

Отображения в линейных пространствах

Данный раздел посвящен рассмотрению отображений в линейных пространствах. Ранее в курсе мы уже затрагивали тему отображений в линейных пространствах, рассматривая изоморфные линейные пространства. В этом разделе мы увидим, что существует еще несколько типов отображений, обладающих свойствами линейности или схожими с ними. Одной из основных целей является выявление общих подходов к рассмотрению любых отображений такого рода.

Содержание

§1 Введение	2
§2 Сопряженное пространство	3
§3 Изоморфизмы сопряженных пространств	6

Литература:

- Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.
- Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: «Наука», 1984.
- Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. М.: МЦНМО, 2014. (Содержит подробные решения)
- Ершов А.В. Лекции по линейной алгебре. Москва, 2022

Лекция I. Линейные формы

§1. Введение

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Линейной формой** на пространстве V называется такая функция $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(б) Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Замечание 1.1. Для любого линейного отображения $f : V \rightarrow U$ справедливо, что образом линейной комбинации произвольных векторов $v_i \in V$ будет линейная комбинация образов этих векторов:

$$f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i)$$

Пример 1.1. Пусть E – пространство геометрических векторов (на плоскости или в пространстве) с введенным скалярным произведением $\langle x, y \rangle$. Линейную форму $f(v)$ можно задать как

$$f(v) = \langle a, v \rangle,$$

где $a \in E$ – фиксированный вектор.

Пример 1.2. Пусть $V = M_n(\mathbb{K})$ – пространство квадратных матриц n -го порядка с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Линейную форму можно задать как

$$f(A) = \operatorname{tr} A, \quad A \in M_n(\mathbb{K})$$

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ – пространство полиномов степени не выше n . Линейную форму можно задать как

$$f(p) = p(x) \Big|_{x=x_0}$$

Пример 1.4. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство элементов $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Линейную форму можно задать как

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Замечание 1.2. Последний пример примечателен тем, что любую линейную форму можно представить в таком виде.

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

Определение 1.2. Коэффициентами φ_i линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

Теорема 1.1. Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i$$

Таким образом получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого вектора и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены в одном и том же базисе.

§2. Сопряженное пространство

Рассмотрим множество линейных форм, заданных в линейном пространстве V .

Определение 2.1. Линейные формы f и g будем называть **равными**, если

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

Определение 2.2. Линейная форма θ называется **нулевой (нуль-формой)**, если

$$\theta(v) = 0, \quad \forall v \in V$$

Очевидно, что мы можем определить действия на множестве форм.

Определение 2.3. Суммой линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \quad \forall v \in V$$

Лемма 2.1. Отображение h является линейной формой.

Доказательство. Покажем справедливость свойства аддитивности:

$$\begin{aligned} h(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) = \\ &= (f(v_1) + g(v_1)) + (f(v_2) + g(v_2)) = h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

Выполнение свойства однородности показывается аналогично.

Определение 2.4. Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется отображение $l = \alpha f$ такое, что

$$l(v) = \alpha \cdot f(v), \quad \forall v \in V$$

Доказательство. Аналогично лемме о сумме линейных форм.

Из приведенных выше определений и лемм следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. Множество линейных форм V^* , заданных на линейном пространстве V образует линейное (сопряженное) пространство.

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V . Введем набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает j -ю координату вектора $v \in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

Лемма 2.2. Набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^* .

Доказательство. Чтобы показать справедливость утверждения, необходимо доказать полноту и линейную независимость этого набора. Покажем сначала полноту:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_i v^i = \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i(v) = \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i f^i \right) (v)$$

Аналогично с линейной независимостью. Предположим, что линейная комбинация форм с некоторыми коэффициентами α_i равна нуль-форме.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i = \theta$$

Применяя эту нуль-форму к произвольному базисному вектору, получим

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i \right) (e_k) = \theta(e_k) = 0$$

Учитывая также свойства линейности и их определение

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k f^k(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0$$

Замечание 2.1. Каждому базису в пространстве V может быть найден и притом единственный сопряженный базис, связанный с ним соотношением, которое указано выше.

Посмотрим теперь как преобразуется сопряженный базис при преобразовании базиса пространства X .

Теорема 2.2. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{f}^l\}_{l=1}^n$ – базисы V^* , сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i$$

где $(\sigma_i^l) = S$ – элементы обратной матрицы перехода, полагая $(\tau_k^j) = T$ – матрица перехода из $\{e^j\}_{j=1}^n$ в $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. По определению сопряженных базисов имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}^l(\tilde{e}_k) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i \left(\sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j f^i(e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^l \tau_k^i = \delta_k^l \end{aligned}$$

Откуда следует, что произведение матрицы, составленной из σ_i^l , на матрицу перехода с элементами τ_k^j должно быть равно единичной матрице. А это есть не что иное как определение обратной матрицы.

Теорема 2.3. Преобразование координат формы в V^* при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\tilde{f}\}_{l=1}^n$ имеет вид

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \quad (\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2, \dots, \tilde{\eta}^n) = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n) \cdot T$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_l = f(\tilde{e}_l) &= \sum_{i=1}^n \eta_i f^i \left(\sum_{j=1}^n \tau_l^j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j f^i(e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i \end{aligned}$$

Замечание 2.2. Координаты линейной формы преобразуются точно по такому же закону, что и сам базис пространства V . По этой причине их также называют **ковекторами**.

§3. Изоморфизмы сопряженных пространств

В силу доказанного утверждения о базисе сопряженного пространства справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пространство V и сопряженное пространство V^* изоморфны.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из того, что $\dim V = \dim V^*$ (мощности базисов равны), а следовательно

$$V \simeq \mathbb{K}^n \simeq V^*$$

Изоморфизм устанавливается введенным соответствием между базисами пространств V и V^* .

Отметим, что операцию нахождения сопряженного пространства можно применять итеративно.

Определение 3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.

Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

Теорема 3.1. *Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

Доказательство. Рассмотрим элементы второго сопряженного пространства $\hat{v}, \hat{u} \in V^{**}$:

$$\begin{aligned} \hat{v} : V^* &\rightarrow \mathbb{K}, & \hat{v}(f) &\in \mathbb{K} \\ \hat{v}(f + g) &= \hat{v}(f) + \hat{v}(g), & \hat{v}(\alpha f) &= \alpha \hat{v}(f) \\ (\hat{v} + \hat{u})(f) &= \hat{v}(f) + \hat{u}(f), & (\alpha \hat{v})(f) &= \alpha \hat{v}(f) \end{aligned}$$

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\hat{x} \leftrightarrow x : \quad \hat{v}(f) = f(v) \quad \forall f \in V^*$$

Замечание 3.1. Данное утверждение имеет ряд важных следствий для тензорного анализа, который будет обсуждаться позднее.

Отображения в линейных пространствах

§1. Введение

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Билинейной формой** на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

Замечание 1.1. Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее. Отсюда сразу следует первый пример.

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Пример 1.2. Скалярное произведение геометрических векторов на плоскости (в пространстве) линейно по каждому из аргументов, а следовательно является билинейной формой.

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где $x = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^T \in V$ и $y = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)^T \in V$.

Замечание 1.2. Последний пример примечателен тем, что любую билинейную форму можно представить в таком виде.

Рассмотрим $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ – множество всех билинейных форм с аргументами из V . Для этого множества справедливо следующее.

(а) Билинейные формы $b, b' \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ равны тогда и только тогда, когда принимают равные значения на одинаковых парах аргументов:

$$b = b' \quad \Leftrightarrow \quad b(x, y) = b'(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

(б) Существует нулевая билинейная форма $\theta \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$, принимающая 0 $\in \mathbb{K}$ на любой паре аргументов.

$$\theta \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) : \quad \theta(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in V$$

(в) Может быть определена сумма билинейных форм $b, b' \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ как отображение вида

$$c = b + b' \quad \Leftrightarrow \quad c(x, y) = b(x, y) + b'(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

(г) Может быть определено умножение билинейной формы $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ как отображение вида

$$d = \lambda b \quad \Leftrightarrow \quad d(x, y) = \lambda b(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

Лемма 1.1. *Отображения c и d являются билинейными формами.*

Доказательство. Аналогично соответствующим утверждениям для линейных форм.

Лемма 1.2. *Множество $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ наделено структурой линейного пространства.*

Доказательство. Можно убедиться путем прямой проверки аксиом линейного пространства.

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x, y) = b(y, x)$.

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x, y) = -b(y, x)$.

Замечание 1.3. Множество симметричных (антисимметричных) билинейных форм образует линейное подпространство $\text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)$ ($\text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$) в $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)), \quad b^S \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V)$$

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)), \quad b^{AS} \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Лемма 1.3. *Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.*

Доказательство. Убеждаемся непосредственной проверкой:

$$b^S(x, y) + b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)) + \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x)) = b(x, y)$$

Лемма 1.4. *Пространство билинейных форм представляется в виде прямой суммы подпространств симметричных и антисимметричных билинейных форм.*

$$\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) \oplus \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Доказательство. Процедура изготовления симметричных (антисимметричных) форм, описанная выше, позволяет заключить, что

$$\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) + \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$$

Покажем, что сумма будет прямой. Пусть билинейная форма $h(x, y)$ такова, что $h \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}^S(V) \cap \text{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)$. Тогда имеем

$$\begin{cases} h(x, y) = h(y, x) \\ h(x, y) = -h(y, x) \end{cases} \Rightarrow h(y, x) = -h(y, x) \Rightarrow h(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

В пересечении подпространств лежит только нулевая билинейная форма. Следовательно сумма является прямой.

§2. Матрица билинейной формы

Предположим, что V – конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

Определение 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x, y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

Теорема 2.1. *Задание билинейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V билинейная форма $b(x, y)$ задана набором коэффициентов $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда $\forall x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$:

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \eta^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \beta_{ij}$$

По аналогии с линейными формами, коэффициенты которых можно представить в виде вектора-строки, существует аналогичное представление для билинейной формы.

Определение 2.2. Матрицей билинейной формы $b(x, y)$ называется матрица B , составленная из ее коэффициентов.

Лемма 2.1. Пространство билинейных форм $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ изоморфно пространству квадратных матриц $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned} b &\leftrightarrow B & b' &\leftrightarrow B' \\ b + b' &\leftrightarrow B + B' \\ \lambda b &\leftrightarrow \lambda B \end{aligned}$$

Соответствие между линейными операциями с билинейными формами и матрицами проверяется непосредственной проверкой определений.

Замечание 2.1. По этой же самой аналогии мы устанавливали изоморфизм между $V^* \simeq \mathbb{K}^n$, если $\dim V = n$. Мы снова наблюдаем идею "координатизации" пространства. В данном случае "координатами" билинейной формы служат коэффициенты ее матрицы.

Замечание 2.2. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$\begin{aligned} b^S &\leftrightarrow B_S & B_S &= B_S^T \\ b^{AS} &\leftrightarrow B_{AS} & B_{AS} &= -B_{AS}^T \end{aligned}$$

В силу того, что матрица билинейной формы определяется как объект, зависящий от выбора базиса, то и смена базиса должна приводить к изменению матрицы билинейной формы. Действительно аналогичную ситуацию мы опять же уже встречали на примере строки коэффициентов линейной формы.

Теорема 2.2. Матрицы B и B' билинейной формы $b(x, y)$, заданные в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e'_j\}_{j=1}^n$ связаны соотношением

$$B' = C^T B C,$$

где $C = (c_j^i)$ - матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

Доказательство. Полагая, что известна матрица перехода $C = (c_j^i)$, компоненты нового базиса можно выразить через векторы старого базиса как

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_j^i e_i$$

Воспользуемся этим, чтобы получить компоненты матрицы билинейной формы в новом базисе

$$\beta'_{ij} = b(e'_i, e'_j) = b\left(\sum_{k=1}^n c_i^k e_k, \sum_{l=1}^n c_j^l e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l b(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_i^k c_j^l \beta_{kl},$$

где $\beta_{kl} = b(e_k, e_l)$ для всех $k, l = 1, \dots, n$ - коэффициенты матрицы билинейной формы в старом базисе. Данное двойное суммирование означает ничто иное как матричное умножение, которое можно записать в виде

$$B' = C^T B C$$

Данное утверждение легко проверяется прямым раскрытием матричного умножения в индексном виде.

§3. Квадратичная форма

Пусть $V(\mathbb{K})$ – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Предположим также, что в этом линейном пространстве определена билинейная форма $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Определение 3.1. **Квадратичной формой** на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad q(v) = b(v, v), \quad \forall v \in V$$

Замечание 3.1. Любая билинейная форма $b(x, y)$ задает квадратичную функцию $q(v)$, которая получается из нее ограничением области определения с $V \times V$ на диагональ $\{(v, v) : v \in V\} \subset V \times V$.

Лемма 3.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.*

Доказательство. Справедливы следующие рассуждения:

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 q(v)$$

Тем самым мы показали, что квадратичная форма является однородной функцией 2-го порядка. Зафиксируем теперь базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V . Произвольный вектор можем разложить по этому базису единственным образом $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$. Тогда квадратичная функция в координатном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} q(v) &= b\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j b(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i v^j \beta_{ij}, \end{aligned}$$

где β_{ij} – коэффициенты билинейной формы, по которой построена квадратичная форма $q(v)$.

Лемма 3.2. *По квадратичной форме $q(v)$ однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной формы $b(x, y)$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму от суммы векторов $x, y \in V$:

$$q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = q(x) + b(x, y) + b(y, x) + q(y)$$

Откуда

$$b(x, y) + b(y, x) = q(x+y) - q(x) - q(y)$$

Если билинейную форму полагать симметричной, т.е. $b \in \text{Bil}^S(V)$, то имеем

$$b(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Замечание 3.2. Предыдущей леммой определяется взаимно однозначное соответствие между множеством квадратичных форм и множеством симметричных билинейных форм.

Замечание 3.3. Любой антисимметричной билинейной форме соответствует нулевая квадратичная форма.

Замечание 3.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij} , квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} (v^i)^2 + 2 \sum_{i < j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где v^i — i -я координата вектора v в выбранном базисе.

Полилинейные формы

§1. Основные определения

Определение 1.1. Полилинейной формой на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, \alpha x'_i + \beta x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) = \\ = \alpha \mathcal{A}(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) + \beta \mathcal{A}(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q), \end{aligned}$$

где $x_i \in V$ и $\varphi^j \in V^*$.

Рассмотрим частные случаи полилинейных форм.

Определение 1.2. Валентностью полилинейной формы называют пару чисел (p, q) , определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

Пример 1.1. Линейные формы над V — это отображения вида

$$f : V \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\varphi \in V^*$ является ПЛФ валентности $(1, 0)$.

Пример 1.2. Линейные формы над V^* — это отображения вида

$$\hat{x} : V^* \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма $\hat{x} \in V^{**}$ является ПЛФ валентности $(0, 1)$. Однако ранее обсуждалось, что между пространствами V и V^{**} существует естественный изоморфизм, определяемый как

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow \hat{x} \quad (\hat{x}, f) = (f, x) \quad \forall f \in V^* \\ x \in V, \quad \hat{x} \in V^{**} \end{aligned}$$

Следовательно, можно утверждать, что ПЛФ валентности $(0, 1)$ однозначно соответствует элемент линейного пространства V в силу обсуждаемого изоморфизма.

Пример 1.3. Билинейные формы над V — это отображения вида

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности $(2, 0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

а такж все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее.

Пример 1.4. Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида

$$\psi : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

являющиеся ПЛФ валентности $(3, 0)$. Отображения такого вида встречались в геометрии — это смешанное произведение трех векторов.

§2. Действия с полилинейными формами

Пусть Ω_q^p — множество полилинейных форм валентности (p, q) .

Определение 2.1. Полилинейные формы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$ одинаковой валентности будем называть **равными**, если

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Определение 2.2. Нуль-формой $\Theta \in \Omega_q^p$ называется такая полилинейная форма, что

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = 0 \quad \forall x_i \in V, \forall \varphi^j \in V^*$$

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — полилинейные формы валентности (p, q) . Введем операции с ними.

2.1. Линейные операции

Определение 2.3. Отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ будем называть суммой полилинейных форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \\ = \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) + \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.1. Отображение $\mathcal{C}$, определенное как сумма полилинейных форм $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$ является полилинейной формой из Ω_q^p

Доказательство. Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм. $\square$

Аналогично можно ввести и умножение на скаляр.

Определение 2.4. Отображение $\lambda\mathcal{A}$ будем называть произведением полилинейной формы $\mathcal{A}$ на скаляр λ , если

$$(\lambda\mathcal{A})(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.2. *Отображение $\lambda\mathcal{A}$, определенное как произведение полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ является полилинейной формой из Ω_q^p*

Доказательство. Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм. $\square$

Теорема 2.1. *Множество Ω_q^p полилинейных форм валентности (p, q) образует линейное пространство.*

Доказательство. Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. $\square$

2.2. Произведение ПЛФ

Определение 2.5. Произведением полилинейных форм $\mathcal{A} \in \Omega_{q_1}^{p_1}$ и $\mathcal{B} \in \Omega_{q_2}^{p_2}$ называют отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ определяемое как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot \mathcal{B}(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) = \\ = \mathcal{C}(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) \end{aligned}$$

Пример 2.1. Билинейную форму $b(x_1, x_2) \in \Omega_q^p$ можно задать как

$$b(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2),$$

где $f, g \in \Omega_q^p = V^*$ — линейные формы.

Замечание 2.1. Произведение полилинейных форм валентностей (p_1, q_1) и (p_2, q_2) всегда позволяет получить полилинейную форму валентности (p_1+p_2, q_1+q_2) . Однако **не каждая** полилинейная форма валентности (p, q) **может быть представлена (разложена)** в произведение полилинейных форм валентностей (p_1, q_1) и (p_2, q_2) , даже если $p_1 + p_2 = p$ и $q_1 + q_2 = q$.

Лемма 2.3. *Отображение $\mathcal{C}$, введенное как произведение полилинейных форм, является полилинейной формой.*

$$\mathcal{C} \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

Доказательство. Не теряя общности, мы можем показать линейность по первому векторному аргументу. Для остальных доказательство может быть построено аналогичным образом, но его запись при этом усложнится значительно. Пусть произведение полилинейных форм задается следующим образом:

$$\mathcal{C}(x, \dots; \dots) = \mathcal{A}(x, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots, \dots; \dots),$$

где через многоточия обозначены остальные аргументы всех полилинейных форм согласно определению выше.

