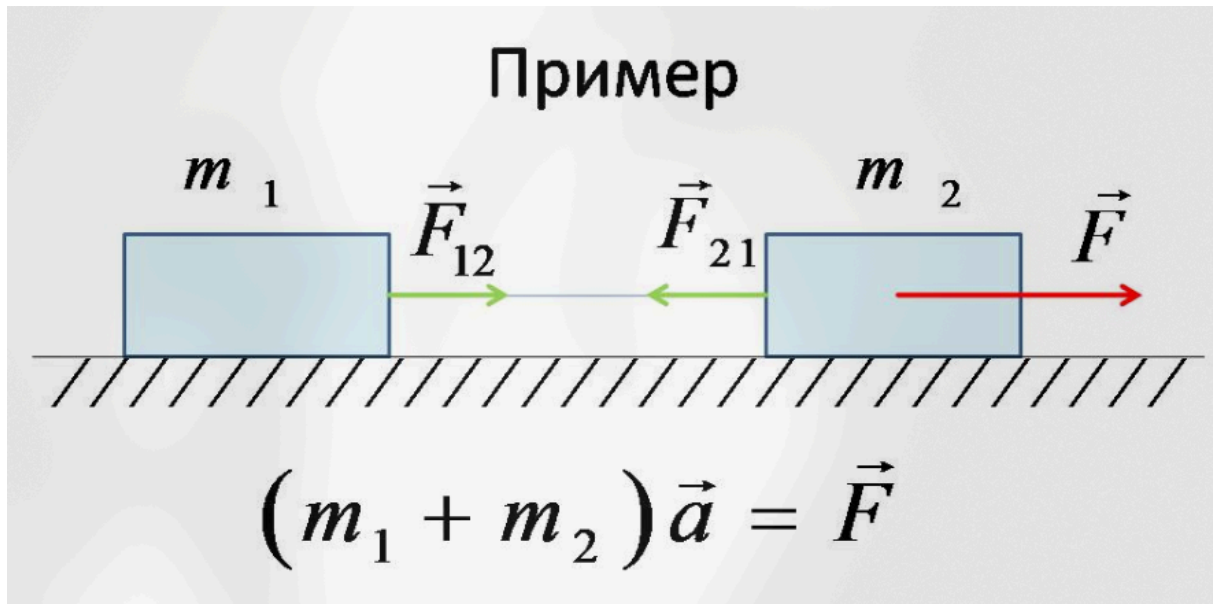
$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}_{системы}}{m_{системы}}$$

3. Закон движения центра масс системы частиц:

$$m_{системы} \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}_{системы}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \text{ внешн.}$$

Центр масс любой системы частиц, движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней была бы приложены все внешние силы.

Пример



Ц – система.

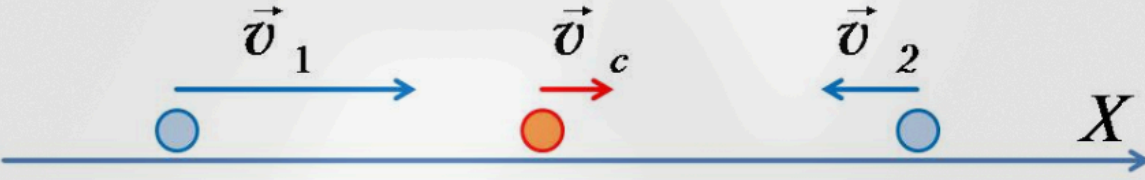
Систему отсчета, жестко связанную с центром масс, называют системой отсчета центра масс или Ц-системой.

Отличительной особенностью Ц-системы является то, что полный импульс системы частиц в ней всегда равен нулю.

$$\vec{v}_c = 0 = \frac{\vec{P}_{\text{системы}}}{m_{\text{системы}}}$$

Для замкнутой системы частиц Ц-система является инерциальной.

Пример. Два электрона сближаются, двигаясь вдоль одной прямой. На какое минимальное расстояние они сближаются, если на очень большом расстоянии друг от друга они имеют скорости $v_1 = 50$ м/с и $v_2 = 20$ м/с.



$$2m\vec{v}_c = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

В Ц - системе $\tilde{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c$ $\tilde{\vec{v}}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c$

$$v_{cx} = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{50 - 20}{2} = 15 \text{ м / с}$$

$$\tilde{v}_{1x} = v_{1x} - v_{cx} = 50 - 15 = 35 \text{ м / с}$$

$$\tilde{v}_{2x} = v_{2x} - v_{cx} = -20 - 15 = -35 \text{ м / с}$$

$$m\frac{\tilde{v}_1^2}{2} + m\frac{\tilde{v}_2^2}{2} + U_\infty = k\frac{e^2}{r_{\min}} + 0$$

В момент максимального сближения электронов их кинетическая энергия в Ц-системе равна нулю.

$$r_{\min} = \frac{ke^2}{m\tilde{v}^2}$$

Закон сохранения импульса

Импульс замкнутой системы частиц не изменяется с течением времени

1. В классической механике закон сохранения импульса является следствие из законов Ньютона:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

В замкнутой системе частиц

$$\vec{F}_i^{\text{внешн.}} = 0$$

$$\vec{P}_{\text{системы}} = \text{const}$$

2. Закон сохранения импульса – фундаментальный закон природы.

Закон сохранения импульса можно применять

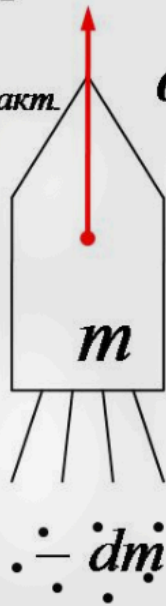
1. Если система частиц замкнута ($\vec{F}_{\text{внешн}} = 0$)

2. Если $\sum_i \vec{F}_i^{\text{внешн}} = 0$
3. Если $\sum_i F_{ix} = 0$, то $p_x = \text{const}$
4. Если кратковременные силы взаимодействия в системе во много раз превосходят по величине внешние силы

Реактивное движение

Скорость системы отсчёта равна скорости ракеты в момент времени $t=0$:

$$\vec{F}_{\text{реакт.}} \quad d\vec{p} = 0 = m d\vec{v} + \underbrace{m_{\text{газ}}}_{-dm} \cdot \vec{v}_{\text{отн}} : dt$$

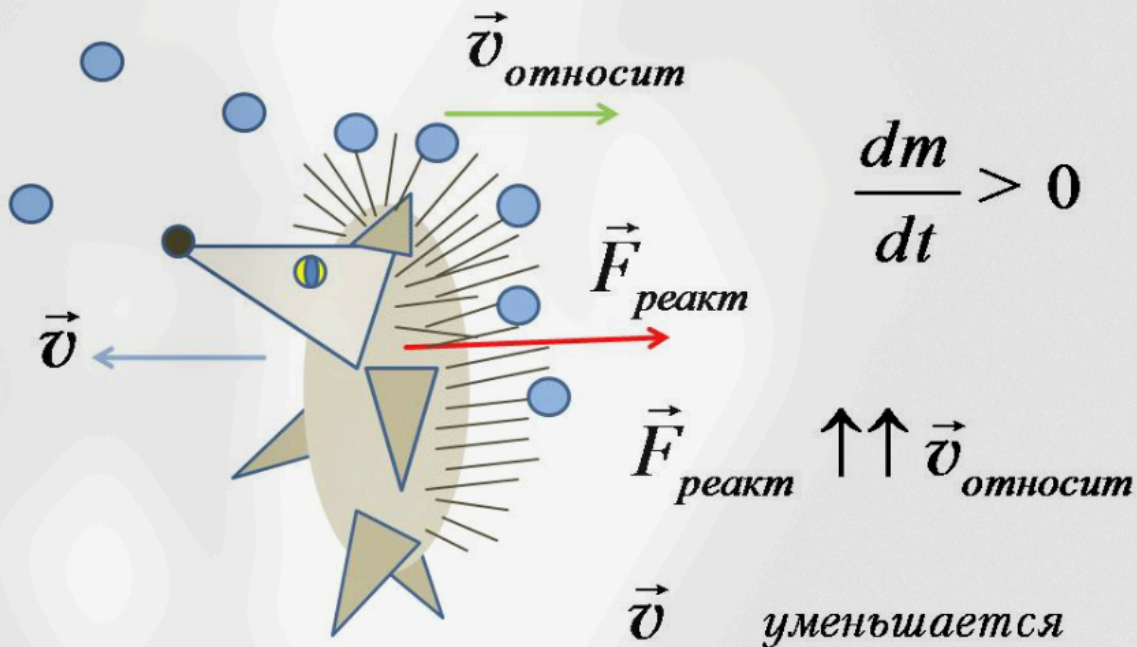


m - масса ракеты

$\vec{v}_{\text{отн}}$ - скорость газа относительно ракеты

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{F}_{\text{реактивная}}$$

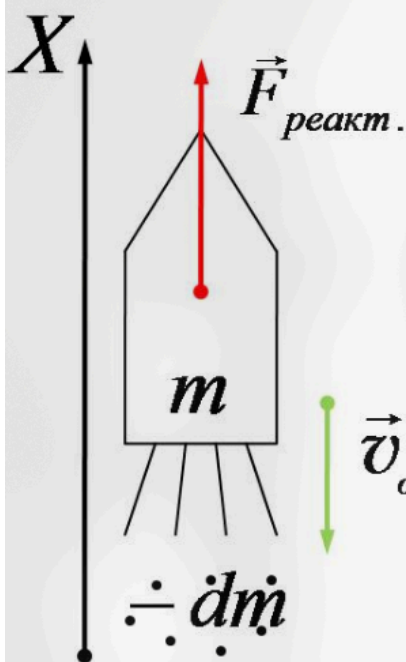
Пример. Ёжик в тумане.



Л2

14

Формула Циолковского



$$m d\vec{v} = dm \cdot \vec{v}_{\text{отн}}$$

$$Ox : dv = -v_{\text{отн}} \left(\frac{dm}{m} \right)$$

$$v = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + \text{const}$$

Начальные условия:

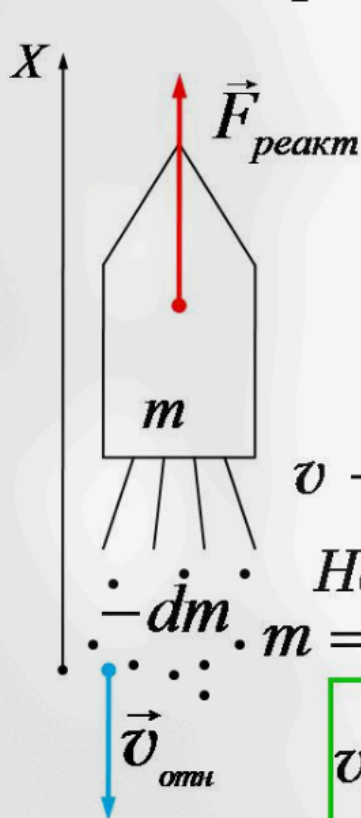
при $m = m_0$; $v = 0$

$$0 = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + v_{\text{отн}} \cdot \ln m_0$$

$$v = v_{\text{отн}} \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}$$

Уравнение Мещерского



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{реакт}} + \vec{F}_{\text{внешн}}$$

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} - mg$$

$$m \cdot d(v + gt) = -v_{\text{отн}} \cdot dm$$

$$v + gt = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + \text{const}$$

Начальные условия:

$$m = m_0; v = 0 \Rightarrow \text{const} = v_{\text{отн}} \ln m_0$$

$$v = v_{\text{отн}} \cdot \ln \frac{m_0}{m} - gt$$

Лекция 5. Работа. Мощность. Энергия.