При этом, если аргумент x представлен линейной комбинацией $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) &= \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= (\alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots)) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{C}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{C}(x_2, \dots; \dots), \end{aligned}$$

где мы воспользовались свойством полилинейности отображения $\mathcal{A}$. В силу того, что это отображение линейно по каждому из аргументов, данные рассуждения справедливы по набору его аргументов. А также в силу того, что отображение $\mathcal{B}$ тоже является полилинейным, свойство линейности отображения $\mathcal{C}$ по каждому из аргументов набора из $\mathcal{B}$. $\square$

2.3. Свойства произведения полилинейных форм

(а) Некоммутативность

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяет порядок аргументов в $\mathcal{C}$. Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм $f^1, f^2 \in V^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= f^1 \cdot f^2 & \Rightarrow & \quad \mathcal{C}_1(x, y) = f^1(x) \cdot f^2(y) \\ \mathcal{C}_2 &= f^2 \cdot f^1 & \Rightarrow & \quad \mathcal{C}_2(x, y) = f^2(x) \cdot f^1(y) \end{aligned}$$

(б) Ассоциативность

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$$

(в) Нуль-форма

$$\mathcal{A} \cdot \Theta_{(p_2, q_2)} = \Theta_{(p_1, q_1)} \cdot \mathcal{B} = \Theta_{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)}$$

(г) Законы согласования операций (дистрибутивность)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) &= \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} &= \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \\ (\alpha \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} &= \alpha(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cdot (\alpha \mathcal{B}) \end{aligned}$$

§3. Тензор ПЛФ

Зафиксируем в $V(\mathbb{K})$ базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и построим к нему сопряженный базис $\{f^j\}_{j=1}^n$ в пространстве V^* . Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Определение 3.1. Тензором полилинейной формы $\mathcal{C}$ валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы $i_1, i_2, \dots, i_p$ и $j_1, j_2, \dots, j_q$ принимают значения $1, \dots, n$, где $n = \dim V$ — это размерность пространства V .

Замечание о неом суммировании

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило суммирования Эйнштейна**, или соглашение о неом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

- (а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

- (б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

- (в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

Теорема 3.1. Задание тензора эквивалентно заданию его компонент в паре базисов пространств V и V^* .

Доказательство. Рассмотрим набор векторов $x_1, \dots, x_p$ и форм $\varphi^1, \dots, \varphi^q$, заданных своими разложениями по базисам

$$x_k = \sum_{i=1}^n \xi_k^i e_i = \xi_k^i e_i \quad \varphi^l = \sum_{j=1}^n \eta_j^l f^j = \eta_j^l f^j$$

Применим к ним тензор $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q)$ и воспользуемся его линейными свойствами

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) &= \mathcal{C}(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \dots, \eta_{j_q}^q f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}, \end{aligned}$$

где в данной записи мы как раз воспользовались соглашением о немом суммировании. $\square$

Замечание 3.1. Таким образом мы получаем, что компоненты тензора однозначно задают его в фиксированной паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$. Данное свойство аналогично рассмотренным ранее:

- (а) Разложению линейной формы φ на коэффициенты $\{\varphi_i\}$ в базисе сопряженного пространства V^* ;
- (б) Матрице B билинейной формы $b(x, y)$, где коэффициент β_{ij} с парой индексов (ij) соответствует значению билинейной формы на базисных векторах e_i и e_j .

Тензоры

§1. Преобразование тензора при замене базиса

В прошлой лекции мы определили тензор как набор компонент, которые получаются при вычислении полилинейной формы на наборах базисных элементов. Также вспомним, что координатные представления линейных и билинейных форм (строки и матрицы коэффициентов соответственно) преобразуются при замене базиса по определенным законам. Приведем их снова, а также дополнительные обозначения, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — линейное пространство размерности $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, а V^* — сопряженное к нему пространство. Определим в этих пространствах по паре базисов — "старый" и "новый":

$$\begin{aligned} V : \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_k\}_{k=1}^n \\ V^* : \{f^j\}_{j=1}^n, \quad \{f'^l\}_{l=1}^n \end{aligned}$$

При этом между парами базисов из соответствующих пространств можно определить преобразование при помощи матрицы перехода $T = \{\tau_k^i\}$ и обратной к ней $S = \{\sigma_j^l\}$:

$$e'_k = e_j \tau_k^j \quad f'^l = \sigma_j^l f^j,$$

где для записи преобразований мы сразу воспользовались соглашением о немом суммировании.

При этом для координат векторов $x = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ и коэффициентов линейных форм $f = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ вводятся аналогичные преобразования:

$$\xi'^k = \sigma_i^k \xi^i \quad \eta'_l = \eta_j \tau_j^l,$$

Откуда мы можем сделать выводы, что в принятых в данном курсе обозначениях, объекты, имеющие верхние индексы преобразуются при помощи обратной матрицы перехода S , а те объекты, что имеют нижние индексы, преобразуются при помощи исходной матрицы перехода T .

Обобщим этот результат на тензор полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ и закон преобразования его компонент при замене базиса. В согласии с определением из предыдущей лекции, введем тензор в новом базисе.

$$a'^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \mathcal{A}(e'_{k_1}, e'_{k_2}, \dots, e'_{k_p}; f'^{l_1}, f'^{l_2}, \dots, f'^{l_q}) \mapsto$$

Теперь воспользуемся введенными преобразованиями базиса, чтобы записать выражение через элементы "старых" базисов:

$$\begin{aligned} \mapsto \mathcal{A}(e_{i_1} \tau_{k_1}^{i_1}, e_{i_2} \tau_{k_2}^{i_2}, \dots, e_{i_p} \tau_{k_p}^{i_p}; \sigma_{j_1}^{l_1} f^{j_1}, \sigma_{j_2}^{l_2} f^{j_2}, \dots, \sigma_{j_q}^{l_q} f^{j_q}) = \\ = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} \mathcal{A}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = \\ = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным по каждому из аргументов, а также то, что в каждом аргументе подразумеваются именно линейные операции (немое суммирование и умножение на скаляры из матриц перехода).

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Тензор полилинейной формы при замене базиса преобразуется по закону:*

$$a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_p} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} \dots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \sigma_{j_2}^{l_2} \dots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

Замечание 1.1. В некоторых приложениях алгебры именно этот закон преобразования лежит в основе определения тензора. Исходя из этой идеи, можно определить тензор как многокомпонентный объект, коэффициенты которого преобразуются по данному закону.

Помимо частных случаев, которые уже были приведены в начале лекции, можно связать преобразование тензора в общем виде и преобразование билинейной формы при замене базиса. Действительно, билинейной форме, как раньше и указывалось, соответствует тензор вида β_{ij} . В соответствии с введенным законом преобразования запишем этот частный случай в индексном виде

$$\beta'_{kl} = \tau_k^i \tau_l^j \beta_{ij},$$

что на языке матричного исчисления буквально соответствует $B' = T^T B T$.

Замечание 1.2. В предыдущей лекции этот закон преобразования записывался как $B' = C^T B C$. Однако во избежании путаницы с обозначениями текущей лекции была произведена замена обозначения матрицы перехода.

§2. Операция свертки

Определим еще одну операцию над полилинейными формами и тензорами соответственно.

Определение 2.1. Сверткой полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ называется отображение, результатом которого является функция $\mathcal{B}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемая как

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q) = \\ = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{k-1}, \mathbf{e}_r, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f}^r, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r .

Полученная функция $\mathcal{B}$ является полилинейной формой в силу того, что свойства линейности индуцируются из $\mathcal{A}$.

Рассмотрим компоненты полученной полилинейной формы и введем для них обозначения в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leftrightarrow a_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} \\ \mathcal{B} &\leftrightarrow b_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} \end{aligned}$$

Компоненты полилинейной формы $\mathcal{B}$ связаны с компонентами полилинейной формы $\mathcal{A}$ соотношением

$$b_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q} = a_{i_1 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_q},$$

которое получается из рассмотрения определения свертки при подстановке в них базисных векторов в качестве аргументов согласно определению тензора полилинейной формы.

Замечание 2.1. Необходимым условием для существования свертки в случае определения для полилинейной формы является наличие хотя бы одного векторного и одного ковекторного аргумента. В интерпретации операции для тензоров требуется существование хотя бы одного верхнего и одного нижнего индекса.

Пример 2.1. Через свертку можно рассматривать применение линейной формы f к вектору x

$$f(x) = \eta_i x^i = \eta_1 x^1 + \dots + \eta_n x^n$$

Также, используя тензорную запись и операции, в том числе свертку, можно записать СЛАУ в индексном виде:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i^j \xi^i = \beta^j,$$

где α_i^j соответствует компонентам матрицы A , а ξ^i и β^j — координаты векторов x и b соответственно.

Замечание 2.2. Все матричные операции, которые использовались ранее, могут быть представлены в тензорной записи соответствующих им объектов.

§3. Приложения тензоров

Ранее мы уже вводили символ Кронекера для соотношения между сопряженными базисами, но также существует его определение как тензорного объекта.

Определение 3.1. Символ Кронекера δ_{ij} — это дважды ковариантный тензор типа $(2, 0)$, компоненты которого задаются как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Замечание 3.1. Символ Кронекера является симметричным в том смысле, что для него выполняется свойство:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

3.1. Символ Кронекера и скалярное произведение

Рассмотрим применение данного тензора в задачах геометрии, если определена декартова прямоугольная система координат.

Замечание 3.2. В случае ДПСК справедливо свойство:

$$\delta_{ij}a^j = a_i,$$

которое называют операцией поднятия и опускания индекса. Данное свойство справедливо не только в ДПСК и в дальнейших частях курса мы обобщим это свойство для произвольных систем координат.

С учетом этого свойства символ Кронекера оказывается полезным при записи скалярного произведения в ДПСК:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = \sum_{i=1}^n a^i b_i.$$

3.2. Символ Леви-Чевиты

Определение 3.2. Символ Леви-Чевиты ε_{ijk} — это трижды ковариантный тензор типа $(3, 0)$, компоненты которого в ДПСК задаются как:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — чётная перестановка } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечётная перестановка,} \\ 0, & \text{иначе (если есть повторяющиеся индексы).} \end{cases}$$

Замечание 3.3. Символ Леви-Чивиты обладает свойством:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj},$$

которое называют антисимметричностью тензора. Это свойство напрямую следует из определения.

Перейдем к применению этого тензора в геометрии. Компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в ДПСК выражаются через символ Леви-Чевиты:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k.$$

В координатной форме:

$$\mathbf{c} = (\varepsilon_{1jk} a^j b^k, \varepsilon_{2jk} a^j b^k, \varepsilon_{3jk} a^j b^k).$$

Действительно, векторное произведение в ДПСК в полной форме может быть записано следующим образом

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{i} + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{j} + (a^3 b^2 - a^2 b^3) \mathbf{k}$$

по определению из темы "Векторная алгебра". Обратим внимание, что если индексы координат векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не совпадают, то их произведения не входят в формулы нахождения компонент вектора $\mathbf{c}$. Точно также можно обратить внимание, что при изменении индексов у координат векторов знак произведения изменяется на противоположный. Это в точности соответствует определению и свойствам символа Леви-Чивиты.

Так как и скалярное и векторное произведение могут быть описаны при помощи тензоров, то естественным образом можно предположить, что и смешанное произведение допускает такую запись.

Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a^i) \cdot (\varepsilon_{ijk} b^j c^k) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

Наконец перейдем к еще одному обобщению применения символа Леви-Чивиты не только на геометрические задачи. Вспомним, что в ДПСК смешанное произведение может быть найдено при помощи определителя:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix},$$

но тогда можно предположить, что и определитель произвольной тройки векторов может быть найден при помощи операции свертки векторов-столбцов матрицы с символом Леви-Чивиты.

3.3. Определитель произвольной матрицы

Обобщим определение символа Леви-Чивиты до произвольного количества индексов.

Определение 3.3. Символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ в n -мерном пространстве — это полностью антисимметричный тензор типа $(0, n)$ с n индексами. Его компоненты в любой декартовой системе координат определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ — чётная перестановка чисел } (1, 2, \dots, n), \\ -1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ — нечётная перестановка,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях (если есть повторяющиеся индексы).} \end{cases}$$

Пояснение:

- **Антисимметричность:** Перестановка любых двух индексов меняет знак символа:

$$\varepsilon_{\dots i \dots j \dots} = -\varepsilon_{\dots j \dots i \dots}.$$

- **Ненулевые компоненты:** Отличны от нуля только компоненты, где все индексы различны и образуют перестановку чисел $1, 2, \dots, n$.

- **Знак перестановки:** Чётность перестановки определяется количеством транспозиций, необходимых для восстановления исходного порядка $(1, 2, \dots, n)$.

Для квадратной матрицы $A = (A_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель выражается как:

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

Учтем, что в силу соглашения Эйнштейна здесь производится суммирование по всем индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$, а сам символ Леви-Чивиты принимает значение только $+1$ или -1 . Это приводит нас к определителю матрицы n -го порядка

$$\det A = \sum_{\sigma(1, \dots, n)} (-1)^{[\sigma]} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

В данном случае, под σ подразумевается преобразование переупорядочивания индексов.

Замечание 3.4. Определитель матрицы наиболее естественным образом получается из рассмотрения тензоров, в особенности антисимметричных.

Линейные отображения

Предыдущие темы были посвящены рассмотрению отображений, обладающих свойствами линейности по аргументам, результатом которых был скаляр из некоторого поля. Однако вместе с тем, существует еще один важный тип отображений, определяющий сопоставление элементов двух линейных пространств. Как мы увидим далее, линейные формы являются частным случаем этого семейства отображений.

§1. Основные понятия

Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. Отображение $\varphi : V \rightarrow W$ линейного пространства V в линейное пространство W называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ выполняются следующие свойства

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Замечание 1.1. Множество линейных отображений действующих их $V(\mathbb{K})$ в $W(\mathbb{K})$ будем обозначать $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Пример 1.1. Примеры линейных отображений:

(а) Нулевое отображение:

$$\mathcal{O}: V \rightarrow W \quad \mathcal{O}x = 0_W, \quad \forall x \in V$$

(б) Тожественное отображение:

$$\mathcal{I}: V \rightarrow V \quad \mathcal{I}x = x, \quad \forall x \in V$$

(в) Растяжение:

$$\varphi: V \rightarrow V \quad \varphi x = \lambda x, \quad \forall x \in V$$

(г) Пусть V разбивается в прямую сумму подпространств $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда проектором будем называть отображение:

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2}: V \rightarrow V, \quad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2}x = x_1, \quad \forall x_1 \in V_1$$

(д) Пусть $\mathbb{R}^{\leq n}[t]$ — пространство полиномов степени не выше n , а символом $\mathcal{D}$ будем обозначать дифференцирование

$$\mathcal{D}p = \frac{dp}{dt}, \quad \forall p \in \mathbb{R}^{\leq n}[t]$$

- (е) Пусть $M_n(\mathbb{K})$ — пространство квадратных матриц n -го порядка, на котором введены отображения симметризации Sym и антисимметризации Asym

$$\text{Sym}(A) = \frac{1}{2} (A + A^T) \quad \text{Asym}(A) = \frac{1}{2} (A - A^T)$$

Замечание 1.2. Нередко при записи символа линейного отображения и его аргумента опускаются скобки как в некоторых примерах выше. Иными словами, записи $\varphi(x)$ и φx считаются эквивалентными.

§2. Матрица отображения

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$, причем $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $\dim_{\mathbb{K}} W = m$, а также $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно.

Определение 2.1. Матрицей линейного отображения φ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A_\varphi = \{\alpha_i^j\}$, в столбцах которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}$ в базисе $\{g_j\}$

$$\varphi e_i = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j$$

Пример 2.1. (а) Нулевое отображение

$$\mathcal{O} \rightarrow \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(б) Тожественное отображение

$$\mathcal{I} \rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(в) Матрица проектора на V_1 , если $V = V_1 \oplus V_2$, найденная в базисе, согласованном с обоими подпространствами

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$$

так как

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = x, \quad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = 0, \quad \forall x \in V_1$$

Теорема 2.1. *Задание линейного отображения φ эквивалентно заданию его матрицы A_φ в фиксированной паре базисов.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ — линейное отображение и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно. Рассмотрим элементы $x \in V$ и $y \in W$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j, \quad \varphi(x) = y$$

Действие отображения на элемент x можно представить как

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \alpha_i^j$$

Тем самым мы обеспечили однозначность определения образа элемента, используя лишь коэффициенты матрицы оператора при условии, что сами векторы и матрица определены в одной и той же паре базисов. $\square$

§3. Пространство линейных отображений

Рассмотрим два линейных пространства $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ и множество всех линейных отображений, которые действуют между ними. Пусть также φ, ψ — линейные отображения из V в W .

Определение 3.1. Линейные отображения φ и ψ будем считать равными, если

$$\forall x \in V \quad \varphi(x) = \psi(x)$$

Определение 3.2. Отображение $\chi : V \rightarrow W$ называется суммой линейных отображений $\varphi, \psi : V \rightarrow W$, если

$$\forall x \in V \quad \chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Лемма 3.1. *Сумма $\chi = \varphi + \psi$ линейных отображений является линейным отображением.*

Доказательство. Для доказательства необходимо рассмотреть линейные свойства суммы линейных отображений:

$$\begin{aligned} \chi(x_1 + x_2) &= \varphi(x_1 + x_2) + \psi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \psi(x_1) + \psi(x_2) = \\ &= (\varphi + \psi)(x_1) + (\varphi + \psi)(x_2) = \chi(x_1) + \chi(x_2) \end{aligned}$$

$$\chi(\alpha x) = \varphi(\alpha x) + \psi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) + \alpha \psi(x) = \alpha(\varphi + \psi)(x) = \alpha \chi(x)$$

$\square$

Следствие 3.0.1. Матрица C_χ линейного отображения $\chi = \varphi + \psi$ определяется суммой матриц A_φ и B_ψ .

$$C_\chi = A_\varphi + B_\psi$$

Определение 3.3. Отображение ω называется произведением линейного отображения φ на число $\lambda \in \mathbb{K}$, если

$$\forall x \in V \quad \omega(x) = \lambda\varphi(x)$$

Лемма 3.2. Произведение $\omega = \lambda\varphi$ линейного отображения на скаляр является линейным отображением.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству суммы. $\square$

Следствие 3.0.2. Матрица D_ω линейного отображения $\omega = \lambda\varphi$ определяется умножением матрицы A_φ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$D_\omega = \lambda A_\varphi$$

Учитывая рассмотренные понятия равенства, определенных операций над отображениями, а также существования нулевого элемента, на множестве линейных отображений можно ввести структуру линейного пространства.

Теорема 3.1. Множество всех линейных отображений из пространства V в пространство W является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Доказательство. Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. $\square$

Замечание 3.1. В силу того, что между отображением и его матрицей в фиксированной паре базисов пространств V и W устанавливается соответствие, которое к тому же сохраняет свойства линейности, можно утверждать, что пространство $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ изоморфно матричному пространству $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y) \simeq M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Композиция линейных отображений

Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ и $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ — линейные отображения между соответствующими пространствами.

Определение 3.4. Отображение $\chi : V \rightarrow W$ называется композицией линейных отображений ψ и φ , если

$$\forall x \in V : \quad \chi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$$

Лемма 3.3. Композиция $\chi = \psi \circ \varphi$ линейных отображений является линейным отображением.

Доказательство. Рассмотрим образ линейной комбинации векторов из V

$$\chi \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \right) = (\psi \circ \varphi) \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \right) = \psi \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i \varphi(x_i) \right) = \sum_{i=1}^k \alpha^i \psi(\varphi(x_i)) = \sum_{i=1}^k \alpha^i \chi(x_i)$$

□

Следствие 3.1.1. Матрица композиции линейных отображений $\chi = \psi \circ \varphi$ определяется произведением матриц B_ψ и A_φ .

$$C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$$

§4. Преобразование базиса

Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{K}}(V, W)$, а в пространствах заданы базисы:

$$V : \quad \{e_i\}_{i=1}^n, \quad \{e'_j\}_{j=1}^n$$

$$W : \quad \{g_k\}_{k=1}^m, \quad \{g'_l\}_{l=1}^m$$

Причем известно, что $T = \{\tau_j^i\}$ — матрица перехода из базиса $\{e\}$ в базис $\{e'\}$, а матрица $S = \{\sigma_l^k\}$ — матрица перехода из базиса $\{g\}$ в базис $\{g'\}$.

Теорема 4.1. Матрица оператора при замене базисов преобразуется как

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi T$$

Доказательство. Пусть $x \in V$ произвольный элемент пространства V , а y — образ этого элемента. Тогда в паре базисов $\{e\}$ и $\{g\}$

$$\varphi(x) = y \quad \leftrightarrow \quad A_\varphi x = y$$

В то же время можно утверждать, что в паре базисов $\{e'\}$ и $\{g'\}$ справедливо

$$\varphi(x) = y \quad \leftrightarrow \quad A'_\varphi x' = y'$$

Однако известно, что при изменении базиса соответствующим образом преобразуются координаты векторов x и y

$$x' = T^{-1}x, \quad y' = S^{-1}y$$

Подставляя данные преобразования в матричное выражение, получаем

$$A'_\varphi T^{-1}x = S^{-1}y$$

Матрицы перехода всегда обратимы, следовательно можно утверждать, что

$$S A'_\varphi T^{-1} = A_\varphi$$

Или, что тоже самое

$$S^{-1} A_\varphi T = A'_\varphi$$

□

Линейные операторы

Последняя лекция предыдущего раздела была посвящена рассмотрению линейных отображений общего вида. Начиная с текущей, первой лекции второго раздела мы в большей степени будем рассматривать отображения, которые линейно преобразуют элементы из одного пространства.

Большая часть раздела будет посвящена так называемому *спектральному анализу* линейных отображений, который позволяет получить наиболее простое матричное представление отображения.

§1. Ядро и образ отображения

Прежде чем перейдем к рассмотрению линейных отображений, действующих как $\varphi : V \rightarrow V$ (эндоморфизмы), обсудим важные определения и утверждений, справедливые для отображений в общем виде, но наиболее ценные именно для эндоморфизмов.

Определение 1.1. Ядром линейного отображения $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ будем называть подмножество V , определенное как

$$\ker \varphi = \{x \in V : \varphi(x) = 0_W\}$$

Лемма 1.1. *Нейтральный элемент $0_V \in V(\mathbb{K})$ принадлежит ядру отображения φ .*

Доказательство.

$$\varphi(0_V) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0_W$$

□

Можно показать, что ядро линейного отображения образует не просто подмножество в V , но также обладает структурой линейного подпространства.

Лемма 1.2. *Ядро линейного отображения $\ker \varphi$ является линейным подпространством $V(\mathbb{K})$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $x_1, x_2 \in \ker \varphi$, принадлежащие ядру отображения φ . Их принадлежность ядру означает, что

$$\varphi(x_1) = 0 \quad \varphi(x_2) = 0$$

Рассмотрим линейную комбинацию элементов x_1 и x_2 с коэффициентами α_1 и α_2 после действия на нее отображением:

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2) = \alpha_1 \cdot 0_W + \alpha_2 \cdot 0_W = 0_W$$

Таким образом показано, что ядро замкнуто относительно линейных операций, а следовательно ядро является линейным подпространством. □

Результатом произвольного линейного отображения является элемент из $W(\mathbb{K})$, которое само обладает структурой линейного пространства.

Определение 1.2. Образом $\text{Im } \varphi$ линейного отображения $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ называется подмножество W , определяемое как

$$\text{Im } \varphi = \{y \in W : \exists x \in V, \varphi(x) = y\} = \varphi(V)$$

Лемма 1.3. Образ линейного отображения $\text{Im } \varphi$ является линейным подпространством $W(\mathbb{K})$.

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2 \in V$ произвольные элементы пространства V , которым соответствуют образы

$$y = \varphi(x) \quad y_1 = \varphi(x_1) \quad y_2 = \varphi(x_2)$$

Чтобы показать замкнутость образа отображения необходимо показать, что сумма двух образов также является образом:

$$y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \in W$$

Аналогично для умножения на скаляр:

$$\alpha y = \alpha \varphi(x) = \varphi(\alpha x) \in W$$

Следовательно образ замкнут относительно линейных операций, индуцированных из W , а значит является линейным подпространством. $\square$

Пример 1.1. (а) Рассмотрим пространство векторов на плоскости, а также отображение проектирования на направление, заданное вектором $\mathbf{a}$. Образом данного отображения будут являться все вектора, коллинеарные с вектором $\mathbf{a}$ (прямая на плоскости), а ядром — все векторы, которые перпендикулярны данному (включая нулевой вектор).

(б) Образом отображения, заданного как дифференцирование в пространстве полиномов степени не выше n , являются все полиномы степени не выше $n - 1$, а ядром — полиномы нулевой степени, т.е. просто скаляры.

(в) Рассмотрим также пространство квадратных матриц, на которых можно ввести отображение симметризации (антисимметризации). Образом симметризации будут, очевидно, симметричные матрицы того же порядка, а ядром — антисимметричные матрицы.

Теорема 1.1. Сумма размерностей ядра и образа линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ равна размерности пространства $V(\mathbb{K})$.

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$$

Доказательство. Для начала введем базис ядра отображения:

$$\ker \varphi: \quad \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

Дополним его до базиса пространства V :

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$$

Тогда для произвольного элемента $x \in V$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad \varphi(x) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=k+1}^n \xi^i \varphi(e_i),$$

учитывая, что отображение переводит базисные векторы ядра в нулевой элемент.

Набор векторов

$$\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$$

является полным, так как любой образ может быть представлен линейной комбинацией как было показано выше.

Покажем линейную зависимость от противного.

Пусть набор векторов $\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$ является линейно зависимым. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов, что

$$\alpha^{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha^n \varphi(e_n) = 0$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$z = \alpha^{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha^n e_n$$

и применим к ней отображение

$$\varphi(z) = \alpha^{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha^n \varphi(e_n) = 0$$

Это означает, что z принадлежит ядру отображения, но в то же время имеет нетривиальное разложение по базисным векторам, которые не принадлежат этому ядру — противоречие. Следовательно, набор $\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$ является линейно независимым. Из данных рассуждений также следует, что единственный вектор z , который можно представить в виде разложения как по базису $\ker \varphi$, так и по базису $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ — это нулевой вектор.

В силу того, что набор образует линейно независимый и полный набор, можно утверждать

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k$$

а следовательно

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} \varphi = k + (n - k) = n$$

□

Замечание 1.1. Эту теорему также называют **теоремой о ранге и дефекте**, называя рангом отображения размерность образа, а дефектом — размерность его ядра.

§2. Алгебра эндоморфизмов

Определение 2.1. **Линейным оператором (эндоморфизмом)** $\varphi : V \rightarrow W$ в линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется линейное отображение, если $V = W$.

Замечание 2.1. Множество линейных операторов в линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ будем обозначать $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Лемма 2.1. *Множество $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ вместе с операцией композиции образует некоммутативный моноид.*

Доказательство. Как было показано ранее, композиция линейных отображений является линейным отображением. Следовательно при рассмотрении $\varphi, \psi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ имеем, что $\chi = \psi \circ \varphi$ также принадлежит $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ в силу того, что оно является линейным отображением и действует как $\chi : V \rightarrow V$.

Для композиции линейных операторов справедлива ассоциативность, что по определению композиции проверяется тривиально

$$(\varphi \circ (\psi \circ \chi))(x) = \varphi(\psi(\chi(x))) = ((\varphi \circ \psi) \circ \chi)(x)$$

В множестве $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ существует нейтральный элемент — тождественное преобразование. Некоммутативность композиции очевидна. Откуда следует, что $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ действительно обладает структурой некоммутативного моноида. □

Лемма 2.2. *Множество $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ вместе с операциями сложения и композиции образует кольцо.*

Доказательство. Операции сложения и композиции согласованы:

$$\forall \varphi, \psi, \chi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \quad \varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi$$

Следовательно образуется структура кольца. □

Ранее также упоминалось, что любое множество линейных отображений $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ образует линейное пространство, значит и $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ также является линейным пространством. Такое множество, в котором может быть задана как структура кольца, так и структура линейного пространства, не является уникальным в случае множества эндоморфизмов.

Определение 2.2. Алгеброй $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство, снабженное структурой кольца, в котором все операции согласованы.

Теорема 2.1. Множество $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ образует алгебру над полем $\mathbb{K}$.

Теорема 2.2. Доказательство суммирует все предыдущие рассуждения.

В силу того, что любому линейному оператору в фиксированном базисе соответствует матрица, а операторные операции однозначно определяются матричными операциями, можно утверждать, что алгебра линейных операторов изоморфна алгебре квадратных матриц.

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$$

Для матриц была определена численная характеристика — определитель, которую мы связывали с критерием невырожденности матрицы. Аналогичную характеристику можно ввести и для линейных операторов.

Определение 2.3. Определителем линейного оператора называется определитель матрицы линейного оператора в фиксированном базисе.

$$\det \varphi = \det A_{\varphi}$$

Лемма 2.3. Определитель линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Действительно, для матрицы линейного оператора при замене базиса справедливо преобразование

$$A'_{\varphi} = T^{-1} A_{\varphi} T$$

Покажем независимость от выбора базиса пользуясь свойствами определителя

$$\det A'_{\varphi} = \det(T^{-1} A_{\varphi} T) = \det T^{-1} \det A_{\varphi} \det T = \frac{1}{\det T} \det A_{\varphi} \det T = \det A_{\varphi}$$

□

Таким образом имеем, что определение определителя оператора является корректным, т.к. матрица линейного оператора всегда является квадратной и ее определитель не зависит от базиса.

Определение 2.4. Линейный оператор $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ называется обратимым, если существует отображение $\psi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ такое, что

$$\psi \circ \varphi = \mathcal{I}, \quad \varphi \circ \psi = \mathcal{I}$$

Лемма 2.4. Линейный оператор является обратимым тогда и только тогда, когда его определитель не равен нулю.

Доказательство. Из изоморфности алгебр эндоморфизмов и квадратных матриц для обратимых элементов справедливо

$$\psi \circ \varphi = \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad A_\varphi \cdot B_\psi = E$$

Откуда следует, что если оператор φ обратим, то существует оператор ψ , имеющий матрицу такую, что $B_\psi = A_\varphi^{-1}$, а матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. $\square$

Отметим последний факт, который касается рассмотрения эндоморфизмов в контексте текущей лекции.

Замечание 2.2. Для эндоморфизма $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ справедливо, что его ядро и образ являются линейными подпространствами V , а также

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$$

Однако это не означает, что линейное пространство V всегда представимо в виде прямой суммы ядра и образа оператора. Следующий контрпример это демонстрирует.

Пример 2.1. Пусть $V = \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, а оператор определим как $\mathcal{D}^2(p) = \frac{d^2 p}{dx^2}$. Его образ и ядро будут совпадать:

$$\ker \mathcal{D}^2 = \text{Im } \mathcal{D}^2 = \mathbb{R}^{\leq 1}[x]$$

Иными словами, сумма размерностей ядра и образа действительно дает размерность пространства, но при этом в сумме имеем множество линейных полиномов, что очевидно не совпадает со всем пространством полиномов, степень которых не превышает 3.

Введение в спектральный анализ

Ранее было отмечено, что любому линейному оператору соответствует его матрица в фиксированном базисе. Однако матрицы могут быть различны по своей структуре и тогда может ставиться вопрос о поиске такого базиса, в котором матрица оператора принимает наиболее простой вид. Чтобы шаг за шагом прийти к способу нахождения такого базиса, сначала проведем предварительные рассуждения.

§1. Инвариантные подпространства

Определение 1.1. Подпространство $U \leq V$ называется *инвариантным* относительно оператора φ (φ -инвариантным), если $\varphi U \leq U$, то есть для любого $x \in U$ его образ $\varphi x \in U$.

Замечание 1.1. Нулевое подпространство и всё пространство V инвариантны для любого оператора. Любое подпространство, содержащееся в ядре оператора φ , и любое подпространство, содержащее его образ, φ -инвариантны. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами.

Пример 1.1. Пусть оператор — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Тогда $U_1 = \langle \mathbf{i} \rangle$ и $U_2 = \langle \mathbf{j} \rangle$ инвариантны, а $U_3 = \langle \mathbf{i} + \mathbf{j} \rangle$ — нет.

Пример 1.2. Инвариантные подпространства оператора дифференцирования в $\mathbb{R}^{\leq n}[x]$ имеют вид $\mathbb{R}^{\leq k}[x]$, $k \leq n$.

Ограничение (сужение) $\varphi|_U$ линейного оператора φ на инвариантное подпространство U является линейным оператором в U .

Если выбрать базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V так, чтобы инвариантное подпространство U было линейной обложкой первых k базисных векторов, то матрица оператора в этом базисе будет иметь вид $\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где B — матрица оператора $\varphi|_U$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_k$. Обратно, если матрица оператора φ имеет такой блочный вид (где B — квадратная матрица размера $k \times k$, а под ней матрица из нулей), то $U = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Если удаётся разложить V в прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ инвариантных подпространств V_i , то в базисе пространства V , составленном из базисов этих подпространств, матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{pmatrix},$$

где A_i — матрица оператора $\varphi|_{V_i}$. Из этого ясно, что поиск инвариантных подпространств является важным шагом в решении задачи поиска «наиболее простого» вида матрицы линейного оператора.

Пример 1.3. Для оператора дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_n$ инвариантные подпространства вложены друг в друга, поэтому ни у какого нетривиального инвариантного подпространства нет инвариантного прямого дополнения. Поэтому ни в каком базисе матрица этого оператора не может иметь блочно-диагональный вид.

Пример 1.4. Рассмотрим поворот на угол α вокруг какой-либо оси в пространстве E^3 . В ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 , если вектор e_3 направлен по оси поворота, матрица оператора поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

который согласуется с разложением E^3 в прямую сумму $E^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства, которые приводят к понятию собственного вектора.

§2. Собственные векторы и собственные значения

Определение 2.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* оператора φ , если $\varphi x = \lambda x$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом *собственным значением* (*собственным числом*) оператора φ , отвечающим собственному вектору x .

Собственный вектор порождает одномерное инвариантное подпространство. В базисе, составленном из собственных векторов (если он существует) матрица оператора имеет диагональный вид, что является «наиболее простым» видом.

Пример 2.1. а) Для нулевой оператора $\mathcal{O}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 0;

б) Для тождественного оператора $\mathcal{I}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 1;

в) Для оператора «растяжения» $\lambda \mathcal{I}$ каждый вектор является собственным с собственным значением λ ;

г) Собственные векторы оператора поворот на угол α в пространстве E^3 : если $\alpha \neq \pi k$, то это векторы, лежащие на оси поворота, собственное значение 1; если же $\alpha = \pi k$, то к ним добавляются векторы, перпендикулярные оси поворота, собственные значения $(-1)^k$;

д) $V = U \oplus W$, $\mathcal{P}$ — проектор на U параллельно W является линейным оператором в V . Известно, что $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Тогда если x — собственный вектор, то

$\lambda x = \mathcal{P}x = \mathcal{P}^2x = \mathcal{P}(\mathcal{P}x) = \mathcal{P}(\lambda x) = \lambda \mathcal{P}x = \lambda^2x$, значит λ равно 0 или 1. Любой вектор из U — собственный с собственным значением 1, из W — собственный с собственным значением 0.

е) Для оператора дифференцирования $\mathcal{D}: \mathbb{R}^{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ собственными являются константы, соответствующие собственному значению 0.

ж) Оператор транспонирования удовлетворяет условию $\mathcal{P}^2 = \mathcal{I}$. Аналогично д) можно показать, что собственные значения инволюции только ± 1 . В данном случае, значение 1 соответствует симметрическим матрицам, -1 — кососимметрическим.

Замечание 2.1. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным для оператора φ тогда и только тогда, когда подпространство $\ker(\varphi - \lambda \mathcal{I}) \leq V$ ненулевое, то есть когда оператор $\varphi - \lambda \mathcal{I}$ вырожден, то есть $\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = 0$.

Определение 2.2. Подпространство $\ker(\varphi - \lambda \mathcal{I})$ называется **собственным подпространством** оператора φ , соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ . Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой.

Замечание 2.2. Любое собственное подпространство оператора φ является φ -инвариантным.

Определение 2.3. *Геометрической кратностью* $g(\lambda)$ собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: $g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

§3. Характеристический многочлен

Для нахождения собственных подпространств удобнее сначала найти собственные значения из условия $\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = 0$. Пусть A_φ — матрица оператора φ в каком-либо базисе, тогда

$$\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Определение 3.1. Многочлен $\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n \det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = \det(\lambda \mathcal{I} - \varphi)$ называется **характеристическим многочленом** оператора φ . Корни характеристического многочлена называются **характеристическими числами** φ .

Замечание 3.1. Не каждое характеристическое число является собственным. Действительно, в согласии с основной теоремой алгебры, любой полином с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень, но не обязательно принадлежащий полю $\mathbb{R}$. Если оператор определен в вещественном линейном пространстве, то его характеристическими числами будут как комплексные, так и вещественные, но собственными будут только вещественные корни.

Определение 3.2. *Спектром* σ_φ линейного оператора φ называется множество его собственных значений.

Замечание 3.2. Также из основной теоремы алгебры следует, что количество корней полинома не превосходит его степень, а значит спектр линейного оператора состоит не более, чем из $n = \dim V$ собственных чисел.