Элементарная механическая работа



$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F_\tau dl$$

F_τ - проекция силы на направление
перемещения точки её приложения

$$[A] = \text{Дж}$$

Элементарной работой δA силы $\vec{F}$ на малом перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение $\vec{F}$ на $d\vec{r}$.

Работой A , совершаемой силой $\vec{F}$ на конечном участке траектории точки ее приложения, называется алгебраическая сумма элементарных работ этой силы на всех малых частях этого участка.

Полная механическая работа

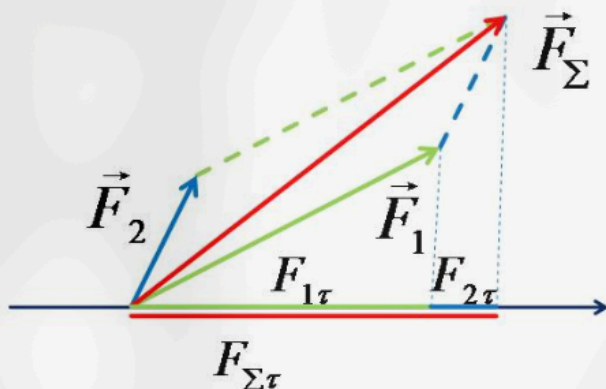
$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_\tau dl$$

Материальная точка движется вдоль оси Ox . Вычислим работу действующей на неё силы по графику зависимости $F_x(x)$.



$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Сумма работ всех сил,
приложенных к телу, равна
работе равнодействующей.



$$\delta A = F_{\Sigma\tau} dl = (F_{1\tau} + F_{2\tau}) dl = \delta A_1 + \delta A_2$$

Мгновенная мощность силы

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = F_{\tau} \cdot v$$

$$[N] = \text{Вт}$$

Мощностью (мгновенной мощностью) силы называется скалярная физическая величина N , равная отношению элементарной работы этой силы δA к малому промежутку времени dt , в течение которого эта работа совершается.

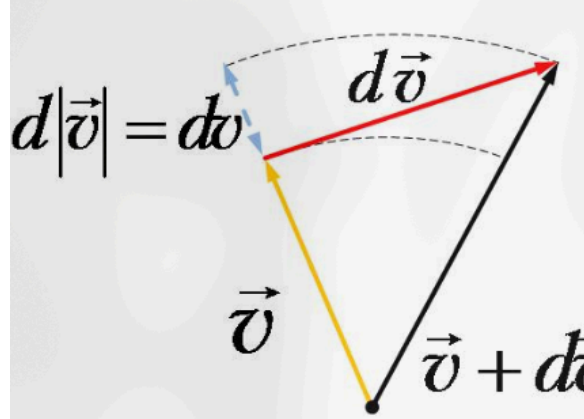
Средняя мощность силы

Средней мощностью силы в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется физическая величина $N_{\text{ср}}$, равная отношению работы A , совершаемой этой силой за промежуток времени Δt к его продолжительности.

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t}$$

Кинетической энергией тела называется энергия его механического движения.

Теорема о кинетической энергии



$$d|\vec{v}| = dv$$

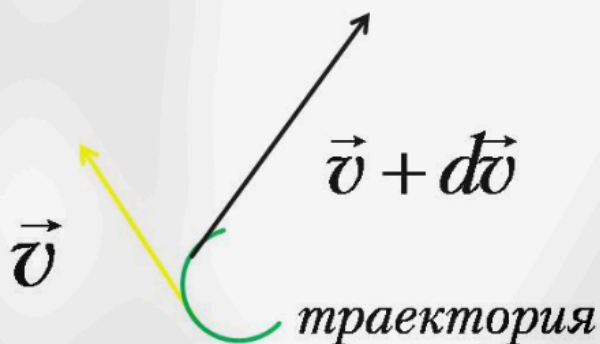
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m d\vec{v}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\delta A = m d\vec{v} \vec{v}$$

$$d\vec{v} \vec{v} = d|\vec{v}| v = dv \cdot v$$

Рисунок для тех, кто не понял, как движется точка.



$$\delta A = mv dv$$

$$A = \int_I^{II} mv \, dv = \frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{mv_I^2}{2} = \Delta E_K$$

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

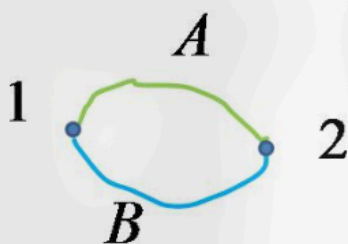
Сумма работ всех сил, приложенных к телу, равна приращению кинетической энергии тела.

Консервативные силы.

Стационарным называют поле, остающееся постоянным во времени.

Консервативными называют силы, работа которых при перемещении частицы из одной точки в другую не зависит от пути между этими точками.

Силы поля являются консервативными, если в стационарном случае их работа на любом замкнутом пути равна нулю.



$$A_{1A2} = A_{1B2}$$

$$A_{2B1} = -A_{1B2}$$

$$A_{\text{замкн}} = A_{1A2} + A_{2B1} = 0$$

Диссипативными называются силы, суммарная работа которых при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна.

Гироскопическими называются силы, зависящие от скорости материальной точки, на которую они действуют, и направленные перпендикулярно к этой скорости. (Эти силы не могут совершать работы.)

Центральные силы

Центральными называют силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами, и направленные по прямой, проходящей через эти частицы.

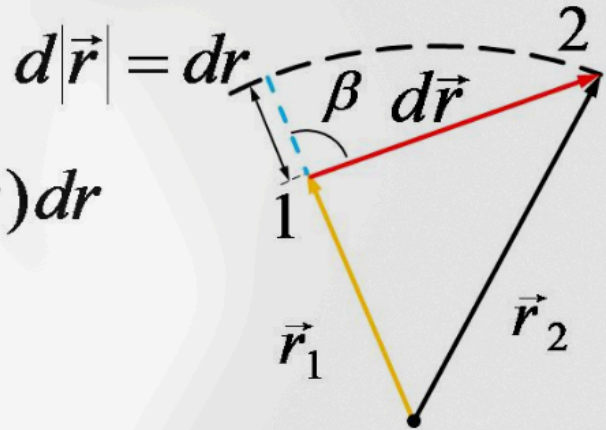
$$\vec{F} = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Все центральные силы являются консервативными

$$\vec{F} = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \pm F(r) dr$$

$$A = \pm \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$

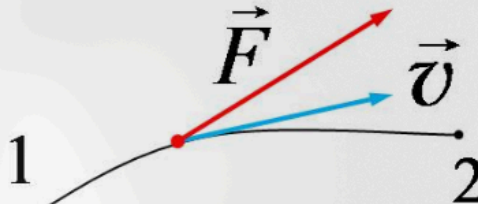


Полученное выражение зависит только от вида функции $F(r)$ (характер взаимодействия) и от начального r_1 и конечного r_2 расстояния от частицы до силового центра и не зависит от пути.

Потенциальной энергией частицы называется энергия зависящая от ее положения в потенциальном поле.

Потенциальной энергией системы частиц называется часть энергии механической системы, зависящая только от ее конфигурации, т.е. от взаимного расположения всех частиц системы и от их положения во внешнем потенциальном поле.

Потенциальная энергия частицы в поле

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r}$$


Поскольку работа консервативной силы не зависит от пути, а зависит только от начальных и конечных координат частицы, существует скалярная функция координат, такая, что работа равна разности значений этой функции.

Потенциальная энергия. $U = U(\vec{r})$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Работа сил поля на пути 1-2 равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле. Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной (не зависящей от $\vec{r}$) постоянной.

Потенциальная энергия и сила поля.

$$-dU = \delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_{\tau} dl$$

$F_{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial l}$ Знак частной производной указывает на то, что производная берется по определенному направлению

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } U = -\nabla U$$

Векторный дифференциальный оператор набла

$$\nabla C = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)C = \text{grad } C$$

Напряженность и потенциал силового поля.

Выделим величину, характеризующую частицу, находящуюся в силовом поле (q, m) . Останутся величины, характеризующие само поле – напряженность и потенциал.

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad U = q\varphi$$

$\vec{E}$ – силовая характеристика поля

φ – энергетическая характеристика поля

Связь напряженности и потенциала

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } \varphi$$

Напряженность поля направлена в сторону наибо́льшего убывания его потенциала.

$$E_\tau = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0$$

Линии напряженности направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

Силовое поле можно задать двумя способами:

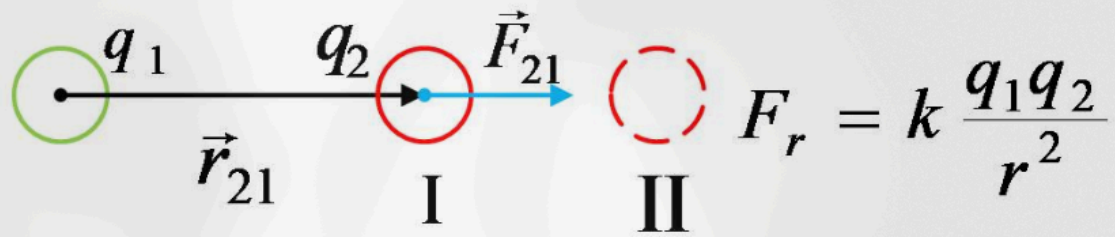
1. Указать значение потенциала в каждой точке

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } \varphi$$

2. Указать значение напряженности в каждой точке

$$\varphi = - \int E_r dr$$

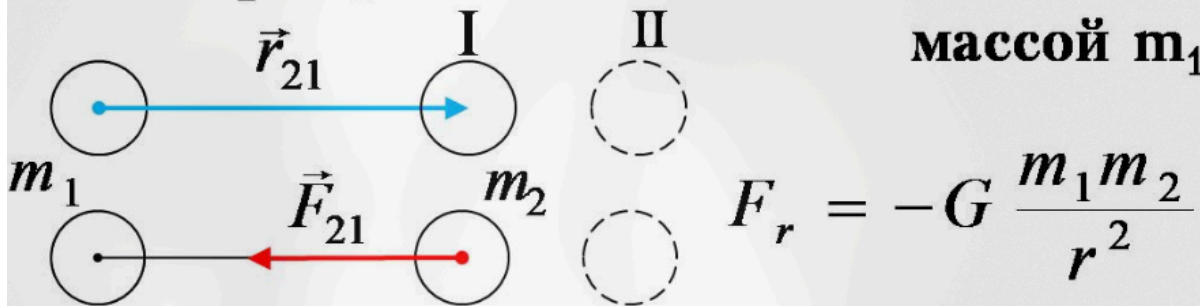
Потенциальная энергия заряда q_2 в электрическом поле заряда q_1



$$A = \int_{r_I}^{r_{II}} k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k \frac{q_1 q_2}{r_I} - k \frac{q_1 q_2}{r_{II}} = U_I - U_{II}$$

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r} + const \quad \varphi_1 = k \frac{q_1}{r} + const$$

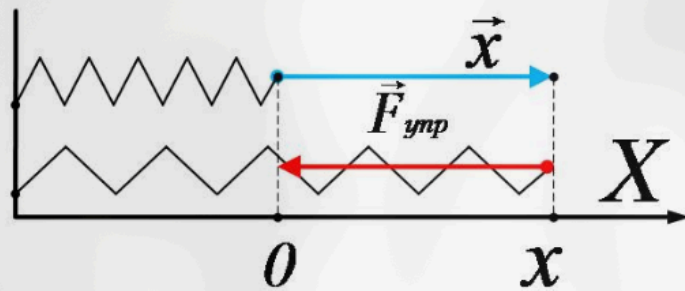
Потенциальная энергия частицы массой m_2 в гравитационном поле частицы массой m_1



$$A = - \int_{r_I}^{r_{II}} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G \frac{m_1 m_2}{r_I} - (-G \frac{m_1 m_2}{r_{II}}) = U_I - U_{II}$$

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r} + const \quad \varphi_1 = -G \frac{m_1}{r} + const$$

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

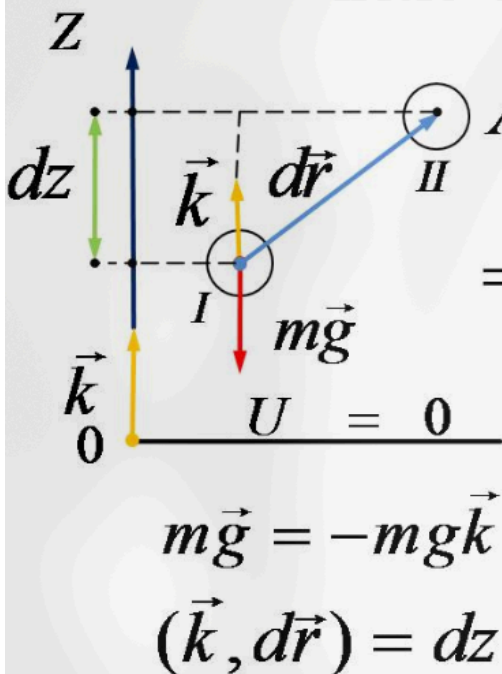


$$F_x = -kx$$

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = k \frac{x_1^2}{2} - k \frac{x_2^2}{2} = U_I - U_{II}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести



$$A = - \int_I^{II} mg \vec{k} d\vec{r} = - \int_{z_I}^{z_{II}} mg dz =$$

$$= mgz_I - mgz_{II} = U_I - U_{II}$$

$$U = mgz + const$$

$$\varphi = gz + const$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

$$(\vec{k}, d\vec{r}) = dz$$

Полная механическая энергия частицы в поле

Полной механической энергией частицы в поле называют сумму ее кинетической и потенциальной энергии.

$$E_{\text{полн. мех.}} = E_K + U$$

$$\Delta E_K = A_{\text{консервативных сил}} + A_{\text{сторонних сил}}$$

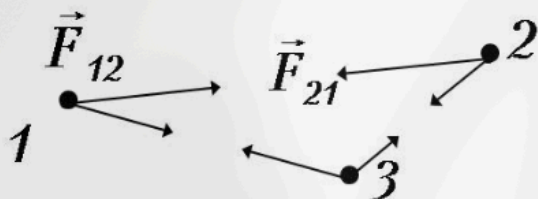
$$A_{\text{конс.}} = -\Delta U$$

$$\Delta E_{\text{полн. мех.}} = \Delta(E_K + U) = A_{\text{сторонних сил}}$$

Приращение **полной механической энергии** частицы на некотором пути равно алгебраической сумме работ всех **сторонних сил**, действующих на частицу на этом пути.



Собственная потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц



$$U_{\text{соб}} = \frac{1}{2} \sum_i U_i$$

$$U_{\text{соб}} = \frac{U_{12} + U_{21}}{2} + \frac{U_{13} + U_{31}}{2} + \frac{U_{23} + U_{32}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} [(U_{12} + U_{13}) + (U_{21} + U_{23}) + (U_{31} + U_{32})] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i U_i$$

Здесь U_i — потенциальная энергия взаимодействия i частицы со всеми остальными частицами системы

Собственная механическая энергия системы взаимодействующих частиц

$$E_{\text{собств}} = E_K + U_{\text{собств}}$$

Собственной механической энергией системы взаимодействующих частиц называют сумму ее кинетической и собственной потенциальной энергии.

$$\Delta E_K \text{ системы} = A_{\text{внешних консервативных и неконсервативных сил}} + A_{\text{консервативных внутренних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$

$$A_{\text{консервативных внутренних сил}} = -\Delta U_{\text{соб.}}$$

$$\Delta(E_K + U_{\text{соб}}) = A_{\text{внешних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$

Закон сохранения собственной механической энергии:

Собственная механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой нет диссипативных сил, сохраняется в процессе движения.

Если в замкнутой системе частиц действуют диссипативные силы:

$$\Delta E_{\text{собств}} = A_{\text{диссипативных внутренних сил}} < 0$$

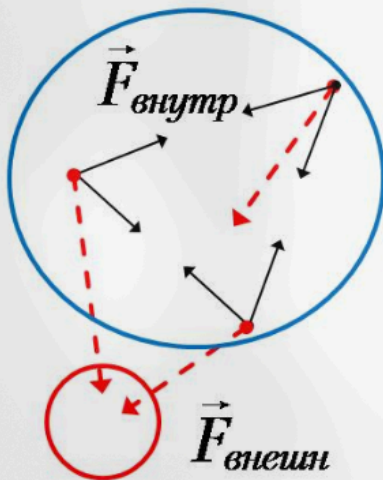
Часть собственной механической энергии переходит во внутреннюю.

Универсальный закон сохранения энергии

Энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи.

**Полная механическая энергия системы
взаимодействующих частиц во внешнем поле
консервативных сил**

$$\Delta(E_{\text{соб}} + U_{\text{внешн}}) = A_{\text{сторонних внешних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$



Закон сохранения полной механической энергии системы, находящейся во внешнем поле консервативных сил: если на систему частиц не действуют внешние сторонние силы и нет внутренних диссипативных сил, то полная механическая энергия системы остаётся постоянной.

Теория соударений.

Ударом называется столкновение тел, при котором за весьма малый промежуток времени происходит значительное изменение скоростей тел.

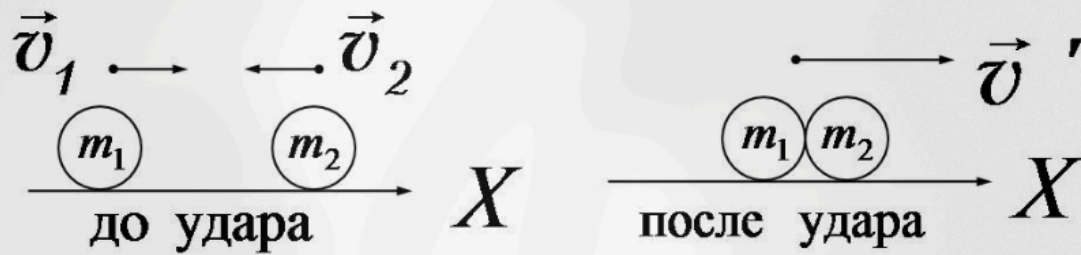
Линией удара называется общая нормаль, проведенная к поверхностям двух соприкасающихся тел в месте их соприкосновения при ударе.

Удар называется **центральный**, если в момент удара центры масс сталкивающихся тел находятся на линии удара.

Удар двух тел называется **абсолютно упругими**, если при этом ударе полная механическая энергия системы не изменяется.

Удар двух тел называется **абсолютно неупругим**, если после удара оба тела движутся как одно целое.

Абсолютно неупругий удар



Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}'$$

Часть полной механической энергии системы переходит во внутреннюю:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} + Q$$

Скорость центра масс системы не изменяется:

$$\vec{v}'_c = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_c$$

В системе отсчета, связанной с центром масс.

$$\tilde{v}_1 = v_1 - v_c = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad \tilde{v}_2 = \frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

До удара $\tilde{p}_1 = -\tilde{p}_2$, после удара $\tilde{p}' = 0$

Закон сохранения импульса: $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = 0$

Суммарная кинетическая энергия частиц целиком переходит во внутреннюю:

$$\frac{m_1 m_2^2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2 = Q$$

Абсолютно упругий удар



Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (1)$$

Закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (2)$$

$$m_1 v_{1x} - m_1 v_{1x}' = m_2 v_{2x}' - m_2 v_{2x} \quad (3)$$

$$m_1 (v_{1x}^2 - v_{1x}'^2) = m_2 (v_{2x}'^2 - v_{2x}^2) \quad (4)$$

$$v_{1x} + v_{1x}' = v_{2x}' + v_{2x} \quad (5)$$

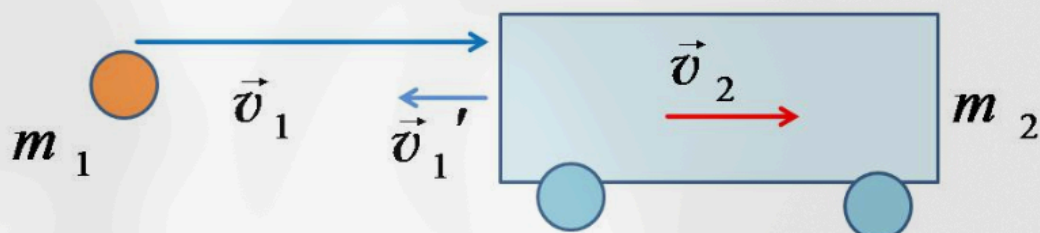
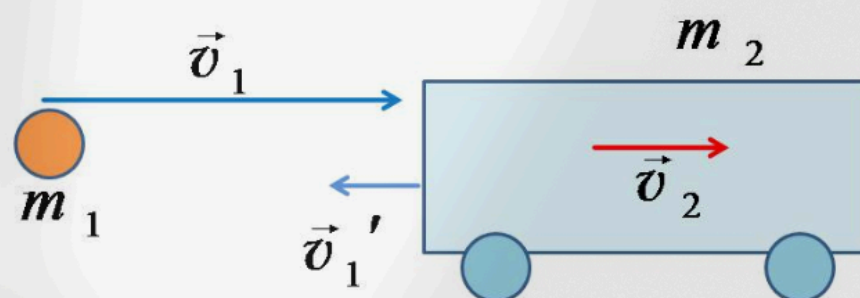
Из уравнений (3) и (5) определяем:

$$v_{1x}' = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2x}' = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

Пример. Мяч, летящий со скоростью $\vec{v}_1$ ударяется о вагон, движущийся в том же направлении со скоростью $\vec{v}_2$. Вычислите скорость мяча относительно земли после удара.

$$v_1 = 8 \text{ м / с}, v_2 = 3 \text{ м / с}.$$



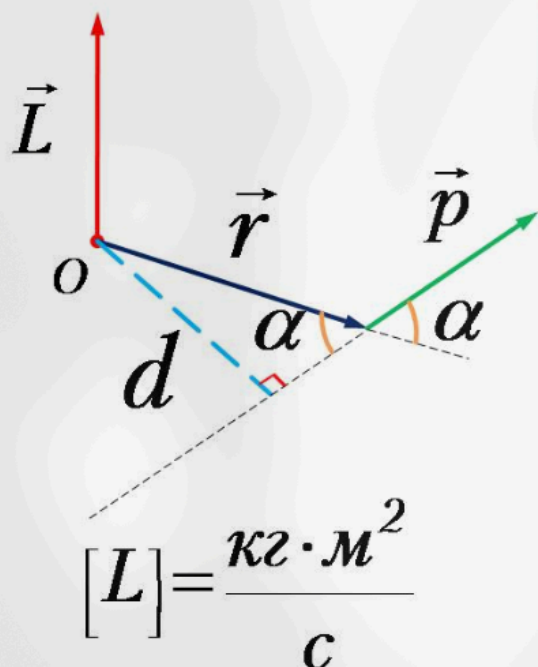
$$v'_{1x} = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2} \approx$$

$$\approx 2v_{2x} - v_{1x} = -2 \text{ м / с}$$

$$v'_{1x} - v_{2x} = -(v_{1x} - v_{2x})$$

Скорость мяча относительно вагона до удара равна по модулю скорости мяча относительно вагона после удара