Если из контекста ясно, о каком операторе идёт речь, индекс φ будем опускать.

Замечание 3.3. В силу того, что характеристический полином задается определителем оператора $\varphi - \lambda \mathcal{I}$, а определитель любого оператора не зависит от выбора базиса (инвариант относительно преобразований базиса), то можно утверждать, что и все его коэффициенты также от выбора базиса не зависят. Откуда следует, что к инвариантам оператора относится не только его определитель, но и след $\operatorname{tr} \varphi = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, потому что коэффициент перед λ^n в характеристическом полиноме буквально равен $(-1)^n \operatorname{tr} \varphi$.

Определение 3.3. *Алгебраической кратностью* $m(\lambda)$ собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

Замечание 3.4. Если $\lambda \in \sigma$ является собственным числом оператора φ , то $\varphi - \lambda \mathcal{I}$ — является вырожденным оператором в силу равенства нулю его определителя. Следовательно, ядро этого оператора $\ker(\varphi - \lambda \mathcal{I})$ содержит хотя бы один ненулевой вектор.

Лемма 3.1. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство $V_\mu \leq V$, оно инвариантно, следовательно, в согласованном базисе матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \mu E & D \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

матрица μE квадратная размера $g(\mu)$. Тогда характеристический многочлен имеет вид $\chi(\lambda) = (\mu - \lambda)^{g(\mu)} \cdot f(\lambda)$, $f(\lambda) = \det(C - \lambda E)$. Так как у многочлена f может быть корень μ , то $m(\mu) \geq g(\mu)$.

§4. Собственный базис и диагонализируемость

Определение 4.1. Подпространства $V_1, \dots, V_k$ называются *линейно независимыми*, если равенства $v_1 + \dots + v_k = 0$, $v_k \in V_k$ следует, что $v_1 = \dots = v_k = 0$.

Замечание 4.1. Можно сказать, что разложение пространства V в прямую сумму подпространств $V_1, \dots, V_k$ — это разложение в сумму линейной независимых подпространств $V_1, \dots, V_k$.

Теорема 4.1. Собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ оператора φ линейно независимы.

Доказательство. Индукция по k . При $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и $x_1 + \dots + x_k = 0$. Применим к обеим частям оператор φ :

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0.$$

Вычтем из этого равенства равенство $x_1 + \dots + x_k = 0$, умноженное на λ_k , получим

$$(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

Каждое из слагаемых лежит в соответствующем подпространстве. Так как по предположению индукции они линейно независимы и рассматриваются разные собственные значения, то $x_1 = \dots = x_{k-1} = 0$. Но тогда и $x_k = 0$.

Следствие 4.1.1. Если характеристический многочлен оператора имеет $n = \dim V$ различных корней (оператор с **простым спектром**), то существует базис из собственных векторов этого оператора.

Замечание 4.2. Данное условие не является необходимым для существования собственного базиса. Например, любой базис состоит из собственных векторов тождественного оператора, однако его характеристический многочлен имеет единственный корень 1 (кратности n).

Определение 4.2. Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется **диагонализируемым**, если существует базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Другими словами, диагонализируемость оператора эквивалентна существованию собственного базиса.

Пусть оператор φ диагонализируем и $V = \bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i}$. Рассмотрим проектор $\mathcal{P}_i$ на подпространство V_{λ_i} параллельно прямой сумме оставшихся подпространств.

Тогда $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i = \mathcal{I}$. Легко проверяется, что

оператор φ действует на любой вектор так же, как оператор $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathcal{P}_i$. Выражение

$\varphi = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathcal{P}_i$ называется **спектральным разложением** оператора φ .

Теорема 4.2. (**критерий диагонализируемости**)

Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то есть все его корни лежат в поле $\mathbb{K}$;

- *Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.*

Доказательство. Диагонализируемость эквивалентна наличию собственного базиса, откуда следует, что $V = \bigoplus_{i=1}^n V_{\lambda_i}$ (объединение базисов собственных подпространств — собственный базис V), но тогда $n = \dim V = g(\lambda_1) + \dots + g(\lambda_k)$. Но $m(\lambda_i) \geq g(\lambda_i)$, а $m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_k) \leq \deg \chi_\varphi = n$. Отсюда следует, что $n = g(\lambda_1) + \dots + g(\lambda_k)$ тогда и только тогда, когда $m(\lambda_i) = g(\lambda_i)$.

Пример 4.1. Пусть φ — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат декартовой плоскости. В ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\chi_\varphi(t) = t^2 + 1$. Его корни не лежат в поле $\mathbb{R}$. Поэтому, оператор φ не диагоналируем над $\mathbb{R}$. Если же рассмотреть ту же матрицу над полем $\mathbb{C}$, то она оказывается подобной матрице

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Пример 4.2. Пусть $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_1$. В базисе $x, 1$ его матрица оператора вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\chi_{\mathcal{D}}(t) = t^2$. Его корень 0 кратности 2 лежит в поле $\mathbb{R}$. $\text{Ker}(\mathcal{D} - 0I) = \mathbb{R}[x]_0$, $\dim \text{Ker}(\mathcal{D} - 0I) = 1$. Оператор $\mathcal{D}$ не диагоналируем.

Корневые пространства

Диагональная матрица как раз и является «наиболее простым» видом матрицы линейного оператора. Если мы смогли привести матрицу оператора к диагональному виду, то легко можем найти любую степень оператора. Это открывает путь к вычислению, например, многочленов от операторов. Но как показывает предыдущий пример, линейный оператор может не иметь собственного базиса из даже в том случае, когда все корни его характеристического многочлена лежат в поле, над которым определено векторное пространство. Далее мы введём понятие корневого вектора, обобщающее понятие собственного вектора, и покажем, что в случае, когда спектр линейного оператора содержится в поле, над которым определено векторное пространство, пространство раскладывается в прямую сумму так называемых корневых подпространств.

§1. Корневые векторы и корневые подпространства

Определение 1.1. Вектор $x \in V$ называется **корневым вектором** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda \in F$, если существует такое целое неотрицательное число k , что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k x = 0$. Наименьшее такое k называется **высотой** корневого вектора x .

Замечание 1.1. Если x — корневой вектор высоты k , то $\tilde{x} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})x$ является корневым вектором высоты $k - 1$.

Пример 1.1. а) Корневые векторы высоты 0 — нулевые векторы;

б) Корневые векторы высоты 1 — собственные векторы;

в) Каждый многочлен есть корневой вектор с собственным числом 0 оператора дифференцирования пространства многочленов, причём высота многочлена как корневого вектора равна $n + 1$, где n — степень этого многочлена;

Пример 1.2. Пусть V — пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с вещественными значениями, $\mathcal{D}$ — оператора дифференцирования. Тогда:

1) $f \in V$ — собственный с собственным значением λ : $\mathcal{D}f = f' = \lambda f$. Следовательно $\frac{f'}{f} = \lambda \Leftrightarrow \ln |f| = \lambda x + C \Leftrightarrow |f| = e^C e^{\lambda x} \Leftrightarrow f = C e^{\lambda x}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Корневые векторы: положим $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$, $g \in V$, тогда $(\mathcal{D} - \lambda\mathcal{E})f = f'(t) - \lambda f(t) = \lambda e^{\lambda t} g(t) + e^{\lambda t} g'(t) - \lambda f(t) = e^{\lambda t} g'(t)$. То есть f — корневой тогда и только тогда, когда существует такое k , что $g^{(k)}(t) = 0$, то есть $g \in \mathbb{R}[t]$. Таким образом, корневые векторы для оператора дифференцирования — это функции вида $e^{\lambda t} g(t)$, где $g(t)$ — многочлен. Высота такого корневого вектора равна $\deg g + 1$. Они называются квазимногочленами. Вспомните о них, когда будете изучать линейные дифференциальные уравнения ☺

Корневые векторы, отвечающие собственному значению λ , высоты $\leq k$ — это $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \leq V$. Возникает цепочка подпространств

$$V_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \leq \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \leq \dots \leq \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \leq \dots \leq V^\lambda,$$

где $V^\lambda = \{\text{все корневые векторы с собственным значением } \lambda\}$ — **корневое подпространство** с собственным значением λ :

$$V^\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^i.$$

В конечномерном случае эта цепочка с некоторого момента стабилизируются — размерности подпространств растут до тех пор, пока мы не дойдём до размерности корневого подпространства. Будем считать, что $\dim V < \infty$.

Теорема 1.1. (свойства корневых подпространств)

- 1) V^λ $\mathcal{A}$ -инвариантно;
- 2) $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = \mathcal{N}$ — **нильпотентный** оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m , то $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$;
- 3) $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ невырожден при $\mu \neq \lambda$;
- 4) $\dim V^\lambda = m(\lambda)$ (геометрический смысл алгебраической кратности).

Доказательство.

1) Пусть $V_k^\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k$, тогда $V_\lambda \leq V_1^\lambda \leq V_2^\lambda \leq \dots \leq V_m^\lambda = V^\lambda$. Заметим, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})V_k^\lambda \leq V_{k-1}^\lambda \leq V_k^\lambda$. То есть, V_k^λ инвариантно относительно $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, следовательно, V_k^λ и $\mathcal{A}$ -инвариантно. Это верно и для $V_m^\lambda = V^\lambda$.

2) Выберем в V^λ базис, согласованный с цепочкой подпространств $V_i^k: e_1, \dots, e_{l_1}$ — базис V_1^λ , $e_1, \dots, e_{l_1}, \dots, e_{l_2}$ — базис V_2^λ и т.д., $e_1, \dots, e_{l_m}$ — базис $V_m^\lambda = V^\lambda$. $\mathcal{N}(V_k^\lambda) \leq V_{k-1}^\lambda$ (положим $V_0^\lambda = \{0\}$). Из этого следует, что $\mathcal{N}e_j \in \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle$, следовательно $\mathcal{N}^{l_m} = \mathcal{O}$, где $l_m = \dim V^\lambda$.

3) В базисе $e_1, \dots, e_{l_1}, \dots, e_{l_m}$ матрица оператора $\mathcal{N}$ верхнетреугольная с нулями на главной диагонали (**верхненильтреугольная**), тогда матрица оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = \mathcal{N} + \lambda\mathcal{E}$ верхнетреугольная с λ -ми на главной диагонали, а матрица оператора $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ верхнетреугольная с $\lambda - \mu$ на главной диагонали. Следовательно (так как $\lambda \neq \mu$) она невырожденная и, значит, оператор $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ тоже невырожден.

4) Дополним базис V^λ до базиса всего пространства V . В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-треугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}|_{V^\lambda} & D \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}|_{V^\lambda}}(t) \det(tE - C) = (t - \lambda)^{l_m} \det(tE - C)$. Нужно показать, что λ не является собственным значением оператора C в пространстве $\langle e_{l_m+1}, \dots, e_n \rangle$ с матрицей C . Пусть существует такой вектор $0 \neq x \in \langle e_{l_m+1}, \dots, e_n \rangle$, что

$Cx = \lambda x$. Это означает, что $Ax = \lambda x + y$, $y \in V^\lambda$. Следовательно, $(A - \lambda E)x = y$ — корневой вектор, но тогда и x — корневой вектор, что противоречит определению V^λ .

Теорема 1.2. *Корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы для собственных подпространств.

Теорема 1.3. *Базис пространства V может быть образован объединением базисов корневых подпространств.*

Доказательство. Корневые подпространства линейно независимы, а значит их сумма является прямой. Сумма размерностей корневых пространств дает размерность линейного пространства V :

$$\sum_i \dim V^{\lambda_i} = \sum_i m(\lambda_i) = n = \dim V$$

Следовательно, пространство V может быть представлено

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_p},$$

где p — количество различных собственных чисел.

Из разложения в прямую сумму следует справедливость утверждения. $\square$

§2. Структура нильпотентных операторов

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m , что $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$. Наименьшее из таких m называют **высотой** нильпотентного оператора. Для него все векторы V — корневые с собственным значением 0, высоты не больше m .

Пример 2.1. Оператор дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ — нильпотентный высоты $n + 1$.

В силу пункта 3 теоремы 7.1 изучение произвольного оператора сводится к изучению нильпотентного оператора на соответствующем корневом подпространстве.

Лемма 2.1. *Пусть $x \in V$ — вектор высоты $k > 0$. Тогда векторы $x, \mathcal{N}x, \dots, \mathcal{N}^{k-1}x$ линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по k . Если $k = 1$, в этом случае $x \neq 0$ и доказывать нечего. Пусть $\alpha_0 x + \alpha_1 \mathcal{N}x + \dots + \alpha_{k-1} \mathcal{N}^{k-1}x = 0$. Применим оператор $\mathcal{N}$ к обеим частям равенства, получим $\alpha_0 \mathcal{N}x + \alpha_1 \mathcal{N}^2x + \dots + \alpha_{k-2} \mathcal{N}^{k-1}x = 0$, так как

$\mathcal{N}^k x = 0$. Пусть $\mathcal{N}x = y$, его высота $k-1$ и $\alpha_0 y + \alpha_1 \mathcal{N}y + \dots + \alpha_{k-2} \mathcal{N}^{k-2} y = 0$. Поскольку по предположению индукции векторы $y, \mathcal{N}y, \dots, \mathcal{N}^{k-1}y$ линейно независимы, то $\alpha_0 = \dots = \alpha_{k-2} = 0$. Но тогда и $\alpha_{k-1} \mathcal{N}x = 0$. Так как высота x равна k , то $\mathcal{N}^{k-1}x \neq 0$, значит, $\alpha_{k-1} = 0$, следовательно, $x, \mathcal{N}x, \dots, \mathcal{N}^{k-1}x$ линейно независимы.

Определение 2.1. Подпространство $U = \langle x, \mathcal{N}x, \mathcal{N}^2x, \dots \rangle$ называется **циклическим подпространством** нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, порождённым вектором x .

Циклическое подпространство U — наименьшее $\mathcal{N}$ -инвариантное подпространство, содержащее x , $\dim U = k$, где k — высота вектора x .

Базис U : $x_1, x_2, \dots, x_k$, где $x_i = \mathcal{N}^{k-i}x$. Такой базис называется **жордановой цепочкой**: $0 \xleftarrow{\mathcal{N}} x_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} x_2 \xleftarrow{\mathcal{N}} \dots \xleftarrow{\mathcal{N}} x_{k-1} \xleftarrow{\mathcal{N}} x_k$, то есть первый вектор переходит при действии $\mathcal{N}$ в нулевой, второй — в первый и т.д, последний — в предпоследний. Следовательно, матрица оператора $\mathcal{N}$ в базисе $x_1, x_2, \dots, x_k$ имеет вид

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

называемый **нильпотентной жордановой клеткой** порядка k .

Пример 2.2. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}: \mathbb{R}[x]_7 \rightarrow \mathbb{R}[x]_7$, $f_i = \frac{x^k}{k!}$, $i = \overline{0, 7}$ — базис $\mathbb{R}[x]_7$. Действие $\mathcal{N}$ на базисных векторах даёт следующие жордановы цепочки

$$\begin{aligned} 0 &\xleftarrow{\mathcal{N}} f_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_3 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_5 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_7, \\ 0 &\xleftarrow{\mathcal{N}} f_0 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_2 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_4 \xleftarrow{\mathcal{N}} f_6. \end{aligned}$$

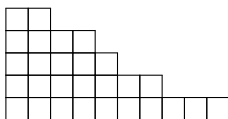
Теорема 2.1. (основная теорема о структуре нильпотентного оператора)

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор на V . Тогда существует разложение пространства V в прямую сумму циклических подпространств этого оператора $V = \bigoplus U_i$. Количество слагаемых в таком разложении равно $\dim \ker \mathcal{N}$.

Пример 2.3. В предыдущем примере $\mathbb{R}[x]_7 = \langle f_1, f_3, f_5, f_7 \rangle \oplus \langle f_0, f_2, f_4, f_6 \rangle$. $\dim \ker \mathcal{N} = \dim \langle f_0, f_1 \rangle = \dim \mathbb{R}[x]_1 = 2$. Нетрудно заметить, что в данном случае разложение в прямую сумму циклических — это разложение в прямую сумму подпространств чётных и нечётных многочленов степени не выше 7.

Определение 2.2. Жордановым базисом пространства V относительно оператора $\mathcal{A}$ называется базис, построенный как совокупность жордановых цепочек всех циклических подпространств для всех корневых подпространств.

Наглядно можно изображать структуру нильпотентного оператора с помощью так называемой **диаграммы Юнга**, которая в данном случае схематически показывает, как действует нильпотентный оператор на базисных векторах жорданова базиса:



С помощью такой диаграммы нильпотентный оператор задаётся однозначно. Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

- Высота строки соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора (линейной комбинации базисных) определяется как наибольшая высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом
- i -тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства U_i
- Ядро оператора $\mathcal{N}^k$ — линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k
- Векторы, лежащие в нижней строке, при действии оператора переходят в нулевые

Пример 2.4. Для примеров 8.2 и 8.3 диаграмма Юнга имеет вид:

f_7	f_6
f_5	f_4
f_3	f_2
f_1	f_0

Высота вектора $2f_4 - 8f_1$ равна $\max\{3, 1\} = 3$, $\ker \mathcal{N}^2 = \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle$.

Жорданова нормальная форма

В этой лекции мы перейдем к рассмотрению вида линейного оператора в жордановом базисе. Как было уже отмечено, если оператор не является диагонализуемым, для него также может быть получен "достаточно простой" вид в некотором базисе. Следовательно вытекает вопрос о структуре этого матричного представления оператора и построения самого базиса, в котором оператор имеет такой вид.

§1. Жорданова нормальная форма

Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$ — линейный оператор, для которого найдено собственное значение λ . Для начала рассмотрим сужение нильпотентного оператора $\mathcal{N} = (\varphi - \lambda \mathcal{I})|_{U^\lambda}$ на одно из его возможных циклических подпространств U^λ . Оно может быть представлено, по определению, как линейная оболочка над соответствующей жордановой цепочкой $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. При этом

$$x_i = \mathcal{N}^{k-i} x_k$$

В базисе циклического подпространства операторы будут иметь следующее матричное представление

$$\mathcal{N} \leftrightarrow J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \mathcal{I} \leftrightarrow \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Откуда следует, что сужение оператора φ на данное подпространство в этом базисе имеет матрицу $J(\lambda)$

$$\varphi|_{U^\lambda} \leftrightarrow J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 1.1. Жордановой клеткой называется верхнетреугольная матрица $J(\lambda) = J(0) + \lambda E$ соответствующая сужению линейного оператора φ на циклическое подпространство, найденная в базисе этого циклического подпространства (жордановой цепочки).