Момент импульса частицы относительно точки



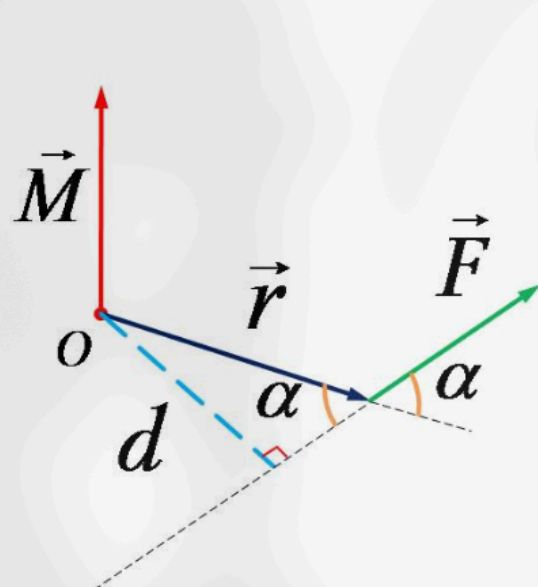
$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$|\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}) = p \cdot d$$

d – плечо импульса $\vec{p}$ относительно точки O .

$$[L] = \frac{\kappa \mathcal{L} \cdot \mathcal{M}^2}{c}$$

Момент силы относительно точки



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$|\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{F}}) = F \cdot d$$

d – плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O .

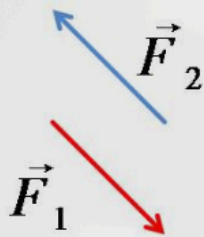
$$[M] = H \cdot \mathcal{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v}, \vec{p}] + [\vec{r}, \vec{F}]$$

Закон динамики вращения частицы вокруг точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Пара сил



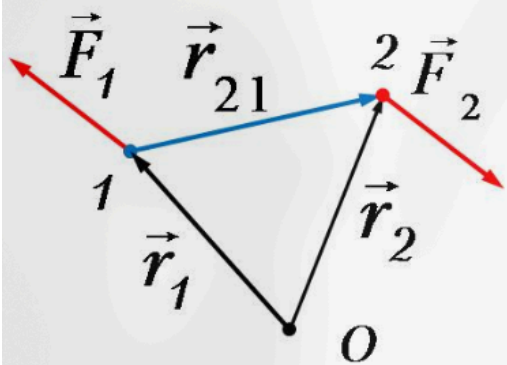
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Две параллельные силы, равные по модулю и противоположные по направлению, образуют **пару сил**.

Это вспомогательное определение, поэтому встречаются разночтения- в учебнике Савельева И.В. силы, образующие пару, **не должны быть направлены вдоль одной прямой**.

Момент пары сил

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

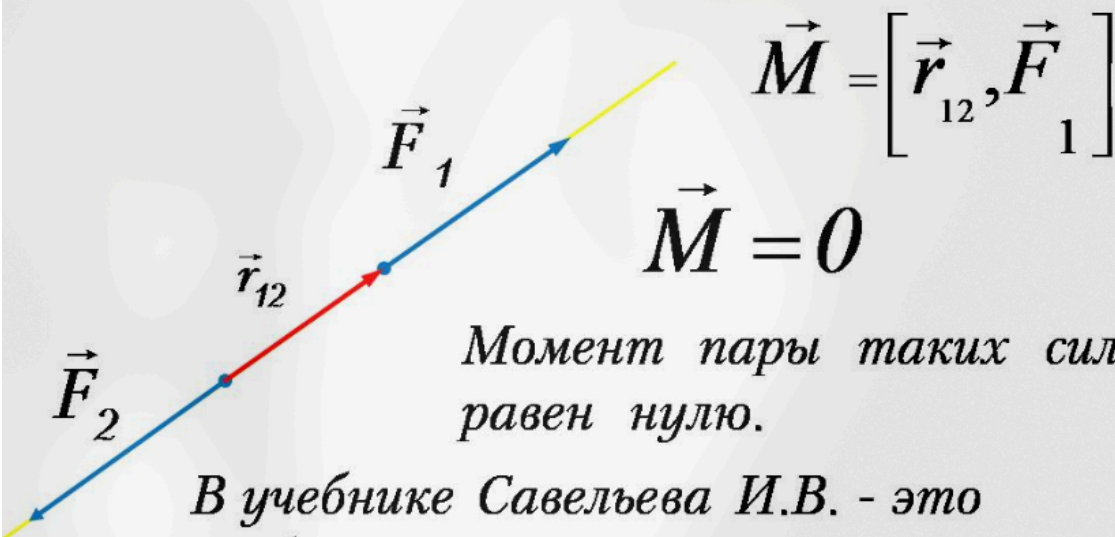


$$\begin{aligned}\vec{M} &= [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = \\ &= [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_1] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \vec{F}_2] = \\ &= [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1] = [\vec{r}_{21}, \vec{F}_2]\end{aligned}$$

1) Момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой.

2) Величина момента пары сил не зависит от положения точки начала отсчёта O . ⁶

Если силы направлены вдоль одной прямой



$$\vec{M} = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1]$$

$$\vec{M} = 0$$

Момент пары таких сил равен нулю.

В учебнике Савельева И.В. - это вообще не пара сил. Но момент равен нулю, а остальное не важно. ⁷

Вращение системы материальных точек вокруг точки. Уравнение моментов.

$$\vec{L}_{\text{системы}} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{\text{внутренних сил}} + \sum_i \vec{M}_{\text{внешних сил}} = \sum_i \vec{M}$$

По 3 закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$

Внутренние силы направлены вдоль одной прямой. Их $\vec{M}_{\Sigma} = 0$

Вращение твердого тела вокруг точки

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

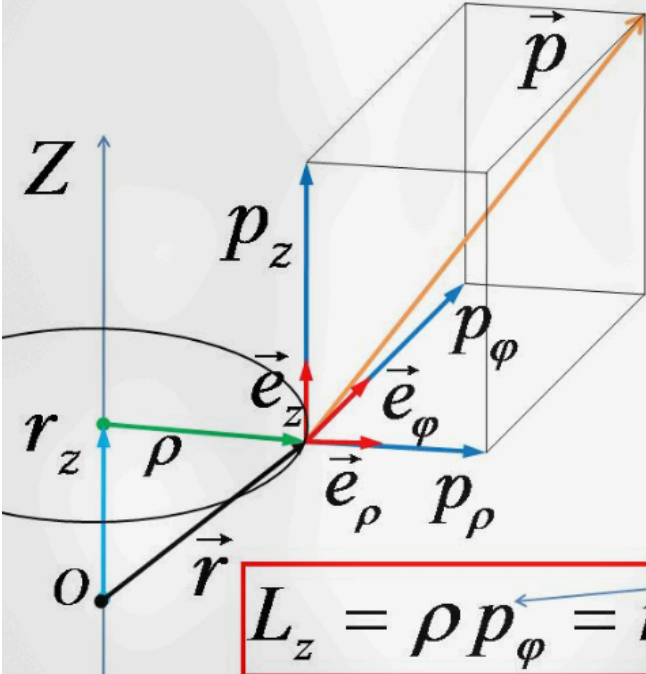
Закон динамики вращательного движения.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{\text{внешних сил}}$$

Момент импульса частицы относительно оси.

Момент импульса частицы относительно оси равен проекции момента импульса частицы относительно любой из точек оси на эту ось.

Момент импульса частицы относительно оси



$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + r_z \vec{e}_z$
 $\vec{p} = p_\rho \vec{e}_\rho + p_\phi \vec{e}_\phi + p_z \vec{e}_z$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & r_z \\ p_\rho & p_\phi & p_z \end{vmatrix}$$

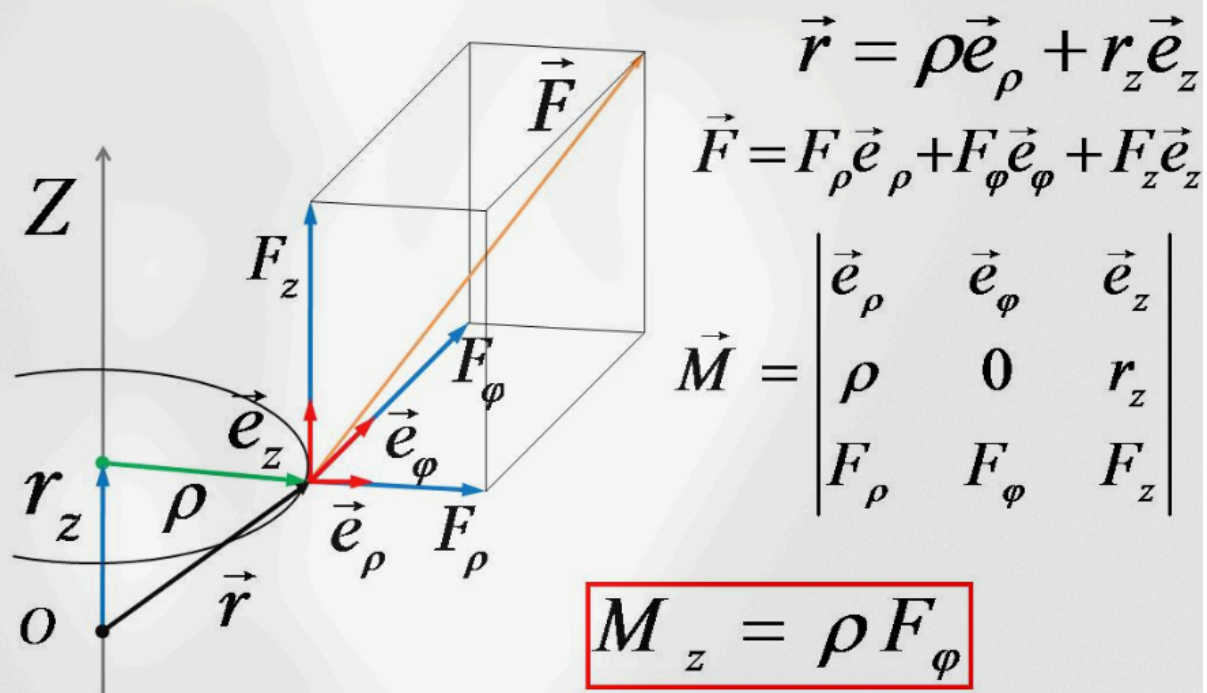
$$L_z = \rho p_\phi = m \rho^2 \omega_z$$

$v_\phi = \rho \omega_z$

Момент силы, действующий на частицу, относительно оси.

Момент силы относительно оси равен проекции момента силы относительно любой из точек оси на эту ось.