Обратим внимание, что данная матрица в точности согласуется с построением по определению. Для получения матрицы любого оператора в некотором базисе, необходимо действовать на базисные векторы. Пусть x_k — элемент жордановой цепочки. Подействуем сужением оператора $\varphi|_{U^\lambda}$ на это циклическое подпространство.

$$\varphi|_{U^\lambda}(x_k) = (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{N})(x_k) = \lambda \mathcal{I}x_k + \mathcal{N}x_k = \lambda x_k + x_{k-1}$$

Откуда мы действительно можем получить координатное представление для образов векторов x_k , находящиеся в столбцах жордановой клетки.

Допустим теперь, что корневое подпространство V^λ состоит из нескольких циклических подпространств. Это соответствует случаю, когда диаграмма Юнга содержит более одного столбца. Ранее мы утверждали, что корневое подпространство может быть представлено в виде прямой суммы циклических:

$$V^\lambda = U_1^\lambda \oplus U_2^\lambda \oplus \dots \oplus U_g^\lambda$$

При этом матрица оператора в базисе, согласованном с каждым из этих подпространств, имеет блочно-диагональный вид. Таким образом имеем следующее определение.

Определение 1.2. Жордановым блоком, соответствующим собственному числу λ оператора φ , называется блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.

И, наконец, все пространство V , в котором действует оператор φ , имеющий полный набор собственных значений (сумма кратностей собственных чисел равна размерности пространства), представляется в виде прямой суммы корневых подпространств

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_m}$$

Следовательно и в базисе пространства V , согласованном с каждым из этих подпространств, матрица оператора имеет блочно-диагональный вид.

Определение 1.3. Жордановой нормальной формой оператора φ , называется блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых блоков, соответствующих всем собственным значениям.

Теорема 1.1. Если характеристический полином оператора φ может быть представлен в виде произведения линейных множителей, существует базис (жорданов), в котором матрица оператора представляет собой жорданову нормальную форму.

Доказательство. Пусть характеристический полином оператора представляет собой произведение линейных множителей

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

Тогда каждое собственное число порождает корневое подпространство V^{λ_i} , сумма размерностей которых равна размерности пространства V , а каждое из этих подпространств представляется в виде прямой суммы циклических подпространств соответствующих нильпотентных операторов.

Объединение базисов в силу разложений в прямые суммы позволяет получить базис всего пространства V , при этом матрица оператора в этом базисе согласована с определением жордановой нормальной формы. $\square$

Следствие 1.1.1. *Любой оператор в комплексном линейном пространстве $V(\mathbb{C})$ имеет жорданову нормальную форму.*

Доказательство. В силу основной теоремы алгебры и ее следствий каждый полином имеет разложение в линейные множители над полем комплексных чисел. $\square$

О структуре ЖНФ

Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$ — линейный оператор в комплексном линейном пространстве, $\sigma = \{\lambda_1^{(m_1)}, \dots, \lambda_p^{(m_p)}\}$ — спектр оператора, где в верхнем индексе указана алгебраическая кратность. Пусть также набор чисел $\{g_1, \dots, g_s\}$ — геометрические кратности этих собственных чисел.

- Количество жордановых блоков равняется количеству *различных* собственных чисел s , что также равняется количеству диаграмм Юнга, если полагать, что одна диаграмма — одно собственное число.
- Размерность жорданова блока равняется алгебраической кратности m_i собственного числа λ_i и количеству "клеточек" в соответствующей диаграмме Юнга.
- Количество жордановых клеток в блоке равняется геометрической кратности g_i собственного числа λ_i или количеству столбцов в диаграмме Юнга, относящихся к этому собственному числу.
- Размеры жордановых клеток соответствуют высоте столбцов в диаграмме Юнга и не превышают максимальную высоту корневых векторов данного корневого подпространства.

§2. Построение жорданова базиса

Есть два основных подхода для построения самого жорданова базиса. Мы можем их сформулировать исходя из диаграммы Юнга — визуального представления этого базиса.

- Первый подход: искать корневые векторы максимальной высоты и достраивать жордановы цепочки до собственных векторов. **Путь сверху вниз.**
- Второй подход: находить собственные векторы и искать для них все корневые вплоть до корневого вектора максимальной высоты. **Путь снизу вверх.**

Первый подход в большей степени используется в системах компьютерной алгебры. Дело в том, что подходящих «самых высоких» векторов оказывается столь много, что с большой вероятностью подойдут какие-то векторы стандартного базиса или их нехитрые линейные комбинации.

Для этого можно придерживаться следующего алгоритма, полагая, что спектр оператора уже известен:

- Строим нильпотентные операторы $\mathcal{N}_i = \varphi - \lambda_i \mathcal{I}$ и соответствующие им матрицы пока что в некоем стандартном базисе.
- Находим порядок нильпотентности оператора, тем самым находя максимальную высоту корневых векторов k .
- Ищем базис $\ker \mathcal{N}^k$, тем самым получая один и более корневых векторов максимальной высоты (верхнюю строчку диаграммы Юнга) таких, что они не переходят в нулевой вектор при действии оператором $\mathcal{N}^{k-1}$.
- Действуем на них нильпотентным оператором, чтобы получить корневые векторы меньшей высоты вплоть до нулевого, тем самым получая соответствующие жордановы цепочки (столбцы диаграммы Юнга с максимальной высотой).
- При необходимости дополняем векторы высоты i до базиса $\ker \mathcal{N}^i$, что соответствует самым "верхним" векторам диаграммы Юнга в столбцах меньшей высоты, чем максимальная. К ним также применяем предыдущий пункт вплоть до нулевого.

Пример 2.1. Найдём ЖНФ и жорданов базис оператора $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

Несложно показать, что его спектр будет состоять только из одного собственного значения $\lambda = 1$ кратности $m = 4$. По теореме оператор может быть приведен к ЖНФ, которую мы сейчас попытаемся построить.

Геометрическая кратность этого собственного значения $g = 2$, т.к. этому числу равняется размерность ядра оператора $\varphi - \mathcal{I}$, имеющее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Следовательно жорданова нормальная форма будет состоять из одного блока, а он — из двух клеток. Построим матрицы операторов $\mathcal{N}^k = (\varphi - \mathcal{I})^k$, пока все пространство не станет корневым для него. Эта ситуация достигается при $k = 3$ — убедитесь в этом.

"Самый высокий" вектор должен обнулять матрицу $(A - E)^3$ и не должен обнулять матрицу $(A - E)^2$. Так как

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

то в качестве "самого высокого" вектора e_4 жорданова базиса можно взять первый, второй или четвёртый векторы стандартного базиса, так как их образы не являются нулевыми (именно они записаны в первом, втором и четвёртом столбцах матрицы). Пусть $e_4 = (1, 0, 0, 0)^T$. Тогда $(A - E)e_4 = e_3$, $(A - E)^2 e_4 = (A - E)e_3 = e_2$:

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ровно это мы и ожидали получить ☺

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти e_1 . Он дополняет вектор e_2 до базиса $\ker(\varphi - \mathcal{I})$, поэтому можно взять любой вектор из этого ядра, линейно независимый с e_2 , например, $e_1 = (0, 0, 1, 0)^T$.

Итак, у нас следующий жорданов базис: $e_1 = (0, 0, 1, 0)^T$, $e_2 = (3, 1, 3, 1)^T$, $e_3 = (0, -2, 0, -1)^T$, $e_4 = (1, 0, 0, 0)$, а ЖНФ в соответствии с этим выглядит следующим образом:

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функциональное исчисление операторов

В этой лекции мы перейдем к рассмотрению вида линейного оператора в жордановом базисе. Как было уже отмечено, если оператор не является диагонализуемым, для него также может быть получен "достаточно простой" вид в некотором базисе. Следовательно вытекает вопрос о структуре этого матричного представления оператора и построения самого базиса, в котором оператор имеет такой вид.

§1. Операторные полиномы

Пусть $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m \in \mathbb{K}[t]$ — полином степени m с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, а также $\varphi \in \text{End}(V)$, где размерность пространства V равна $n = \dim V$.

Определение 1.1. Операторным полиномом (полиномом от оператора) называют линейный оператор $p(\varphi)$ такой, что

$$p(t) \mapsto p(\varphi) = a_0I + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \dots + a_m\varphi^m \in \text{End}(V)$$

Если в некотором базисе линейному оператору φ сопоставляется матрица $A_\varphi \in M_n(\mathbb{K})$, то $p(\varphi)$ в том же базисе имеет матрицу

$$p(A_\varphi) = a_0E + a_1A_\varphi + a_2A_\varphi^2 + \dots + a_mA_\varphi^m \in M_n(\mathbb{K})$$

Рассмотрим связь операторных полиномов с инвариантными подпространствами оператора.

Лемма 1.1. *Подпространство $U \leq V$, которое инвариантно относительно оператора φ будет также инвариантно относительно операторного полинома $p(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть $U \leq V$ такое, что $\varphi U \leq U$. Откуда следует, что подпространство U будет обладать тем же свойством относительно любой степени оператора $\varphi^k U \leq U$. Так как операторный полином $p(\varphi)$ определяется линейной комбинацией степеней оператора φ , то и подпространство U будет инвариантно относительно $p(\varphi)$. $\square$

Более того можно заметить, что существует связь между сужениями оператора и операторного полинома на одного и то же инвариантное подпространство:

$$p(\varphi|_U) = p(\varphi)|_U$$

Одним из важнейших классов операторных полиномов являются те, которые обращают его в нулевой оператор.

Определение 1.2. Аннулирующим полиномом оператора называют полином $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ такой, что соответствующий ему операторный полином равен нулевому оператору:

$$p(\varphi) = \Theta$$

Для каждого линейного оператора существует аннулирующий полином и в частности это утверждает следующая теорема.

Теорема 1.1. (Гамильтона-Кэли) Характеристический полином $\chi(t)$ является аннулирующим полиномом.

$$\chi(\varphi) = \Theta$$

Доказательство. Покажем справедливость теоремы в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$, т.е. такого, что характеристический полином представляет в виде произведения линейных множителей. В качестве такого поля может рассматриваться, например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, для которого известна основная теорема алгебры, следствием которой и является существование данного разложения.

Характеристический полином в этом случае может быть представлен в виде

$$\chi(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{m_s}$$

и благодаря ему может быть построен соответствующий операторный полином

$$\chi(\varphi) = (-1)^n (\varphi - \lambda_1 \mathcal{I})^{m_1} \cdot \dots \cdot (\varphi - \lambda_s \mathcal{I})^{m_s}$$

Произвольный оператор порождает разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств такого типа

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s, \quad V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$$

Подпространство $V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$, как мы показывали ранее, является φ -инвариантным. При этом сужение оператора $\varphi|_{V_i} = \varphi_i$ на это подпространство очевидно определяется через нильпотентный оператор, который определяет множитель $\chi_i(t)$ характеристического полинома

$$\chi_i(\varphi_i) = (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i} = \mathcal{N}^{m_i}|_{V_i},$$

Нильпотентный оператор в V_i есть ровно нулевой оператор, т.к. порядок нильпотентности $k_i \leq m_i$. Следовательно

$$\chi_i(\varphi_i) = \Theta \quad \Rightarrow \quad \chi(\varphi_i) = \chi(\varphi)|_{V_i} = \Theta,$$

потому что если один множитель аннулирует, то аннулирует и весь полином, а также верна связь между сужениями оператора и операторного полинома.

Суммируя эти рассуждения, можно утверждать, что характеристический полином есть аннулирующий полином на каждой компоненте разложения пространства в прямую сумму, а значит является аннулирующим во всем пространстве V . $\square$

§2. Функциональное исчисление диагонализуемых операторов

Лемма 2.1. *Для произвольной степени $m \in \mathbb{N}$ диагонализуемого оператора $\varphi \in \text{End}(V)$ справедливо*

$$\varphi^m = \sum_{i=1}^s \lambda_i^m \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i$ — спектральные проекторы на подпространства, соответствующие собственному числу λ_i .

Доказательство. Докажем по индукции. В случае $m = 1$ утверждение справедливо в силу спектрального разложения диагонализуемого оператора

$$\varphi = \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathcal{P}_i$$

Предположим, что утверждение теоремы справедливо для произвольного $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим

$$\varphi^{m+1} = \varphi^m \circ \varphi = \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i^m \mathcal{P}_i \right) \circ \varphi = \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i^m \mathcal{P}_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^s \lambda_j \mathcal{P}_j \right),$$

где мы вновь воспользовались спектральным разложением. Помня о том, что $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$ и $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \Theta$, если $i \neq j$, закончим вычисление суммы

$$\varphi^{m+1} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \lambda_i^m \lambda_j \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \sum_{i=1}^s \lambda_i^{m+1} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^s \lambda_i^{m+1} \mathcal{P}_i$$

Случай $m = 0$ также этому удовлетворяет, если положить $\varphi^0 = \mathcal{I}$, для которого известно, что

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^s \mathcal{P}_i$$

□

Следствие 2.0.1. *Для операторного полинома от диагонализуемого оператора справедливо*

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^s p(\lambda_i) \mathcal{P}_i$$

Доказательство. Построим операторный полином с произвольными коэффициентами

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^s a_k \varphi^k = \sum_{k=0}^s a_k \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i^k \mathcal{P}_i \right) = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=0}^s a_k \lambda_i^k \right) \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^s p(\lambda_i) \mathcal{P}_i$$

□

Рассмотрим $A_\varphi^D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — матрицу диагонализуемого оператора φ в базисе из собственных векторов. Тогда из последнего утверждения следует, что

$$p(A_\varphi^D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

где в данной записи предполагается, что λ_i не обязательно различны.

Данный способ работает и для нахождения произвольных аналитических функций от операторов и их матриц. **Аналитическая функция** f задаётся сходящимся степенным рядом $f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_m(t - t_0)^m + \dots$, $t_0 \in \mathbb{C}$. При рассмотрении таких функций естественным образом появляются вопросы о сходимости, т.к. данный ряд в общем случае представляется бесконечным, но мы в рамках нашего курса предположим, что все нужные свойства выполняются.

При данных предположениях мы можем провести те же самые рассуждения, чтобы получить аналогичный полиномам результат

$$f(\varphi) = \sum_{i=1}^s f(\lambda_i) \mathcal{P}_i \quad \Rightarrow \quad f(A_\varphi^D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

§3. Функциональные исчисление ЖНФ

Перейдем к общему случаю, когда для оператора невозможно найти базис, в котором его матрица будет диагональна, но можно построить жорданову нормальную форму. Это возможно в базисе (жордановом), согласованном со всеми корневыми подпространствами. Их наличие позволяет разложить пространство в прямую сумму

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s, \quad V_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i},$$

где каждое из подпространств V_i представляется в виде прямой суммы циклических подпространств.

Пусть U_i — циклическое подпространство, в котором действует сужение оператора

$$\varphi_i = \varphi|_{U_i} = \lambda_i \mathcal{I}_i + \mathcal{N}_i,$$

где $\mathcal{I}_i$ — тождественный оператор в U_i , а $\mathcal{N}_i$ — соответствующий циклическому подпространству нильпотентный оператор.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$ — линейный оператор, для которого существует полный набор собственных чисел, т.е. такой, что сумма алгебраических кратностей равна размерности пространства $\sum_{i=1}^s m_i = n = \dim V$. Тогда

$$\varphi = \sum_{i=1}^s \varphi_i \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^s (\lambda_i \mathcal{I}_i + \mathcal{N}_i) \mathcal{P}_i,$$

где $\mathcal{P}_i$ — проекторы на циклические подпространства U_i , а $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству спектрального разложения. $\square$

Оператор в базисе, согласованном с ними, принимает вид блочно-диагональной матрицы, где каждый блок представляет собой жорданову клетку (матрицу сужения оператора на циклическое подпространство), а совокупность жордановых клеток образует жорданов блок. Иными словами, мы в любом случае имеем блочно-диагональную матрицу.

Лемма 3.1. Блочно-диагональный вид матрицы оператора в базисе, согласованном с инвариантными подпространствами, сохраняется при возведении оператора в степень

$$A_{\varphi}^m = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^m & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s^m \end{pmatrix}$$

Доказательство. Напрямую следует из ранее обсуждаемого факта

$$\varphi U \leq U \quad \Rightarrow \quad \varphi^m U \leq U$$

$\square$

Из этих утверждений следует, что при рассмотрении аналитических функций от операторов и их жордановых форм достаточно ограничиться построением действия функции на одну жорданову клетку или, что тоже самое, на сужение оператора на циклическое подпространство).

Для вычисления аналитической функции воспользуемся разложением в ряд Тейлора в точке $t_0 = \lambda_i$

$$f(\varphi_i) = f(\lambda_i) \mathcal{I} + \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \cdot (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I}) + \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) \cdot (\varphi_i - \lambda_i \mathcal{I})^2 + \dots$$

Обратим внимание на возникающие разности в каждом слагаемом, которые дают степени нильпотентного оператора

$$f(\varphi_i) = f(\lambda_i) \mathcal{I} + \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \cdot \mathcal{N}_i + \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) \cdot \mathcal{N}_i^2 + \dots + \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda_i) \mathcal{N}_i^r$$

Данная сумма будет конечна в силу нильпотентности оператора, а последнее слагаемое будет соответствовать максимальной ненулевой степени r этого оператора. Таким образом становится легко вычислимой функция от сужения оператора на циклическое подпространство. В жордановом базисе она будет представлена верхнетреугольной матрицей следующего вида

$$f(\varphi_i) \mapsto f(J(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{r!}f^{(r)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda_i) \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Откуда следует, что функция от жордановой нормальной формы представляет собой блочно-диагональную матрицу, каждая жорданова клетка которой имеет представленный вид.

Для поиска функции от матрицы оператора в произвольном базисе достаточно найти функцию от жордановой нормальной формы, а затем произвести преобразование базиса.

$$f(A_\varphi) = T^{-1}f(J)T$$

Евклидово пространство

Содержание

§1	Метрическое и нормированное пространства	1
§2	Евклидово пространство	2
§3	Неравенство Шварца	3

§1. Метрическое и нормированное пространства

Определение. Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

M1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$

M3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Замечание. Отображение ρ называется **расстоянием** (или метрикой).

Пример 1.1. Приведем несколько примеров:

(а) M - произвольное, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y; \end{cases}$

(б) $M = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|;$

(в) $M = \mathbb{R}^n, \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi^i - \eta^i)^2};$

(г) $M = C[a, b], \rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|;$

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

N1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\xi^i|^p}, \quad \|x\|_m = \max_{i=1 \dots n} |\xi^i|$$

Лемма 1.1. Любое нормированное пространство может быть метризовано:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Доказательство. Действительно, аксиома **M1** следует из **N1**, точно также **M2** следует из **N2**:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x).$$

Для доказательства **M3** положим в **N3**

$$x = a - b, \quad y = b - c, \quad \Rightarrow \quad x + y = a - c,$$

которые после подстановки сразу дают необходимое неравенство. $\square$

§2. Евклидово пространство

Определение. Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана *метрическая форма* $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ со следующими свойствами:

E1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$ - линейность по второму аргументу;

E2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ - эрмитовость;

E3. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Замечание. Из аксиом **E1** и **E2**, в частности, следует

$$\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\langle y, \alpha x \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \langle x, y \rangle.$$

То есть, из первого аргумента множитель выносится с сопряжением.