Момент силы, действующий на частицу, относительно оси.



При вращении материальной точки вокруг неподвижной оси

$$L_z = \rho p_\phi = m \rho^2 \omega_z \quad M_z = \rho F_\phi$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \rho \frac{dp_\phi}{dt} = \rho F_\phi = M_z$$

2 Закон Ньютона

$$\frac{dL_z}{dt} = m \rho^2 \frac{d\omega_z}{dt} = m \rho^2 \varepsilon_z = M_z$$

Основной закон динамики вращательного движения.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Полученные выше уравнения справедливы для каждой из точек твердого тела. Но необходимо помнить о том, что внутренние сил (силы

взаимодействия частей тела) образуют пары. Моменты пар внутренних сил равны нулю. Момент импульса твердого тела может изменяться под действием только внешних сил.

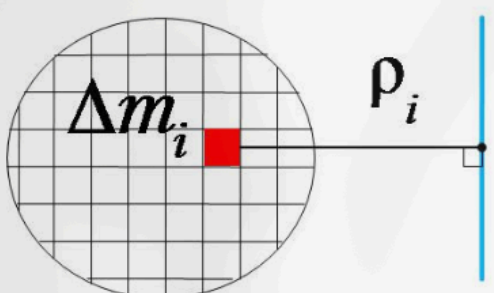
Для каждой из точек твердого тела закон динамики вращательного движения

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad m\rho^2\varepsilon_z = M_z$$

Для всех точек твердого тела значения ω_z и ε_z одинаковы.

Произведения $m\rho^2$ для всех точек различны. Просуммируем эти значения для всех точек твердого тела (получим момент инерции), тогда можно будет записать закон динамики вращательного движения для всего твердого тела.

Момент инерции твёрдого тела



Момент инерции твёрдого тела равен сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояния до оси вращения.

$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot \rho_i^2$$

$$I = \int_M \rho^2 \cdot dm$$

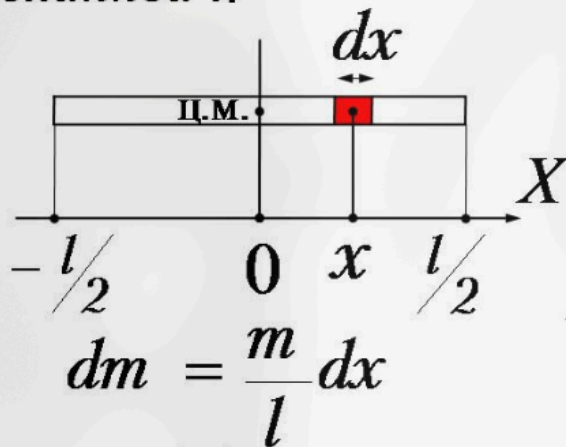
$$I = \int_V \tilde{\rho}_{\text{плотн}} \rho^2 dV$$

17

I_0

Центральный момент инерции момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Пример: Вычислим I_0 стержня массой m и длиной l .



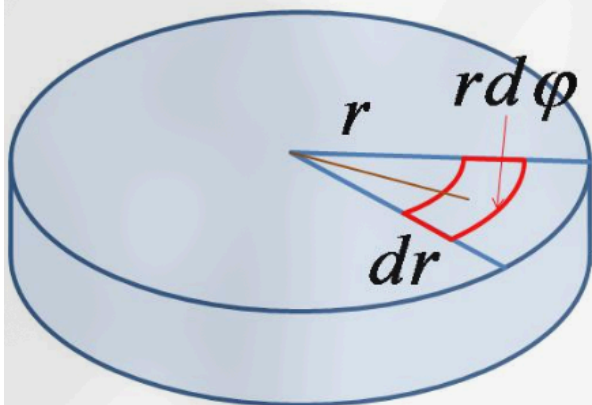
$$I = \int_M \rho^2 \cdot dm$$

$$I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx =$$

$$\frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m l^2}{12}$$

19

Пример: Вычислим I_0 диска массой m и радиусом R .



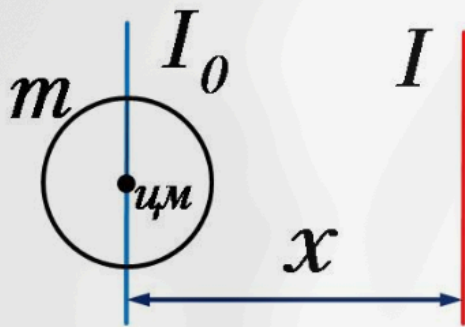
$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r d\varphi dr$$

$$I_0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{m}{\pi R^2} r^3 d\varphi dr$$

$$I_0 = \frac{2\pi m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{m R^2}{2}$$

20

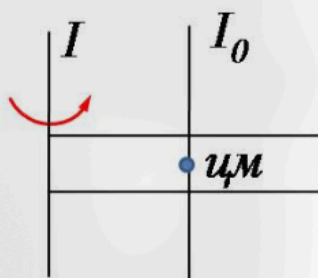
Теорема Штейнера



$$I = I_0 + mx^2$$

Момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме центрального момента инерции относительно параллельной оси и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пример: Вычислим I стержня массой m и длиной l при вращении его относительно оси, проходящей через его конец.



$$I = I_0 + mx^2$$

Центральный
момент
инерции

$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

$$I = I_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Центральные моменты инерции

Стержень массой m и длиной l



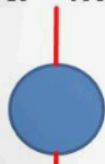
$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

Диск (цилиндр) массой m и радиусом R



$$I_0 = \frac{mR^2}{2}$$

Шар массой m и радиусом R



$$I_0 = \frac{2mR^2}{5}$$

23

Тонкое кольцо массой m и радиусом R



$$I_0 = mR^2$$

Широкое кольцо массой m с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 .

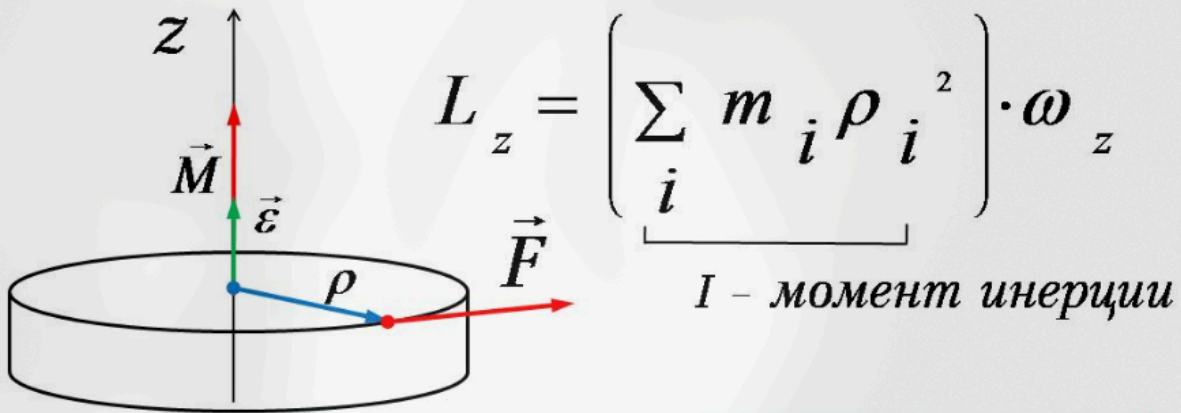


$$I_0 = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\varphi$$

$$I_0 = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

24

Закон динамики вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

внешн

25

Закон динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси связывает скалярные величины.

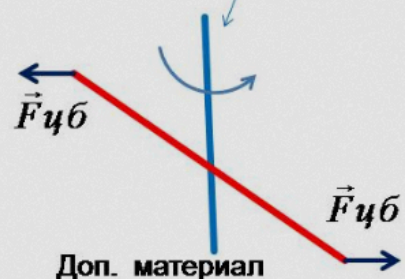
$$M_{z \text{ внешн}} = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

Однако, для каждого твердого тела есть особые оси (они называются главными) при вращении относительно которых тот закон можно записывать в векторном виде. (Просто L_z направлен вдоль оси вращения.)

Для любого твёрдого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, направление которых в пространстве остаётся неизменным без действия на них каких-либо внешних сил – главные оси. (Другие оси нужно удерживать) В простейших случаях это оси симметрии тела.

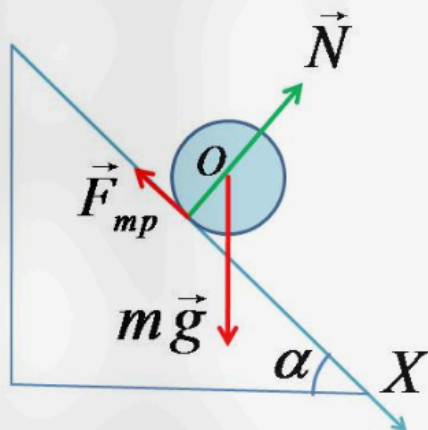
Для главных осей:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad \vec{M}_{\text{внешн}} = I \cdot \vec{\epsilon}$$



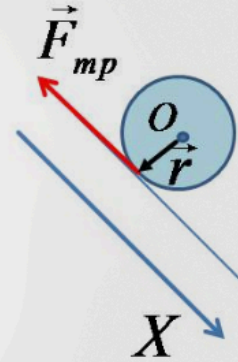
Вы будете решать самые простые задачи только про вращение твердых тел вокруг их главных осей, поэтому не удивляйтесь, если увидите в учебнике этот закон записанным в векторном виде.

Пример. Цилиндр массой m и радиусом R скатывается с горки, составляющей угол α с горизонтом. Вычислите ускорение цилиндра.



Будем рассматривать вращение вокруг оси, проходящей через центр масс O . Отличен от нуля только момент силы трения.

1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z , проходящую через O и направленную за плоскость рисунка.



$$I_0 \varepsilon = R F_{mp} \quad \frac{mR^2}{2} \varepsilon = R F_{mp} \quad (1)$$

2) Закон динамики поступательного движения центра масс. В проекции на ось X .

$$ma = mg \sin \alpha - F_{mp} \quad (2)$$

30

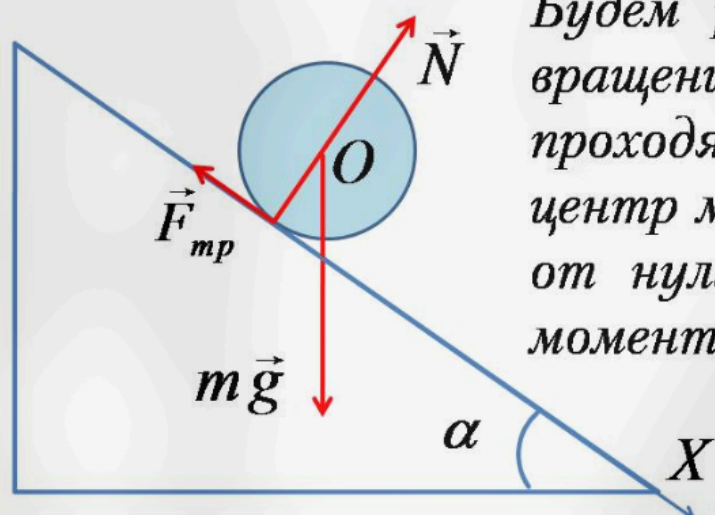
3. Связь линейного и углового ускорений.