Замечание. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис евклидова пространства X . Пусть также $x, y \in X$, так что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\langle x, y \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \langle e_i, e_j \rangle = \bar{\xi}^i \eta^j g_{ij}.$$

Определение. Совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ называется **метрическим тензором**, а соответствующая матрица $G = \|g_{ij}\|$ - **матрицей Грама**:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Замечание. Свойства матрицы Грама:

(а) $G_{ji} = \overline{G_{ij}}$;

(б) $G_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$;

(в) $\overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} \geq 0, \quad \overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \xi^i = 0, \quad \forall i.$

Пример 2.1. Пример нарушения аксиомы **Е3** - пространство Минковского.
Пусть $X = \mathbb{R}^4$, $x = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)^T$ и

$$\langle x, y \rangle = \xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3.$$

Рассмотрим вектор $x = (1 \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3})^T$, тогда

$$\langle x, x \rangle = 1 - 1/3 - 1/3 - 1/3 = 0,$$

и значит x - нулевой вектор ($x \neq 0$, но $g(x, x) = 0$).

§3. Неравенство Шварца

Лемма 3.1. *Евклидово пространство может быть нормировано:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Доказательство. Проверка первых двух аксиом нормы проводится непосредственно:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x, x \rangle} &\geq 0, \\ \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} &= \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

Проверка последней аксиомы сводится к проверке утверждения

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle,$$

которое составляет утверждение теоремы о *неравенстве Шварца*.

□

Теорема 3.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму, с параметром λ :

$$\begin{aligned} \|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \\ &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) + \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(а) Пусть $X = X(\mathbb{R})$, тогда $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ и выражение преобразуется в

$$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

Тогда $D = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ и теорема доказана.

(б) Пусть $X = X(\mathbb{C})$, тогда $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ и рассмотрим

$$\langle x, y \rangle = e^{i\varphi} |\langle x, y \rangle|, \quad \varphi = \arg \langle x, y \rangle.$$

Определим вектор $z = e^{-i\varphi}x$, тогда

$$\langle z, y \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, y \rangle = r = |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R},$$

$$\langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, e^{-i\varphi}x \rangle = \langle x, x \rangle.$$

Далее применим результат первого доказательства

□

Лемма 3.2. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство тогда и только тогда, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$|\langle x, \alpha x \rangle| \leq \|x\| \|\alpha x\|, \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \|x\|^2 \leq |\bar{\alpha}| \|x\|^2, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha|.$$

Пусть $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, тогда

$$\begin{aligned} D/4 = |\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 = 0 & \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0, \\ & \Leftrightarrow \lambda x + y = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.3. *Для отображения $\|x\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, порожденного скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, справедлива аксиома **N3**.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку преобразований

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Тем самым мы показали, что скалярное произведение действительно порождает норму, т.к. выполняются все аксиомы.

Ортогональность

Содержание

§1	Ортогональные векторы	1
§2	Процесс ортогонализации	2
§3	Ортогональный базис	3
§4	Ортогональная сумма подпространств	4
§5	Ортогональный проектор	4
§6	Дополнительно: соотношения о проекциях	5

§1. Ортогональные векторы

Определение 1.1. Пусть $x, y \in E$. Говорят, что x **ортогонален** y (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

Лемма 1.1. Пусть $x \perp y_1, y_2, \dots, y_k$, тогда $x \perp \mathcal{L}\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

Доказательство.

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x, y_i \rangle.$$

□

Теорема 1.1. (Об ортогональности и линейной независимости)

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - линейно независимый набор.

Доказательство. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0, \quad \|x_j\| \neq 0,$$

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0.$$

□

Теорема 1.2. (Пифагора) Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

Доказательство.

$$\left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^k x_i, \sum_{j=1}^k x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2.$$

□

Определение 1.2. Говорят, что x ортогонален подпространству $L \leq X_E$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Замечание. Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

Определение 1.3. Ортогональным дополнением пространства L называется множество

$$M = \{x \in X : x \perp L\}.$$

Лемма 1.2. Ортогональное дополнение является подпространством X_E .

Доказательство. В этом легко убедиться прямой проверкой.

□

§2. Процесс ортогонализации

Теорема 2.1. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно-независимый набор в евклидовом пространстве X_E , тогда $\{x_j\}_{j=1}^k$ можно преобразовать в ортогональный набор $\{e_j\}_{j=1}^k$.

Доказательство. Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

1. $e_1 = x_1$,
2. $e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle e_1, x_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle},$
3. $e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1, e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle e_1, x_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}, \alpha_3^2 = -\frac{\langle e_2, x_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle},$
-
- m. $e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \dots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle e_j, x_m \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle}.$

□

Замечание. Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.

Доказательство. От противного. Пусть

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \dots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1 = 0,$$

тогда

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m-1}^i x_i + \dots + \alpha_m^2 \sum_{i=1}^2 \alpha_2^i x_i + \alpha_m^1 x_1 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = 0,$$

но это означает, что $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно зависимый набор. Противоречие. □

Замечание. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

Замечание. Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leq \|x_m\|$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m \rangle = \langle e_m, x_m \rangle + 0 + \dots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m \rangle \leq \|x_m\| \cdot \|e_m\|.$$

□

§3. Ортогональный базис

Определение 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства X_E называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j \neq i} \rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Теорема 3.1. Любой базис евклидова пространства X_E может быть преобразован к ортонормированному базису.

Доказательство. Ортогонализация Грама-Шмидта и нормировка. □

Лемма 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ в X_E ортонормирован тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y \in X_E : \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

Доказательство. Действительно, прямой проверкой можем убедиться, что

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

□

Замечание. Матрица Грама скалярного произведения в ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы:

$$G_{\text{ОБ}} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad G_{\text{ОНБ}} = \|\delta_j^i\|.$$

§4. Ортогональная сумма подпространств

Теорема 4.1. Пусть L - подпространство евклидова пространства X_E и

$$M = L^\perp = \{x \in X_E : x \perp L\},$$

тогда

$$E = L \dot{+} M \Leftrightarrow \forall x \in X_E \quad \exists! z \in L, h \in L^\perp : x = z + h.$$

Доказательство. Выполним по пунктам:

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^k$ - ортонормированный базис в L ,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^k$ до базиса X_E : $\{e_1, e_2, \dots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\},$$

$$4. \forall x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i = z + h \Rightarrow X_E = L + M.$$

5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и

$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1 \rangle = 0, \Rightarrow h_2 - h_1 = 0.$$

□

Замечание. В данном случае прямая сумма $X_E = L \dot{+} M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M .

Замечание 4.1. В более общем случае, сумма попарно ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j \neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:

$$L = \bigoplus_{i=1}^s L_i.$$

§5. Ортогональный проектор

Определение 5.1. Ортогональным проектром на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^\perp(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^\perp.$$

Замечание 5.1. Тогда вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L .

Теорема 5.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ортонормированный базис в X_E . Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:

$$\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$x = z + h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_L^\perp z = z, \quad \mathcal{P}_L^\perp h = 0.$$

Действительно, пусть e_j - элемент базиса, лежащий в L , тогда

$$\mathcal{P}_L^\perp e_j = \sum_{i=1}^k \langle e_j, e_i \rangle e_i = e_j.$$

Если e_l - элемент базиса, лежащий в M ($k < l \leq n$), тогда

$$\mathcal{P}_L^\perp e_l = \sum_{i=1}^k \langle e_l, e_i \rangle e_i = 0.$$

□

Определение 5.2. Задачей о перпендикуляре называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M .

Замечание 5.2. Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ подпространства L ;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^\perp = x - \mathcal{P}_L^\perp$.

Определение 5.3. Коэффициенты $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

§6. Дополнительно: соотношения о проекциях

Лемма 6.1. *Имеет место следующее сравнение:*

$$\|\mathcal{P}_L^\perp x\| \leq \|x\|$$

Доказательство. Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$\|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2 + \|\mathcal{P}_M^\perp x\|^2 = \|x\|^2.$$

□

Замечание. При $x \in L$ данное неравенство обращается в равенство.

Лемма 6.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$$

Доказательство. Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2 &= \langle \mathcal{P}_L^\perp x, \mathcal{P}_L^\perp x \rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle \langle x, e_i \rangle e_i, \langle x, e_j \rangle e_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^k \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

□

Лемма 6.3. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

Теорема 6.1. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ является полной в X_E тогда и только тогда, когда для любого $x \in X_E$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2, \quad \alpha_i = \langle e_i, x \rangle \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть для любого x выполняется равенство Парсеваля. Предположим, что

$$x = z + h, \quad z = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i, \quad h \perp z,$$

тогда по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2, \quad \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 + \|h\|^2,$$

откуда следует, что $h = 0$ и система $\{e_i\}_{i=1}^k$ - полная в X_E .

□

Операторы в евклидовых пространствах

Содержание

§1 Эрмитово сопряженный оператор	1
§2 Самосопряженный и эрмитов операторы	2
§3 Спектральные свойства эрмитова оператора	2
§4 Унитарный оператор	3
§5 Матрица унитарного оператора	4
§6 Спектральные свойства унитарного оператора	5

§1. Эрмитово сопряженный оператор

Пусть дано евклидово пространство $X_E(\mathbb{K})$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 1.1. Оператор $\varphi^\dagger$ называется **эрмитово сопряженным** к оператору φ , если он обладает следующим свойством:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

Замечание 1.1. Операция эрмитового сопряжения обладает следующими свойствами:

- аддитивность: $(\varphi + \psi)^\dagger = \varphi^\dagger + \psi^\dagger$;
- сопряженная однородность: $(\lambda\varphi)^\dagger = \bar{\lambda}\varphi^\dagger$;
- контравариантность: $(\psi \circ \varphi)^\dagger = \varphi^\dagger \circ \psi^\dagger$;
- инволютивность: $(\varphi^\dagger)^\dagger = \varphi$.

Лемма 1.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис евклидова пространства $X_E(\mathbb{K})$ и G — его матрица Грама. Тогда если A_φ — матрица оператора φ в этом базисе, то матрица $\varphi^\dagger$ будет иметь вид

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1} A^\dagger G, \quad A^\dagger = \overline{A}^T.$$

Доказательство. По определению скалярного произведения:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \xi^\dagger G (A_\varphi \eta) = (\xi^\dagger G A_\varphi G^{-1}) G \eta = (G^{-1} A_\varphi^\dagger G \xi)^\dagger G \eta = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

□

§2. Самосопряженный и эрмитов операторы

Определение 2.1. Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Замечание 2.1. Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

Пример 2.1. Примеры матрицы A самосопряженного оператора и матрицы B эрмитовского оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.2. В случае вещественного поля $\mathbb{R}$ операции $\dagger$ и T совпадают.

§3. Спектральные свойства эрмитова оператора

Лемма 3.1. Все собственные значения эрмитова оператора φ вещественны.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение φ и x — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle \varphi x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle, \quad \langle x, \varphi x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda$$

□

Лемма 3.2. Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\varphi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \varphi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \varphi x_1, x_2 \rangle &= \langle x_1, \varphi x_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle &= \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle &= 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.3. Если $L \leq X$ — инвариантное подпространство эрмитова оператора φ , тогда $L^\perp$ — также инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть $x \in L$ и $y \in L^\perp$, тогда

$$0 = \langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi y \in L^\perp.$$

□

Теорема 3.1. Эрмитов оператор φ является оператором скалярного типа.

Доказательство. Покажем, что собственные векторы φ образуют базис $X_E(\mathbb{C})$. Проведем доказательство от противного: пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ — максимальный ЛНЗ набор:

$$\varphi x_j = \lambda_j x_j, \quad j = 1 \dots m \quad m < n = \dim_{\mathbb{C}} X_E.$$

Пусть далее подпространство L образовано как линейная оболочка над этими векторами:

$$L = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle_{\mathbb{C}}, \quad M = L^{\perp}, \quad \varphi_M : M \rightarrow M$$

Так как M — инвариантное подпространство φ , существует по крайней мере один вектор $\tilde{x} \in M$, такой что

$$\varphi_M \tilde{x} = \tilde{\lambda} \tilde{x}.$$

Но $\tilde{x} \perp L$ и значит $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \tilde{x}\}$ — ЛНЗ. Противоречие. □

Теорема 3.2. (Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \rightarrow X_E$ — эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E , состоящий из собственных векторов φ , тогда:

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle *, e_i \rangle e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Теорему доказывает два обсуждаемых ранее факта:

- Эрмитов оператор диагонализуем.
- Проектор на любое подпространство имеет вид

$$\mathcal{P}_L(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i,$$

где e_i — ортонормированный базис подпространства L . □

§4. Унитарный оператор

Лемма 4.1. Пусть ψ — оператор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{K})$, тогда следующие свойства эквивалентны:

- (а) изометрия: $\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, y \rangle$;
- (б) сохранение нормы: $\|\psi x\| = \|x\|$;
- (в) свойство сопряженного: $\psi^{\dagger} = \psi^{-1}$

Доказательство. Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(2):

$$\|\psi x\|^2 = \langle \psi x, \psi x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2;$$

- Опр.(2) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\begin{aligned} \|\psi(x+y)\|^2 &= \|\psi x\|^2 + \|\psi y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle \psi x, \psi y \rangle, \\ \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle \psi x, \psi y \rangle \end{aligned}$$

Для Im аналогично рассматриваем $\|\psi(x+i \cdot y)\|^2$

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(3):

$$\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, \psi^\dagger \psi y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{Rightarrow} \quad \psi^\dagger \psi = \mathcal{I}.$$

- Опр.(3) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \mathcal{I}y \rangle = \langle x, \psi^\dagger \psi y \rangle = \langle \psi x, \psi y \rangle.$$

□

Определение 4.1. Унитарным называется оператор ψ , обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 4.2. Определитель оператора ψ имеет следующее свойство:

$$|\det \psi| = 1.$$

Доказательство. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det \mathcal{I} = \det (\psi^\dagger \psi) = \det \psi^\dagger \det \psi = \overline{\det \psi} \cdot \det \psi = |\det \psi|^2 = 1.$$

□

Замечание 4.1. Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

§5. Матрица унитарного оператора

Замечание 5.1. Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойства:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} : \quad \psi &\leftrightarrow U_\psi, \quad \overline{U^T} = U^{-1}; \\ \mathbb{R} : \quad \psi &\leftrightarrow U_\psi, \quad U^T = U^{-1}. \end{aligned}$$

Замечание 5.2. В вещественном случае

$$\det \psi = \det U_\psi = \pm 1$$

Лемма 5.1. Пусть $U_\psi = \|u_{ik}\|$ — матрица унитарного оператора, тогда:

$$\sum_{j=1}^n \bar{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

Замечание 5.3. Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

Пример 5.1. Матрица Эйлера — пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

§6. Спектральные свойства унитарного оператора

Лемма 6.1. Все собственные значения оператора ψ по модулю равны единице:

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

Доказательство. Пусть $\psi x = \lambda x$, тогда

$$\langle \psi x, \psi x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle. \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

□

Лемма 6.2. Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:

$$\psi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \psi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Доказательство. Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \psi x_1, \psi x_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2 \rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1 \right) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

□

Лемма 6.3. Ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантного относительно унитарного оператора ψ подпространства L также является инвариантным.

Доказательство. Для любых $x \in L$ и $y \in L^\perp$ имеем:

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle \psi x, \psi y \rangle \Rightarrow \psi x \perp \psi y \Rightarrow \psi y \in M.$$

□

Теорема 6.1. Унитарный оператор является оператором скалярного типа.

Доказательство. Доказательство как для случая эрмитова оператора. □

Пример 6.1. Ортогональный оператор, вообще говоря, не является скалярным.

Теорема 6.2. (Спектральная теорема для унитарного оператора)

Пусть $\psi : X_E \rightarrow X_E$ — унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E , состоящий из собственных векторов ψ , тогда:

$$\psi(*) = \sum_{j=1}^n e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$

Диагонализация квадратичных форм I

Содержание

§1	Квадратичные формы	1
§2	Нормальный вид квадратичной формы	2
§3	Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве	5

§1. Квадратичные формы

Вспомним основные определения, которые будут полезны в ближайшее время. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Предположим также, что в этом линейном пространстве определена билинейная форма $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Определение 1.1. Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad q(v) = b(v, v), \quad \forall v \in V$$

Замечание 1.1. Любая билинейная форма $b(x, y)$ задает квадратичную функцию $q(v)$, которая получается из нее ограничением области определения с $V \times V$ на диагональ $\{(v, v) : v \in V\} \subset V \times V$.

Замечание 1.2. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij} , квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} (v^i)^2 + 2 \sum_{i < j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где v^i — i -я координата вектора v в выбранном базисе.

§2. Нормальный вид квадратичной формы

Рассмотрим симметричную билинейную форму $b \in \text{Bil}^S(V)$.

Определение 2.1. Векторы $u, v \in V$ называются ортогональными относительно билинейной формы b (b -ортогональными), если $b(u, v) = 0$.

Это определение в некотором смысле обобщает определение ортогональности относительно скалярного произведения.

Замечание 2.1. В силу симметричности билинейной формы можно утверждать, что

$$u \perp v \Leftrightarrow v \perp u$$

Определение 2.2. Базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в V называется ортогональным относительно b , если его векторы попарно ортогональны, т.е. $b(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Замечание 2.2. Симметричная билинейная форма и квадратичная форма ей соответствующая в базисе b -ортогональных векторов имеют диагональный вид:

$$b(u, v) = \beta_1 u^1 v^1 + \dots + \beta_n u^n v^n, \quad q(v) = \beta_1 (v^1)^2 + \dots + \beta_n (v^n)^2$$

Теорема 2.1. Для каждой симметричной билинейной (и квадратичной) формы существует b -ортогональный базис.