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1) и (3) $\frac{ma}{2} = F_{mp} \quad (4)$

Из (2) и (4) $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$

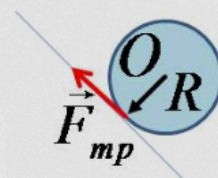
Пример: Цилиндр массой m и моментом инерции I_0 скатывается с горки длиной S , составляющей угол α с горизонтом. Вычислите время скатывания.



Будем рассматривать вращение вокруг оси, проходящей через центр масс O . Отличен от нуля только момент силы трения.

32

1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z , проходящую через точку O и направленную за плоскость рисунка.



$$I_0 \varepsilon = R F_{tr} \quad (1)$$

2) Закон динамики поступательного движения центра масс. В проекции на ось X .

$$m a = m g \sin \alpha - F_{tr} \quad (2)$$

3) Связь линейного и углового ускорений.

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

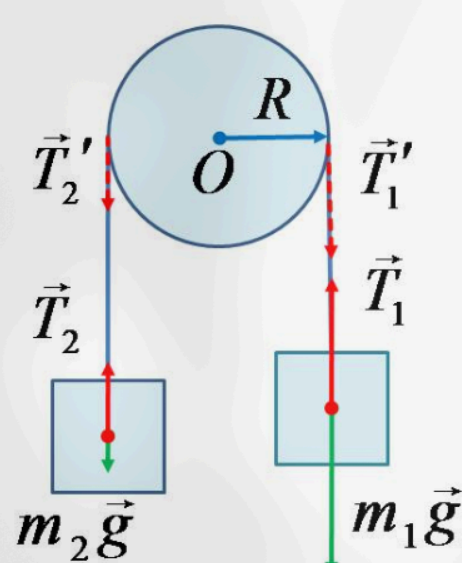
33

Из (1), (2) и (3)

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I_0}{R^2}} \quad t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$$

Чем больше момент инерции цилиндра, тем больше время скатывания.

Пример. Грузы массами m_1 и m_2 связаны нитью, перекинутой через блок массой m и радиусом R . Вычислите ускорение грузов и силы натяжения нитей.



1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z, проходящую через точку O и направленную за плоскость рисунка.

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$(T_1' - T_2')R = I\varepsilon \quad (1)$$

2. Закон динамики поступательного движения грузов. В проекции на ось X.

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = -m_2 g + T_2$$

3. Связь линейного и углового ускорений.

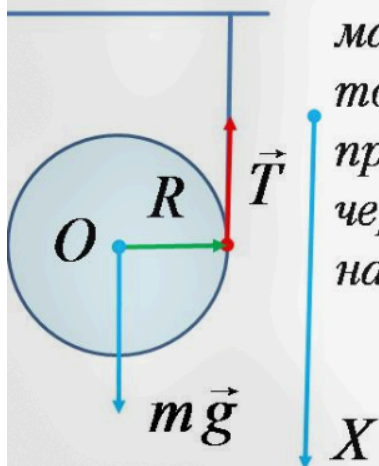
$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3).

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} \quad (4)$$

Из (2) и (4) определяем T_1 и T_2 .

Пример. На цилиндр, массой m и радиусом R намотана нить. Конец нити закреплён на потолке. Определите ускорение, с которым цилиндр будет опускаться.



1) Закон динамики вращательного движения. Относительно центра масс вращающий момент создаёт только сила натяжения нити T проекции на ось Z , проходящую через точку O и направленную к нам.

$$M = I\varepsilon \quad (1)$$

38

$$TR = \frac{mR^2}{2}\varepsilon \quad (1)$$

2. Закон динамики поступательного движения цилиндра. В проекции на ось X .

$$ma = mg - T \quad (2)$$

3. Связь линейного и углового ускорений.

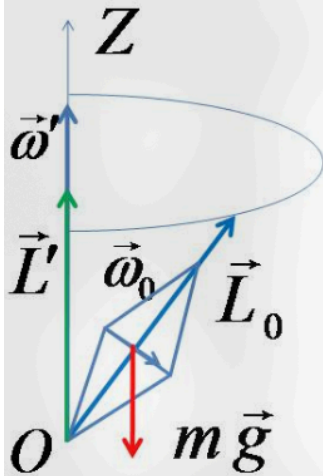
$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1) и (3). $T = \frac{ma}{2} \quad (4)$

Из (2) и (4). $a = \frac{2}{3}g$

Теория гироскопа.

Гироскопом называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вокруг своей оси симметрии, называемой осью фигуры гироскопа. Обычно одна из точек оси фигуры закреплена. (Точка O)



$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}' \approx \vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}_0$$

$\vec{L}_0$ - момент импульса вращения вокруг оси симметрии

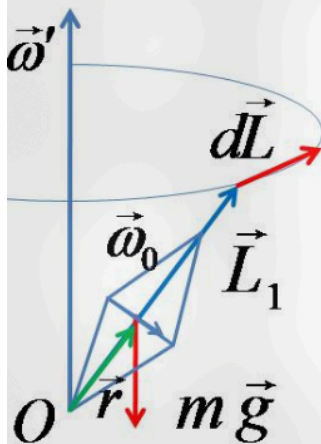
$\vec{L}'$ - момент импульса вращения вокруг оси Z

Доп. материал ⁴¹

Сила тяжести создаёт вращающий момент относительно точки O .

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

$$d\vec{L} \perp \vec{L}$$



Из-за этого ось гироскопа описывает конус - совершает прецессию.

демонстрация

Доп. материал ⁴²

Угловая скорость прецессии.

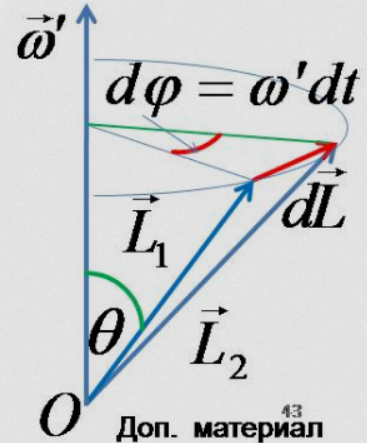
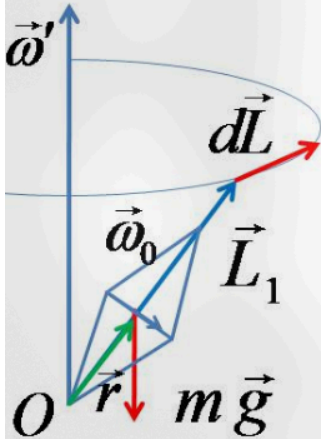
$$d\vec{L} = \vec{M} dt \quad (1)$$

$$dL = L \sin \theta \cdot \omega' dt \quad d\vec{L} = [\vec{\omega}', \vec{L}] dt \quad (2)$$

Из (1) и (2)

$$[\vec{\omega}', \vec{L}] = \vec{M}$$

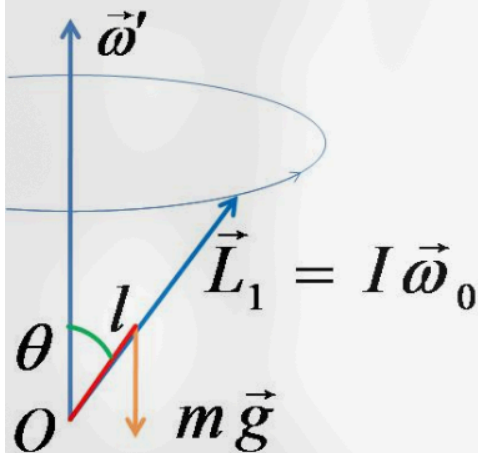
Момент силы
определяет
угловую скорость
прецессии.



$$[\vec{\omega}', \vec{L}] = \vec{M}$$

$$\omega' I \omega_0 \sin \theta = mgl \sin \theta$$

$$\omega' = \frac{mgl}{I \omega_0}$$

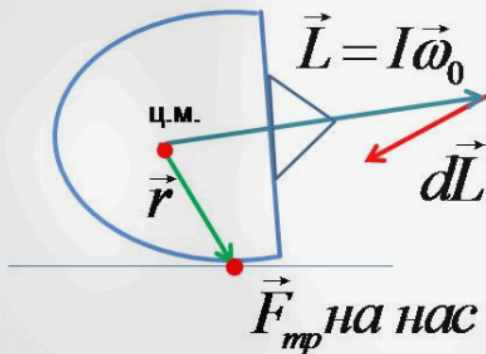


При уменьшении угловой
скорости вращения волчка
вокруг своей оси ω_0
угловая скорость
прецессии ω' возрастает.

демонстрация

Китайский волчок.

Момент силы трения относительно центра масс заставляет волчок переворачиваться на ножку.

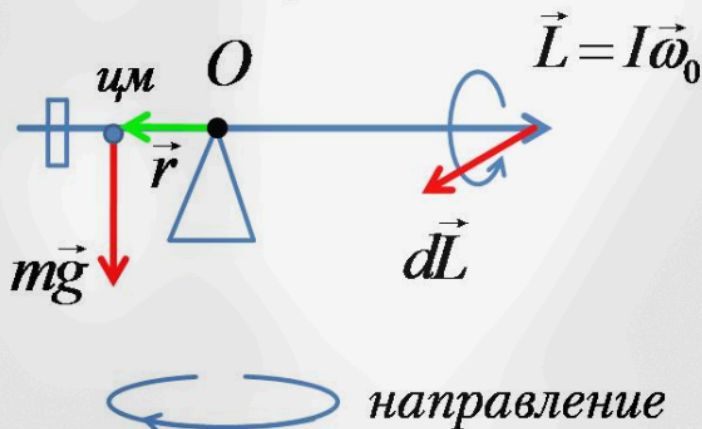


демонстрация

Доп. материал ⁴⁵

Гироскоп, у которого можно изменять положение центра масс.

Направление прецессии изменяется на противоположное при перемещении центра масс за точку O .



Доп. материал ⁴⁶

Закон сохранения момента импульса

1. Классическая механика. Запишем уравнение моментов при вращении материальной точки относительно точки $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Если $\vec{M}$, то $\vec{L} = \text{const}$

При вращении материальной точки вокруг неподвижной оси

Закон динамики вращательного движения

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Если $M_z = 0$, то

$$L_z = \text{const}$$

$$m\rho^2\omega_z = \text{const}$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Закон динамики вращательного движения

$$M_{z \text{ внешних сил}} = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

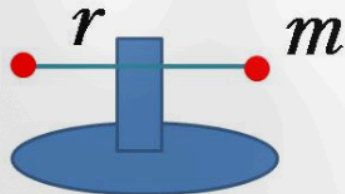
Если $M_{z \text{ внешних сил}} = 0$

$$L_z = I\omega_z = \text{const}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

2. Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы.

Пример. Человек стоит на скамейке Жуковского и держит в вытянутых руках на расстоянии r от оси вращения гири. Момент инерции человека и скамейки I , масса каждой гири равна m , угловая скорость вращения скамейки равна ω_0 . Какой будет угловая скорость вращения скамейки, если человек прижмёт гири к груди?

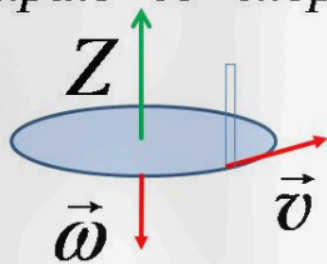


$$L_z = I_{\Sigma} \omega_z = \text{const}$$

$$(I + 2mr^2) \omega_0 = I \omega$$

51

Пример. Человек стоит на краю диска массой M и радиусом r . Момент инерции человека относительно оси диска равен I . С какой угловой скоростью ω будет вращаться диск, если человек пойдёт по его краю со скоростью v относительно диска.



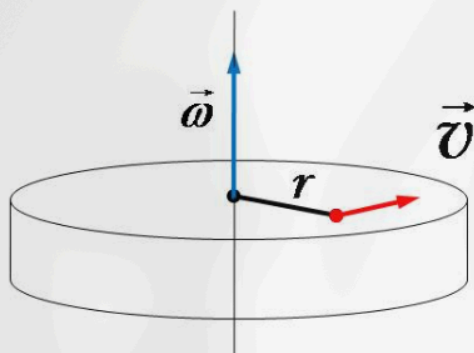
Закон сохранения момента импульса запишем в ис-земля.

$$0 = I \left(\frac{v}{r} - \omega \right) - \frac{Mr^2}{2} \omega$$

Угловая скорость человека относительно земли

52

Кинетическая энергия вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



Угловая скорость всех точек твёрдого тела одинакова.

$$v_i = \omega r_i$$

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\sum_i (m_i r_i^2) \omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}$$

Работа внешней силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

По теореме о кинетической энергии

$$\delta A = d \left(\frac{I \omega^2}{2} \right) = d \left(\frac{I \omega_z^2}{2} \right) = \omega_z \underbrace{I d \omega_z}_{M_z dt}$$

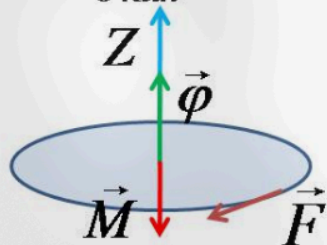
$$\delta A = M_z \omega_z dt = M_z d\varphi$$

$$A = \int_0^{\varphi \text{ конечн}} M_z d\varphi$$

Пример. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна E . Под действием постоянного тормозящего момента маховик останавливается, сделав n оборотов. Определить момент силы торможения.

$$A = \int_0^{\varphi_{\text{конечн}}} M_z d\varphi$$

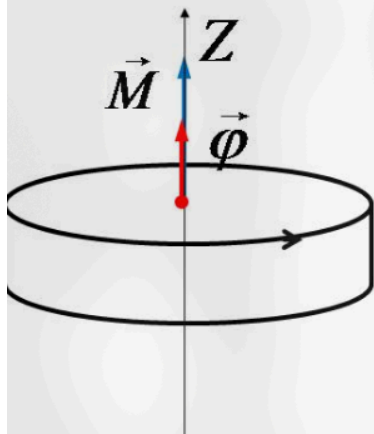
$$-E_{0\text{ кин}} = \Delta E_{\text{кин}} = A = M_z \varphi_{\text{конечн}} = -M \varphi_{\text{конечн}}$$



$$M = \frac{E_{0\text{ кин}}}{\varphi_{\text{конечн}}} = \frac{E_{0\text{ кин}}}{2\pi n}$$

55

Пример. Якорь мотора делает n оборотов в секунду. Определить вращающий момент, если мощность мотора равна N .



$$\partial A = M_z d\varphi$$

$$\underline{N} = \frac{\partial A}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = \underline{M_z \omega}$$

$$\omega = 2\pi n$$

$$M_z = \frac{N}{2\pi n}$$

Пример. Человек стоит на краю неподвижной карусели радиусом r и ловит мяч, летящий по касательной к карусели со скоростью v . Момент инерции человека $I_{\text{ч}}$, момент инерции карусели $I_{\text{к}}$. С какой угловой

скоростью начнет вращаться карусель? Как уменьшится кинетическая энергия карусели?

$$mvr = (mr^2 + I_k + I_{\text{ч}})\omega$$

$$E_{k1} - E_{k2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(mr^2 + I_k + I_{\text{ч}})\omega^2}{2} > 0$$

Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$$

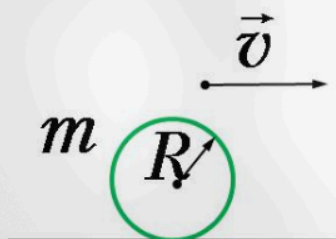
v_c – скорость движения центра масс

ω – угловая скорость вращения твердого тела, вокруг оси, проходящей через центр масс.

I_0 – центральный момент инерции твердого тела

Пример: Однородный шар массой m и радиусом R катится со скоростью v . Вычислите его кинетическую энергию.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10}mv^2$$



Задание. Вычислите центральный момент инерции шара

Лекция 7. Специальная теория относительности.

Постулаты Эйнштейна

I. Принцип относительности:

Все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета; все законы природы и уравнения, их

описывающие, инвариантны, т. е. не меняются, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Другими словами, все инерциальные системы отсчета эквивалентны (неразличимы) по своим физическим свойствам; никакими опытами нельзя выделить одну из них как предпочтительную.

II. Принцип инвариантности скорости света:

Скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях. Это значит, что скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Равенство поперечных размеров тел

The diagram shows two Cartesian coordinate systems, K and K' , sharing a common horizontal axis labeled X, X' . The origin of K is O and the origin of K' is O' . The vertical axis of K is Y and the vertical axis of K' is Y' . A horizontal arrow labeled $\vec{V}$ points from O towards O' , indicating the relative velocity of K' with respect to K . Two vertical gray bars are shown: one in frame K with height y and base at O , and another in frame K' with height y' and base at O' . The bars are positioned such that their bases coincide at the moment when the Ox and Ox' axes overlap. Below the bars, the text $y = y'$ is written.

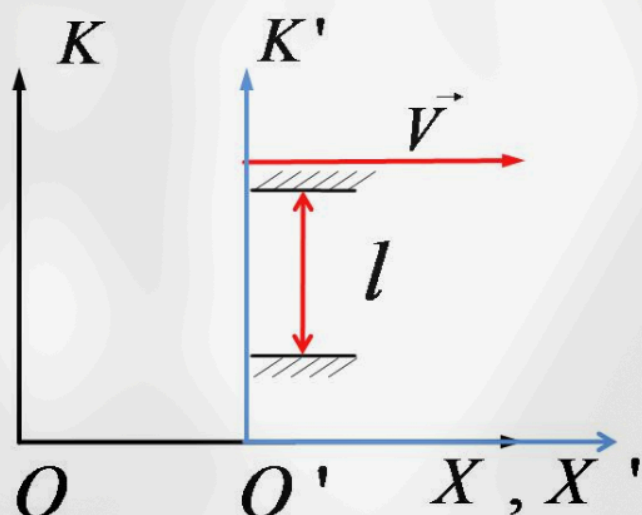
В системе K и K' вдоль осей Oy и Oy' установлены стержни, являющиеся эталонами метра.

В момент совпадения осей Ox и Ox'

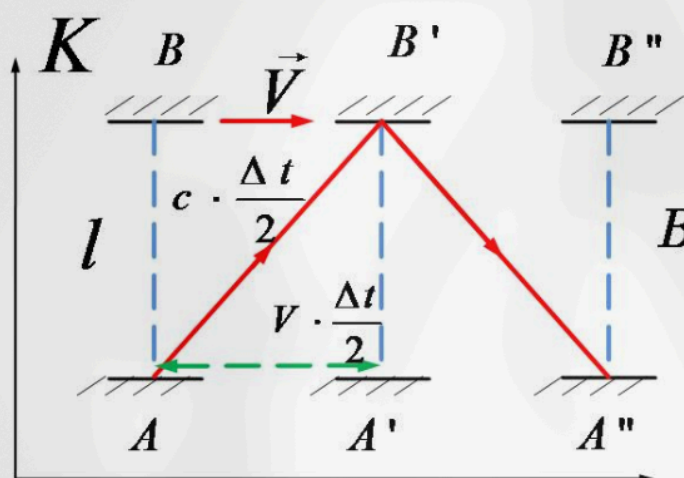
$y = y'$ в соответствии с принципом относительности (нельзя отличить одну систему от другой).

Лоренцево замедление времени

В K' системе отсчёта световые часы неподвижны. Их период:



$$\Delta t_0 = \frac{2l}{c}$$



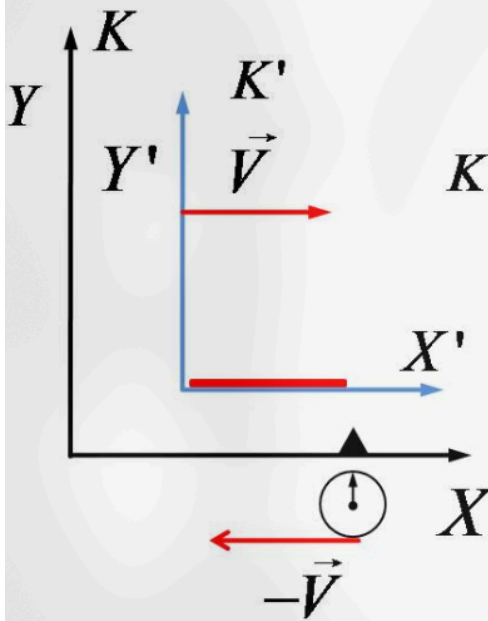
$$\Delta t_0 = \frac{2l}{c}$$

В K системе отсчёта:

$$l^2 + \left(\frac{V \Delta t}{2} \right)^2 = \left(\frac{c \Delta t}{2} \right)^2$$

$$\Delta t = \frac{2l}{c \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}$$

Лоренцево сокращение длины



В K -системе отсчёта длина стержня: $l = V \Delta t_0$

Для наблюдателя в K' системе часы движутся со скоростью $-\vec{V}$ $l_0 = V \Delta t$

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

Интервал между событиями 1 и 2

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \text{inv}$$

I. Пространственноподобный интервал $l_{12} > ct_{12}$

Можно найти такую K' систему отсчета, в которой оба события происходят одновременно