Доказательство. Докажем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть $n > 1$ и билинейная (квадратичная) форма не является нулевым отображением (здесь снова теорема становится очевидной). Выберем вектор $e_1 \in U_1$ такой, что $b(e_1, e_1) = q(e_1) \neq 0$. Рассмотрим множество векторов $U_1^\perp$, которые являются b -ортогональными вектору e_1 . Очевидно, что оно является линейным подпространством. Более того можно утверждать, что

$$V = U_1 \oplus U_1^\perp, \quad \dim U_1^\perp = n - 1$$

Мы уже показывали справедливость подобного утверждения для ортогональных друг другу подпространств в евклидовом пространстве. К такому подпространству мы вновь можем применить предположение индукции, рассматривая сужение симметричной билинейной (квадратичной) формы на это подпространство. В силу того, что вектор e_1 будет b -ортогональным любому вектору из базиса $\{e_2, \dots, e_n\}$ подпространства $U_1^\perp$, где все векторы также могут быть выбрано как попарно ортогональные, получаем базис пространства V , составленный из ортогонального относительно b набора векторов. ■

Предположим теперь, что найден ортогональный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.

$$q(v) = a_1 (v^1)^2 + \dots + a_n (v^n)^2, \quad a_i = q(e_i)$$

Лемма 2.1. В поле $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ любая квадратичная форма может быть приведена к виду

$$q(v) = (\tilde{v}^1)^2 + \dots + (\tilde{v}^r)^2,$$

где r – количество ненулевых a_i .

Доказательство. Сделаем преобразование вида

$$e_i \mapsto \tilde{e}_i = \lambda e_i, \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_i = \lambda_i^2 a_i$$

В поле $\mathbb{C}$ можно всегда выбрать такие числа λ_i , что $\tilde{a}_i = 1$. ■

Замечание 2.3. В поле $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ квадраты ненулевых чисел λ_i всегда являются положительными, поэтому указанным преобразованием базиса мы можем найти такие λ_i для всех $a_i \neq 0$, что $|\tilde{a}_i| = 1$, но при этом знак сохранится. Следовательно в $\mathbb{R}$ квадратичная форма может быть приведена только к виду

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r_+} (\tilde{v}^i)^2 - \sum_{j=r_++1}^{r_-} (\tilde{v}^j)^2$$

Определение 2.3. Указанные виды квадратичной формы в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ называются **нормальным видом** квадратичной формы, а числа r_+ и r_- – **положительным и отрицательными индексами инерции** вещественной квадратичной функции. Набор этих чисел (r_+, r_-) также называют **сигнатурой** квадратичной формы.

Сигнатура квадратичной формы является ее инвариантом (не зависит от базиса). Чтобы это показать, введем еще несколько определений.

Определение 2.4. Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если $q(v) > 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно определенная** форма.

Определение 2.5. Квадратичная форма называется **положительно полуопределенной**, если $q(v) \geq 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Аналогичным образом вводится **отрицательно полуопределенная** форма.

Замечание 2.4. Могут также рассматриваться неопределенные квадратичные формы. т.е. такие квадратичные формы, для которых не выполняется ни одно из условий в рассмотренных определениях.

Сформулируем утверждение.

Лемма 2.2. *Положительный индекс инерции r_+ квадратичной формы равен максимальной размерности подпространства, на котором $q(v)$ является положительно определенной.*

Доказательство. Квадратичная форма в нормальном виде для $\mathbb{R}$ положительно определена для линейной оболочки векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_{r_+}\}$. Пусть U – произвольное подпространство в V , на котором q положительно определена, т.е. $\forall u \in U$ справедливо $q(u) > 0$. Подпространство W определим как линейную оболочку:

$$W = \langle e_{r_++1}, \dots, e_n \rangle, \quad \Rightarrow \quad \forall w \in W, \quad q(w) \leq 0$$

Очевидно, что $U \cap W = 0$, а следовательно для размерностей имеем

$$\dim(U + W) = \dim U + (n - r_+) \leq \dim V = n$$

Откуда мы получаем, что $\dim U \leq r_+$, что и требовалось доказать.

Замечание 2.5. Вследствие того, что индекс инерции определяется размерностью подпространства, он не может зависеть от выбора базиса. Аналогичные рассуждения справедливы и для отрицательного индекса инерции.

Сформулируем критерий положительной определенности квадратичной формы.

Теорема 2.2. *(Критерий Сильвестра) Вещественная квадратичная форма q , имеющая матрицу A_q в некотором базисе, положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы A_q положительны.*

Доказательство. Необходимость.

Если квадратичная форма положительно определена, то определитель ее матрицы в произвольном базисе также положительный. В базисе q -ортогональных векторов матрица представляет собой единичную матрицу, определитель которой равен 1. Рассмотрим преобразование матрицы квадратичной формы при смене базиса с матрицей перехода C

$$A'_q = C^T A_q C \quad \Rightarrow \quad \det A'_q = \det(C^T A_q C) = \det(C^T C) > 0$$

Произвольный минор, полученный на пересечении строк и столбцов с индексами $1 \leq i_1 < i_2 \dots i_k \leq n$ представляет собой матрицу сужения квадратичной формы на подпространство, образованное линейной оболочкой базисных векторов соответствующих этим строкам (столбцам). Квадратичная положительно определенная форма является таковой на любом своем подпространстве. Следовательно произвольный минор является положительным, а значит и угловые миноры тоже.

Достаточность.

Покажем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Предположим, что результат теоремы справедлив на пространствах размерности не превосходящей $n - 1$. Пусть A_q – вещественная симметричная матрица порядка n , у которой все угловые миноры положительны. По предположению индукции сужение на подпространство размерности $n - 1$ является положительно определенным, а значит положительный индекс инерции $r_+ \geq n - 1$. Следовательно в отсутствие $a_i = 0$ мы имеем $r_+ + r_- = n$, а значит r_- может быть либо 0, либо 1. В последнем случае нормальный вид квадратичной формы:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{r_+} (v^i)^2 - (v^n)^2$$

Но определитель матрицы такой квадратичной формы отрицателен. Следовательно единственная возможность для индексов инерции $r_+ = n$ и $r_- = 0$, что и говорит о положительной определенности квадратичной формы.

§3. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

Пусть E_V – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Определим также в этом пространстве линейный оператор $\varphi \in \text{End}(V)$. Определим при помощи него билинейную функцию b_φ

$$b_\varphi(u, v) = \langle u, \varphi(v) \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

Замечание 3.1. Обратим внимание, что линейные пространства эндоморфизмов и билинейных форм имеют одинаковую размерность $\dim \text{End}(V) = \dim \text{Bil}(V) = n^2$. Сопоставление между билинейными формами и операторами определяет изоморфизм этих линейных пространств.

Замечание 3.2. Данный изоморфизм не зависит от базиса (канонический изоморфизм), а только лишь от выбора скалярного произведения. Следовательно относительно него существует единственный однозначно определяемый оператор, позволяющий получить данную билинейную форму.

Несложно проверить, что симметричной билинейной форме будет соответствовать самосопряженный оператор. Следовательно и квадратичной форме будет соответствовать самосопряженный оператор. Оператор, определяемый таким образом, называют присоединенным оператором к билинейной (квадратичной) форме.

Лемма 3.1. Матрицы Грама G скалярного произведения, квадратичной формы A_q и присоединенного к нему оператора A_φ связаны соотношением

$$A_q = GA_\varphi$$

Доказательство. Зафиксируем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в V . Для любых векторов, представленных их координатными столбцами u и v , можно найти значение квадратичной формы при помощи ее матрицы с одной стороны, а с другой стороны можно воспользоваться способом вычисления скалярного произведения через матрицу Грама:

$$x^T A_q y = x^T G A_\varphi y \quad \Rightarrow \quad A_q = G A_\varphi$$

Замечание 3.3. В силу построенного изоморфизма между квадратичными формами и самосопряженными операторами для диагонализации квадратичной формы достаточно найти ортонормированный базис из собственных векторов (он всегда существует для самосопряженного оператора). При этом матрица Грама будет единичной матрицей $G = E$, а матрица самосопряженного оператора примет вид диагональной матрицы $A_\varphi = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Диагонализация квадратичных форм II

Содержание

§1 Методы Лагранжа и Якоби	1
§2 Метод Якоби диагонализации квадратичных форм	2
§3 Одновременная диагонализация двух квадратичных форм	4

§1. Методы Лагранжа и Якоби

Рассмотрим ряд методов, которые могут использоваться для нахождения диагональных представлений квадратичных форм. Пусть $V(\mathbb{K})$ — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ размерность которого $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Теорема 1.1. *Любая квадратичная форма $q(v)$, заданная в линейном пространстве V , с помощью невырожденного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство. Доказательство произведем при помощи **метода Лагранжа**, основная идея которого заключается в последовательном приведении квадратного трехчлена до полного квадрата.

Если $q(v) = 0$ для $\forall v \in V$, то квадратичная (нулевая) форма уже представлена в каноническом виде по определению. Поэтому все дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении, что она ненулевая, то есть $\exists v \in V, q(v) \neq 0$. В частности, из этого следует, что существуют ненулевые коэффициенты квадратичной формы в некотором базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Здесь возможно два случая. Первый заключается в том, что существует коэффициент $a_{ii} \neq 0$. Тогда, не теряя общности можем предположить, что это коэффициент a_{11} для удобства. Этого всегда можно достичь простой перестановкой базисных элементов. Основная часть метода будет применяться именно в этом случае, но сначала рассмотрим второй случай — когда все $a_{ii} = 0$. Этому соответствует самый простой случай, когда

$$q(v) = v^1 v^2,$$

где верхний индекс означает нумерацию координаты, а не степень. Тогда мы можем совершить преобразование вида

$$v^1 = \tilde{v}^1 - \tilde{v}^2, \quad v^2 = \tilde{v}^1 + \tilde{v}^2, \quad v^i = \tilde{v}^i, \quad i = 3, \dots, n$$

которое очевидно является невырожденным и приводит квадратичную форму к виду

$$q(x) = (\tilde{v}^1 - \tilde{v}^2)(\tilde{v}^1 + \tilde{v}^2) = (\tilde{v}^1)^2 - (\tilde{v}^2)^2,$$

к которой мы можем применять уже дальнейшие преобразования. Далее будем считать, что до исчерпания координат и завершения метода, всегда найдется слагаемое, содержащее квадрат следующей по номеру координаты.

Пусть квадратичная форма в заданном базисе имеет вид

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v^i v^j, \quad a_{11} \neq 0$$

Сгруппируем слагаемые таким образом, что в первой выделенной группе будут все слагаемые, содержащие **ведущую координату** v^1 , а под знаком суммы соберем все остальные слагаемые:

$$q(v) = a_{11}(v^1)^2 + 2a_{12}v^1v^2 + \dots + 2a_{1n}v^1v^n + \sum a_{ij}v^i v^j \Rightarrow$$

и преобразуем выделенную группу, вычленив полный квадрат данного выражения.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & a_{11} \left(v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n \right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}(v^2)^2 - \dots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}(v^n)^2 - \\ & - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}(v^2)(v^3) - \dots - 2\frac{a_{1,n-1}a_{1n}}{a_{11}}v^{n-1}v^n + \sum a_{ij}v^i v^j = \\ & = a_{11} \left(v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n \right)^2 + \sum' \tilde{a}_{ij}v^i v^j \end{aligned}$$

В этом выражении все появившиеся слагаемые были "свернуты" под знак суммы. Теперь, рассматривая часть квадратичной формы, которая оказалась под этим знаком суммы $\sum'$, мы можем снова применить выделения полного квадрата, но уже относительно координаты v^2 . Последовательно выполняя эти действия к каждой из координат, имеем возможность получить диагональный вид квадратичной формы, полученный при помощи преобразования

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n \\ \tilde{v}^2 = v^2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}v^3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}v^n \\ \tilde{v}^k = v^k + \sum_{i=k}^n \frac{a_{ki}}{a_{kk}}v^i \\ \tilde{v}^n = v^n \end{cases}$$

□

§2. Метод Якоби диагонализации квадратичных форм

Теорема 2.1. Пусть квадратичная форма $q(v)$ в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ имеет матрицу $A_q = (a_{ij})$, и все её **главные миноры**:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} \neq 0.$$

Тогда существует **единственное** верхнетреугольное преобразование базиса $\{e_i\} \rightarrow \{g_i\}$, приводящее $q(v)$ к каноническому виду:

$$q(v) = \Delta_1(v^1)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}(v^2)^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}(v^n)^2.$$

Доказательство. Пусть новые векторы g_j задаются верхнетреугольным преобразованием:

$$\begin{cases} g_1 = e_1, \\ g_2 = s_{21}e_1 + e_2, \\ g_3 = s_{31}e_1 + s_{32}e_2 + e_3, \\ \vdots \\ g_n = s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2 + \dots + e_n, \end{cases}$$

Очевидно, что данное преобразование будет невырожденным. Следовательно набор векторов $\{g_j\}_{j=1}^n$ является базисом. Для связи этого преобразования с квадратичной формой, предположим, что коэффициенты s_{ji} ($j > i$) находятся из условия диагональности $q(v)$.

Это условие обеспечивается следующими рассуждениями. Пусть $b(u, v)$ — билинейная форма, которая является полярной к данной билинейной форме. Очевидно, что для диагонального вида квадратичной формы $q(v)$ необходимо, чтобы и полярная билинейная форма была диагональной. Для канонического вида необходимо:

$$b(g_j, e_i) = 0 \quad \text{при } i < j,$$

тогда будет выполняться и $b(g_j, g_i) = 0$ для $i < j$, т.к. каждый из g_k выражается через векторы из $\{e_i\}_{i=1}^k$.

Для каждого $j \geq 2$, подставляя $g_j = \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk}e_k + e_j$, получаем систему уравнений.

$$\sum_{k=1}^{j-1} s_{jk}a_{ki} + a_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1),$$

где $a_{ki} = b(e_k, e_i)$.

Проанализируем полученную систему относительно неизвестных $\{s_{jk}\}$. Матрица системы совпадает с главным минором Δ_{j-1} . Из условия $\Delta_{j-1} \neq 0$ и теоремы Крамера следует единственность решения:

$$s_{jk} = (-1)^{k+j} \frac{\Delta_k^{(j)}}{\Delta_{j-1}},$$

где $\Delta_k^{(j)}$ — минор с заменой k -го столбца на $(a_{j1}, \dots, a_{j,j-1})^T$, а множитель (-1) возникает из-за того, что в "классических" формулах Крамера столбец свободных членов находится в правой части системы.

Перейдем к вычислению диагональных коэффициентов. Из условий ортогональности $q(g_j, g_i) = 0$ при $i < j$ следует:

$$\lambda_j = q(g_j) = b(g_j, g_j) = b(e_j, g_j) = b\left(e_j, \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk} e_k + e_j\right) = \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk} a_{jk} + a_{jj}.$$

Подставляя выражение для s_{jk} :

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{j-1} \left[(-1)^{k+j} \frac{\Delta_k^{(j)}}{\Delta_{j-1}} \right] a_{jk} + a_{jj}.$$

Числитель этого выражения совпадает с разложением определителя Δ_j по j -й строке (теорема Лапласа):

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^j (-1)^{j+k} a_{jk} \Delta_k^{(j)}.$$

Следовательно:

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}.$$

Ненулевые миноры Δ_j гарантируют единственность s_{ji} . Следовательно, преобразование $\{e_i\} \rightarrow \{g_i\}$ единственно. $\square$

Замечание 2.1. Если $\Delta_j = 0$ для некоторого j , метод Якоби неприменим. В этом случае используется метод Лагранжа.

§3. Одновременная диагонализация двух квадратичных форм

Теорема 3.1. Пусть $q_1(v)$ и $q_2(v)$ – две квадратичные формы в линейном пространстве V размерности n , причём $q_1(v)$ **невыврождена** (т.е. $\det A \neq 0$, где A – матрица $q_1(v)$). Тогда существует базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, в котором обе формы диагональны:

$$\begin{cases} q_1(v) = \lambda_1(v^1)^2 + \lambda_2(v^2)^2 + \dots + \lambda_n(v^n)^2, \\ q_2(v) = \mu_1(v^1)^2 + \mu_2(v^2)^2 + \dots + \mu_n(v^n)^2, \end{cases}$$

где $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Построим доказательство конструктивно, приведя алгоритм нахождения нужного преобразования.

(а) **Диагонализация $q_1(v)$:**

Приведем квадратичную форму $q_1(v)$ к диагональному виду с помощью ортогональных преобразований, например при помощи спектрального анализа присоединенного оператора к этой квадратичной форме. Получим базис $\{f_i\}$, в котором форма имеет матрицу

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

(б) **Преобразование $q_2(v)$:**

Вычислим матрицу B формы $q_2(v)$ в базисе $\{f_i\}$:

$$B = T_1^T B' T_1,$$

где T_1 — матрица перехода из $\{e_i\}$ в $\{f_i\}$, B' — исходная матрица $q_2(v)$. Еще раз обратим внимание, что преобразование T является ортогональным, т.к. основано на собственных векторах присоединенного оператора.

(в) **Диагонализация $q_2(v)$:**

Вновь применим спектральную теорию для диагонализации второй квадратичной формы, находя ортогональное преобразование из $\{f_i\}$ в $\{g_i\}$, которое позволит преобразовать квадратичную форму $q_2(v)$ в диагональный вид

$$B \mapsto \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

При этом, в связи с тем, что преобразование T_2 является ортогональным, оно не изменит диагональный вид матрицы квадратичной формы $q_1(v)$, а следовательно композиция ортогональных преобразований $T_2 \circ T_1$ и есть искомое преобразование.

□

Замечание 3.1. Если невырожденная квадратичная форма является положительно определенной, то тогда можно интерпретировать полярную к ней билинейную форму как матрицу Грама скалярного произведения. В этом случае, исходный базис может быть ортогонализирован процессом Грама-Шмидта, а для поиска диагонального представления второй квадратичной формы также использовать полученный базис и имеющееся "скалярное произведение".

Математический Анализ

Понятие первообразной.

Первообразной функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется функция F такая, что

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

Теорема о множестве всех первообразных.

Пусть F - первообразная функции f на $\langle a, b \rangle$. Для того, чтобы Φ также была первообразной функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b \rangle, C \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\Psi = F - \Phi$, где F и Φ - первообразные для f на $\langle a, b \rangle$. Тогда

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Согласно теореме Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ таких, что $x_1 < x_2$,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Значит, $\Psi(x) \equiv C, C \in \mathbb{R}, x \in \langle a, b \rangle$

Докажем достаточность. Пусть на $\langle a, b \rangle$ выполнено условие $F - \Phi \equiv C, C \in \mathbb{R}$. Тогда на этом промежутке $\Phi = F - C$ и, к тому же,

$$\Phi' = F' - C' = F' - 0 = F' = f$$

Тем самым, Φ является первообразной для функции f на $\langle a, b \rangle$.

Теорема о достаточном условии существования первообразной.

Если $f \in C(\langle a, b \rangle)$, то множество первообразных f на $\langle a, b \rangle$ не пусто.

Понятие неопределенного интеграла.

Неопределенным интегралом функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется множество всех первообразных f на этом промежутке. Неопределенный интеграл обозначается следующим образом:

$$\int f dx$$

где

$\int$ - знак неопределенного интеграла,

f - подынтегральная функция,

$f dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования.