$$(t'_{12} = 0)c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l'^2_{12}$$

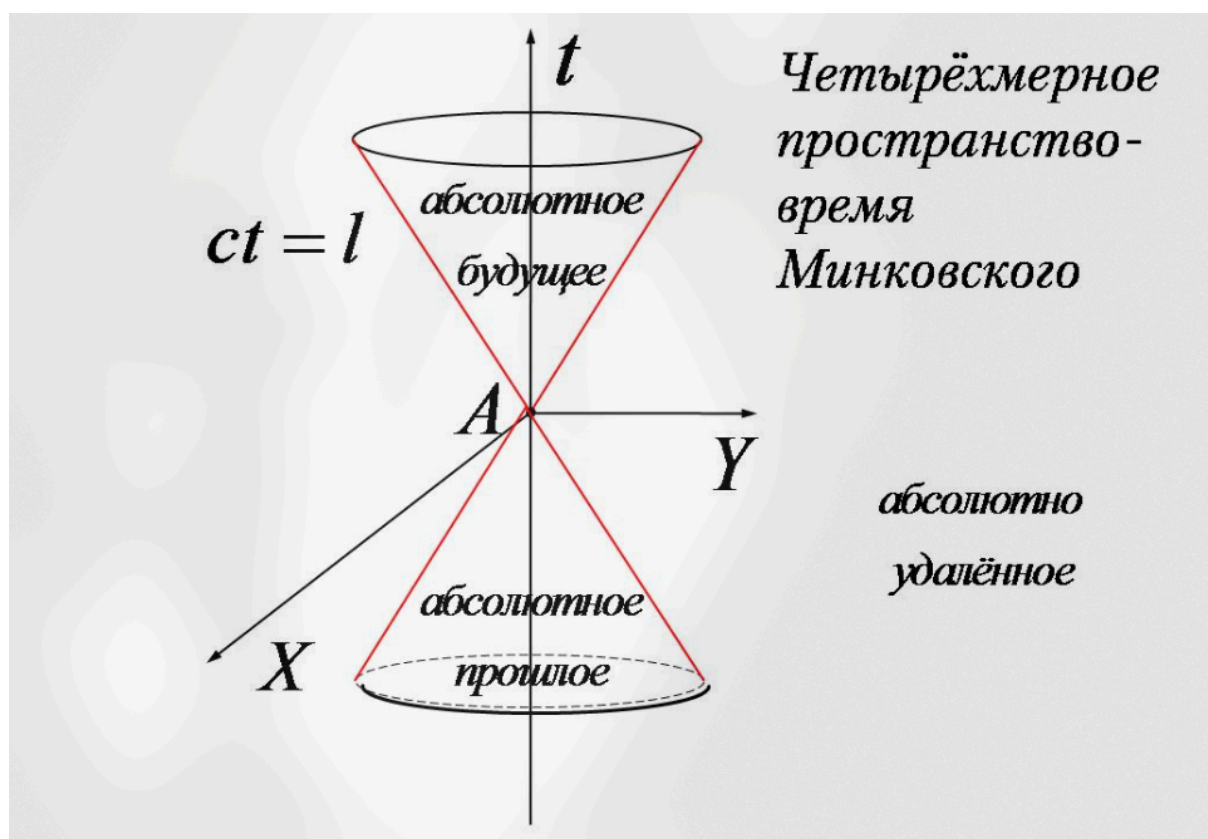
II. Времениподобный интервал $ct_{12} > l_{12}$

Можно найти такую K' систему отсчета, в которой оба события происходят в одной точке

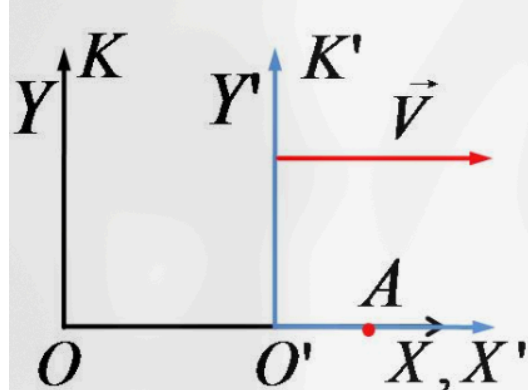
$$(l'_{12} = 0)c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12}$$

III. Светоподобный интервал $ct_{12} = l_{12}$

События, разделенные времениподобными и светоподобными интервалами $l_{12} \leq ct_{12}$ могут быть причинно-связаны друг с другом.



Преобразования Лоренца



Система отсчёта K' движется относительно системы отсчёта K со скоростью V . За начало отсчёта времени в обеих системах отсчёта выбран момент, когда O и O' совпадают.

В K системе отсчёта длина отрезка $O'A$:

$$x - Vt = x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

В K' системе отсчёта длина отрезка OA :

$$x' + Vt' = x \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$y = y'$$

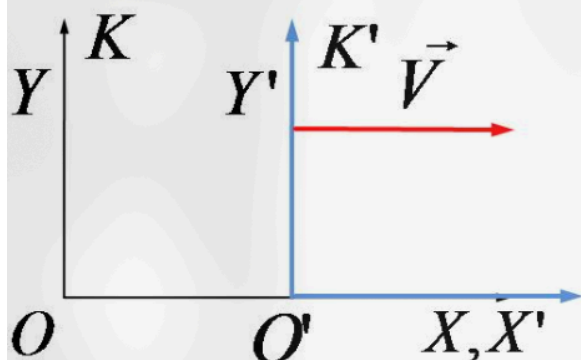
$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Из преобразований Лоренца видно, что в теории относительности можно говорить об “определенном моменте времени” лишь применительно к какой-либо инерциальной системе отсчета. Так, например, одному моменту времени в системе отсчета K (одному определенному значению времени t в этой системе) соответствует множество значений времени t' в системе отсчета K' в зависимости от значений координаты x .

Преобразование скорости при переходе из К в К'

Вычислим $v'_{x'}$



$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Вычислим $v'_{y'}$

$$v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}$$

$$y' = y$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$v'_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

аналогично получаем выражение для $v'_{z'}$

$$v'_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Модуль скорости

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z}$$

Преобразование скорости при переходе из K' в K .

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}}$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$\rightarrow v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 + \frac{v'_{x'}V}{c^2}}$$

Действуя аналогично, получаем выражение для

$$v_y = \frac{v'_{y'} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_{x'}V}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_{z'} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_{x'}V}{c^2}}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Формулы преобразования идентичны. K' – система отсчета движется относительно K -системы со скоростью V , K -система относительно K' со скоростью $-V$.

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

$$v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 + \frac{v'_{x'} V}{c^2}}$$

Это подтверждает тот факт, что системы отсчета равноправны.

Преобразование ускорения при переходе из K в K'

Формулы преобразования идентичны. K' -система отсчета движется относительно K -системы со скоростью V , K -система относительно K' со скоростью $-V$.

$$a'_{x'} = \frac{dv'(x')}{dt'} = a_x \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \right)^3$$

$$a'_{y'} = \frac{dv'_{y'}}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) a_y + \frac{v_y V}{c^2} a_x \right] \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)^3}$$

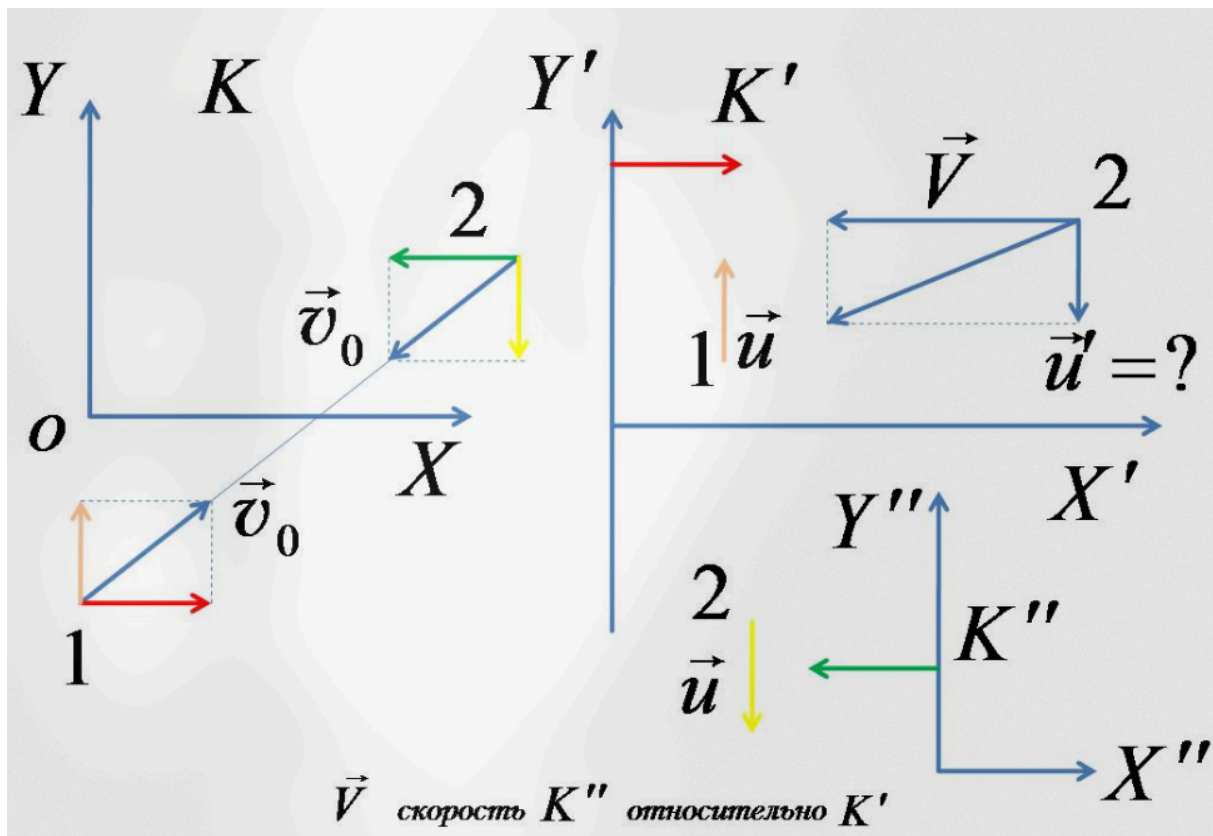
$$a'_{z'} = \frac{dv'_{z'}}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) a_z + \frac{v_z V}{c^2} a_x \right] \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)^3}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a'_{x'} \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v'_{x'} V}{c^2}} \right)^3$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \left[\left(1 - \frac{v'_{x'} V}{c^2} \right) a'_{z'} - \frac{v'_{z'} V}{c^2} a'_{x'} \right] \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v'_{x'} V}{c^2} \right)^3}$$

Получим выражение для релятивистского импульса частицы.

Будем исходить из того, что закон сохранения импульса должен выполняться во всех инерциальных системах отсчета. Рассмотрим две одинаковые частицы, которые в системе отсчета K движутся навстречу друг другу с равными по модулю скоростями v_0 . Выберем систему K' , которая движется вдоль оси X со скоростью равной проекции скорости первой частицы на X . В этой системе первая частица движется со скоростью $\vec{u}$ вверх.



Рассмотрим также вторую систему отсчета K'' , которая движется навстречу оси X со скоростью, равной проекции скорости второй частицы на ось X . В этой системе отсчета вторая частица движется навстречу оси Y'' со скоростью u . необходимо, чтобы в любой системе отсчета получалось, что при столкновении частицы останавливаются, так как выполнялся ЗСИ.

Вычислим скорость второй частицы в системе K' . Подставим в формулу преобразования скоростей значения проекций в K'' и вычислим результат.

это в K''

$$v_{x''}'' = 0 \quad v_{y''}'' = -u$$

Также учтём, что K' движется относительно K'' со скоростью $-\vec{V}$

$$u_{y'}' = \frac{v_{y''}'' \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_{x''}'' V}{c^2}}$$

$$u' = -u \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

Проекции импульсов первой и второй частиц в K' оказались неравными. Это неправильно, при столкновении должен быть справедлив ЗСИ. Для того, чтобы исправить противоречие, необходимо добавить множитель

$$m_1 u = -m_2 u \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Основное уравнение релятивистской динамики

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

Энергия покоя $E_0 = mc^2$

$m(m_0)$ Масса (Ранее говорили “масса покоя”)

Полная энергия релятивистской частицы

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} + E_0$$

$$E_{\text{полн}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Полная энергия частицы и ее импульс связаны соотношением.

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

При переходе от одной системы отсчета к другой не изменяется масса частицы, следовательно, релятивистским инвариантом является

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{E_0^2}{c^2}$$

Фотон.

Фотон – квант света. Скорость фотона равна c .

Поскольку знаменатель в формуле для импульса обращается в нуль,

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

масса фотона равна нулю.

Энергия фотона.

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

ν – частота света

λ – длина волны света

Вычислим **импульс фотона**. Для этого воспользуемся формулой, связывающей энергию и импульс частицы.

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 = 0$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$