Справедливы следующие равенства:

$\int 0 dx = C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

где в последних двух строчках таблицы считается, что $a \neq 0$, а все написанные соотношения рассматриваются на области определения подынтегральной функции.

Доказательство. Понятно, что все приведенные равенства доказываются формальным дифференцированием правой части и приведением результата к подынтегральной функции. Для примера, докажем следующее равенство:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Для доказательства достаточно показать, что производная правой части (точнее – любой фиксированной функции из множества) равна подынтегральной функции. Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \end{aligned}$$

откуда и следует написанное.

Связь интеграла и производной.

$$\left(\int f dx \right)' = f, \quad d \left(\int f dx \right) = f dx$$

Линейность неопределенного интеграла.

Пусть на $\langle a, b \rangle$ существуют первообразные функций f и g . Тогда:

1. На $\langle a, b \rangle$ существует первообразная функции $f + g$, причем

$$\int (f + g)dx = \int fdx + \int gdx$$

2. На $\langle a, b \rangle$ существует первообразная функции αf , $\alpha \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$$

3. На $\langle a, b \rangle$ существует первообразная функции $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

$$\int (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$$

Доказательство.

1. Докажем первый пункт. Понятно, что по свойству производной суммы, $F + G$ - первообразная $f + g$. Значит, достаточно проверить равенство

$$\{F + G + C, C \in \mathbb{R}\} = \{F + C_1, C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2, C_2 \in \mathbb{R}\}$$

Пусть $H \in \{F + G + C, C \in \mathbb{R}\}$, тогда

$$H = F + G + C = (F + 0) + (G + C),$$

а значит $H \in \{F + C_1, C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2, C_2 \in \mathbb{R}\}$ при $C_1 = 0$, $C_2 = C$.

Наоборот, пусть $H \in \{F + C_1, C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2, C_2 \in \mathbb{R}\}$, то есть

$$H = F + C_1 + G + C_2 = F + G + (C_1 + C_2).$$

Тогда и $H \in \{F + G + C, C \in \mathbb{R}\}$ при $C = C_1 + C_2$. Тем самым, равенство множеств установлено.

2. Докажем второй пункт. Понятно, что по свойству производной, αF - первообразная для αf . Значит, достаточно показать, что при $\alpha \neq 0$ верно равенство

$$\{\alpha F + C, C \in \mathbb{R}\} = \{\alpha F + \alpha C_1, C_1 \in \mathbb{R}\}$$

Если $H \in \{\alpha F + C, C \in \mathbb{R}\}$, то

$$H = \alpha F + C = \alpha F + \alpha \cdot \frac{C}{\alpha},$$

откуда $H \in \{\alpha F + \alpha C_1, C_1 \in \mathbb{R}\}$ при $C_1 = \frac{C}{\alpha}$.

Обратное включение доказывается похожим образом и остается в качестве упражнения.

3. Доказательство третьего пункта немедленно следует из утверждений 1-ого и 2-ого пунктов.

Формула замены переменной

Пусть f имеет первообразную на $\langle a, b \rangle$, $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, φ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Тогда

$$\int f dx = \int f(\varphi) \varphi' dt$$

Доказательство. Пусть F - первообразная для функции f на $\langle a, b \rangle$. Тогда, согласно теореме о производной композиции, $F(\varphi)$ - первообразная для функции $f(\varphi)\varphi'$ на $\langle \alpha, \beta \rangle$, откуда

$$\int f dx = F + C = F(\varphi) + C = \int f(\varphi) \varphi' dt$$

Формула интегрирования по частям

Пусть u и v дифференцируемы на $\langle a, b \rangle$, и пусть на $\langle a, b \rangle$ существует первообразная от vu' . Тогда

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Доказательство. Согласно формуле производной произведения,

$$(uv)' = u'v + uv'$$

откуда

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Беря интегралы от обеих частей и пользуясь следствием, приходим к формуле

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

Понятие многочлена

Многочленом (полиномом) $P_{n(x)}$ степени $n \geq 1$ будем называть функцию вида

$$P_{n(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Многочленом нулевой степени назовем произвольную константу, отличную от нуля. У тождественно равного нулю многочлена степенью будем называть символ $-\infty$.

Понятие рациональной дроби

Рациональной дробью называется функция вида

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}},$$

где $P_{n(x)}$, $Q_{m(x)}$ - многочлены степеней n и m , соответственно.

Понятие правильной рациональной дроби

Рациональная дробь

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}}$$

называется правильной, если $n < m$, иначе дробь называется неправильной.

Лемма о делении многочленов с остатком

Пусть

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}}$$

- неправильная дробь. Тогда существует единственное представление этой дроби в виде

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = R_{n-m}(x) + \frac{T_{k(x)}}{Q_{m(x)}},$$

где $R_{n-m}(x)$ - многочлен степени $(n - m)$, $T_{k(x)}$ - многочлен степени k и $k < m$.

Теорема о разложении многочлена над $\mathbb{R}$

Пусть $P_{n(x)}$ - многочлен n -й степени, коэффициент при старшей степени которого равен единице. Тогда справедливо разложение

$$P_{n(x)} = (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_p)^{k_p} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$$

где при $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$a_i \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{N}, l_j \in \mathbb{N}, p_j^2 - 4q_j < 0, k_1 + k_2 + \dots + k_p + 2(l_1 + \dots + l_m) = n.$$

Понятие простейших дробей

Простейшими дробями (дробями первого и второго типов) называют дроби вида

$$\frac{A}{(x - a)^k}, \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $p^2 - 4q < 0$.

Лемма о дробях первого типа

Пусть

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}}$$

- правильная рациональная дробь и

$$Q_{m(x)} = (x - a)^k \cdot \tilde{Q}(x), \text{ где } \tilde{Q}(a) \neq 0, \tilde{Q} - \text{многочлен.}$$

Существуют число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$, такие что

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x - a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

причем данное представление единственно.

Доказательство. Докажем существование заявленного разложения. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_{n(x)}}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_{n(x)} - A \cdot \tilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)}$$

и выберем число A так, чтобы число a было корнем числителя, то есть чтобы выполнялось равенство

$$P_{n(x)} - A \cdot \tilde{Q}(a) = 0$$

Тогда, очевидно,

$$A = \frac{P_{n(a)}}{\tilde{Q}(a)},$$

причем деление на $\tilde{Q}(a)$ возможно, так как, по условию, $\tilde{Q}(a) \neq 0$.

При найденном A в числителе стоит многочлен с корнем a , значит, согласно теореме, его можно представить в виде

$$P_{n(x)} - A \cdot \tilde{Q}(x) = (x-a)\tilde{P}(x),$$

а тогда

$$\frac{P_{n(x)} - A \cdot \tilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{(x-a) \cdot \tilde{P}(x)}{(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}.$$

Тем самым, существование разложения доказано.

Докажем единственность такого разложения. От противного, пусть существует два разложения

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Домножив на $(x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, приходим к равенству

$$A_1 \cdot \tilde{Q}(x) \cdot (x-a) = A_2 \cdot \tilde{Q}(x) + \tilde{P}_2(x) \cdot (x-a),$$

верному при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x = a$, тогда это равенство превращается в

$$A_1 \cdot \tilde{Q}(a) = A_2 \cdot \tilde{Q}(a),$$

и, так как, $\tilde{Q}(a) \neq 0$ то $A_1 = A_2$. Но тогда коэффициенты многочлена $\tilde{P} = P_{n(x)} - A \cdot \tilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно. Противоречие.

Лемма о дробях второго типа

Пусть

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}}$$

- правильная рациональная дробь и

$$Q_{m(x)} = (x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x), \quad \text{где } \tilde{Q}(\alpha \pm i\beta) \neq 0, \quad \tilde{Q} - \text{многочлен,}$$

$p^2 - 4q < 0$, а $\alpha \pm i\beta$ - комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.
Существуют числа $A, B \in \mathbb{R}$ и многочлен $\tilde{P}(x)$ такие, что

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Докажем существование заявленного разложения. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} - \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{P_{n(x)} - (Ax + B) \cdot \tilde{Q}(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Выберем числа A и B так, чтобы число $\alpha + i\beta$ было корнем числителя, то есть чтобы

$$P_{n(\alpha+i\beta)} - (A(\alpha + i\beta) + B) \cdot \tilde{Q}(\alpha + i\beta) = 0.$$

Последнее равенство переписывается в виде

$$A\alpha + B + i(A\beta) = \frac{P_{n(\alpha+i\beta)}}{\tilde{Q}(\alpha + i\beta)} =: R$$

По определению равенства комплексных чисел,

$$\begin{cases} A\alpha + B = \Re(R) \\ A\beta = \Im(R) \end{cases}$$

Так как $\beta \neq 0$, то параметры A и B определяются из системы единственным образом:

$$A = \frac{\Im(R)}{\beta}, \quad B = -\frac{\alpha\Im(R)}{\beta} + \Re(R).$$

Если $\alpha + i\beta$ - корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\alpha - \beta i$ - тоже его корень, значит, при найденных A и B , числитель может быть представлен в виде

$$P_{n(x)} - (Ax + B) \cdot \tilde{Q}(x) = (x^2 + px + q) \cdot \tilde{P}(x),$$

а тогда

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} - \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{(x^2 + px + q) \cdot \tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot \tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$$

Тем самым существование разложения доказано. Доказательство единственности разложения аналогично доказательству единственности в предыдущей лемме и остается в качестве упражнения.

Теорема о разложении дроби на простейшие

Пусть

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}}$$

- рациональная дробь, причем

$$Q_{m(x)} = (x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_p)^{k_p} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m},$$

где при $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad l_j \in \mathbb{N}, \quad p_j^2 - 4q_j < 0.$$

Тогда существует единственное разложение вида

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = R_{n-m}(x) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^{k_i-j+1}} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^{l_i-j+1}},$$

где все коэффициенты в числителе дробей справа - вещественные числа.

Доказательство. Пусть $n > m$, тогда по лемме о делении с остатком, ее можно представить в виде

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = R_{n-m}(x) + \frac{T_{k(x)}}{Q_{m(x)}}, \quad k < m$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда исходная рациональная дробь является правильной и не сократимой.

По лемме о дробях первого типа, рассматриваемую дробь можно представить в виде

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = \frac{A_{11}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x - a_1)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)}$$

где

$$\tilde{Q}^{(1)}(x) = (x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_p)^{k_p} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}.$$

Далее, по той же самой лемме, можно найти число A_{12} и многочлен $\tilde{P}^{(12)}(x)$ такие, что

$$\frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x - a_1)^{k_1-1} \cdot \tilde{Q}^{(1)}(x)}$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = \frac{A_{11}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)} + \frac{\tilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\tilde{Q}^{(1)}(x)}$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности k_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, получим

$$\frac{P_{n(x)}}{Q_{m(x)}} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^{k_i-j+1}} + \frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)}$$

где

$$\tilde{Q}^{(p)}(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$$

и дробь

$$\frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)}$$

- правильная.

Далее воспользуемся леммой о дробях второго типа, получим

$$\frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)} = \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{P}^{(11)}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1} \cdot \hat{Q}^{(1)}(x)},$$

где

$$\hat{Q}^{(1)}(x) = (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}.$$

Продолжая рассуждения таким же образом, как выше, только с использованием леммы о дробях второго типа, придем к разложению

$$\frac{\tilde{P}^{(pk_p)}(x)}{\tilde{Q}^{(p)}(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^{l_i-j+1}}.$$

Итого теорема доказана.

Понятие разбиения

Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (дробление) τ , если введена система точек x_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Понятие мелкости (ранга) разбиения

Величина

$$\lambda(\tau) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \Delta x_i$$

называется мелкостью (рангом, диаметром) разбиения (дробления).

Понятие оснащенного разбиения

Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (оснащенное разбиение) (τ, ξ) , если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ таким образом, что $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Понятие интегральной суммы

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и введено разбиение (τ, ξ) . Величина

$$\sigma_{\tau(f, \xi)} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется интегральной суммой для функции f на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ) .

Понятие интеграла Римана

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначают это число так:

$$I = \int_a^b f dx$$

Понятие интегрируемой функции

Функция f , для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a, b]$, называется интегрируемой по Риману на этом отрезке (или просто интегрируемой). Класс интегрируемых (по Риману) на отрезке $[a, b]$ функций будем обозначать так: $R[a, b]$.

По определению полагают

$$\int_a^a f dx = 0, \quad \int_b^a f dx = - \int_a^b f dx, \quad a < b$$

Определение интеграла через последовательности

Пусть f задана на $[a, b]$. Тогда I - интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности (τ^n, ξ^n) оснащенных разбиений отрезка $[a, b]$ такой, что $\lambda(\tau^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, выполняется, что

$$\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть I - интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$ согласно исходному определению и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \quad |\sigma_{\tau}(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Пусть теперь (τ^n, ξ^n) - последовательность оснащенных разбиений отрезка $[a, b]$ такая, что $\lambda(\tau^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad \lambda(\tau^n) < \delta.$$

Но тогда, при $n > n_0$ выполняется и

$$|\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| < \varepsilon,$$

откуда и следует утверждение.

Докажем достаточность. От противного, пусть выполнено утверждение теоремы, но I - не интеграл Римана, согласно исходному определению. Это значит, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists (\tau^\delta, \xi^\delta) : \lambda(\tau^\delta) < \delta \text{ и } |\sigma_{\tau^\delta}(f, \xi^\delta) - I| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}$. Тогда, по написанному,

$$\exists (\tau^n, \xi^n) : \lambda(\tau^n) < \delta_n = \frac{1}{n} \text{ и } |\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| \geq \varepsilon_0.$$

Но так как $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $\lambda(\tau^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, а значит построенная последовательность оснащенных разбиений удовлетворяет условно теоремы. В то же время,

$$|\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) - I| \geq \varepsilon_0,$$

что противоречит тому, что

$$\sigma_{\tau^n}(f, \xi^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I.$$

Понятие сумм Дарбу

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$ и τ - некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$s_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции f , отвечающими разбиению τ , соответственно.

Лемма о связи конечности сумм Дарбу и ограниченности функции

Ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности произвольной верхней (нижней) суммы Дарбу.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f ограничена сверху, то есть

$$\exists M : f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Пусть τ - произвольное разбиение $[a, b]$. Тогда, так как $M_i \leq M, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$S_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M(b-a) < +\infty.$$

Случай, когда f ограничена снизу доказывается аналогичным образом. Докажем достаточность. Пусть τ - разбиение $[a, b]$ и $S_{\tau(f)}$ конечна. Тогда

$$M_i < +\infty, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

и

$$f(x) \leq M = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} M_i = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

откуда и следует требуемое.

Аналогичным образом доказывается утверждение в случае конечности $s_{\tau(f)}$.

Лемма о связи сумм Дарбу и интегральных сумм

Справедливы равенства

$$S_{\tau(f)} = \sup_{\xi} \sigma_{\tau}(f, \xi), \quad s_{\tau(f)} = \inf_{\xi} \sigma_{\tau}(f, \xi).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Рассмотрим сначала случай, когда функция f ограничена сверху на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по определению супремума,

$$\exists \xi_i \in \Delta_i : M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i

$$\sum_{i=1}^{n(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a})} \Delta x_i < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

или

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \varepsilon < \sigma_{\tau(f, \xi)} \Leftrightarrow S_{\tau(f)} - \varepsilon < \sigma_{\tau(f, \xi)}.$$

Так как, как уже отмечалось, $S_{\tau(f)} \geq \sigma_{\tau(f, \xi)}$, то в итоге проверено, что

$$S_{\tau(f)} = \sup_{\xi} \sigma_{\tau(f, \xi)}.$$

Пусть теперь f не ограничена сверху на $[a, b]$, тогда $S_{\tau(f)} = +\infty$. Ясно, что при фиксированном разбиении τ функция f не ограничена сверху хотя бы на одном отрезке разбиения Δ_i . Не нарушая общности можно считать, что она не ограничена на Δ_1 . Тогда существует последовательность ξ_1^k , что $f(\xi_1^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$. Пусть $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in \{2, \dots, n\}$, - какие-то фиксированные точки, $\xi^k = \{\xi_1^k, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Тогда, в силу определения супремума,

$$\sup_{\xi} \sigma_{\tau(f, \xi)} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(\xi_1^k) \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) = +\infty = S_{\tau(f)}$$

Понятие измельчения разбиения

Пусть на отрезке $[a, b]$ введены разбиения τ_1 и τ_2 . Говорят, что разбиение τ_1 является измельчением разбиения τ_2 , если $\tau_2 \subset \tau_1$.

Лемма о монотонности сумм Дарбу

Пусть $\tau_2 \subset \tau_1$, тогда

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Достаточно рассмотреть случай, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x} \in \Delta_k = (x_{k-1}, x_k)$.

Тогда

$$S_{\tau_2}(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k.$$

Пусть

$$M_{k'} = \sup_{x \in [x_{k-1}, \hat{x}]} f(x), \quad M_{k''} = \sup_{x \in [\hat{x}, x_k]} f(x),$$

тогда

$$M_k \geq M_{k'}, M_k \geq M_{k''}$$

и

$$M_k \Delta x_k = M_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M_{k(x_k - \hat{x})} \geq M_{k'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_{k''}(x_k - \hat{x}),$$

откуда

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1, i \neq k}^n M_i \Delta x_i + M_{k'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_{k''}(x_k - \hat{x}) = S_{\tau_1}(f).$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма об ограниченности сумм Дарбу

Пусть τ_1 и τ_2 - разбиения отрезка $[a, b]$, тогда

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f).$$

Доказательство. Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. Пользуясь монотонностью сумм Дарбу, получим

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau(f)} \leq S_{\tau(f)} \leq S_{\tau_2}(f),$$

что и доказывает утверждение.

Необходимое условие интегрируемости

Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Если предположить, что f не ограничена, например, сверху, то, по лемме,

$$S_{\tau(f)} = +\infty$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда, согласно определению интегрируемости,

$$\exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \mid \sigma_{\tau(f, \xi)} - I \mid < 1 \Leftrightarrow I - 1 < \sigma_{\tau(f, \xi)} < I + 1.$$

В частности, при фиксированном разбиении τ , мелкость которого меньше δ , интегральные суммы ограничены (по ξ). Но это противоречит тому, что при том же разбиении,

$$\sup_{\xi} \sigma_{\tau(f, \xi)} = S_{\tau(f)} = +\infty.$$

Критерий Дарбу

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} (S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)}) = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \mid \sigma_{\tau(f, \xi)} - I \mid < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_{\tau(f,\xi)} < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в правой части неравенства к супремуму, а в левой части к инфимуму по ε , получаем

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_{\tau(f)}, \quad S_{\tau(f)} \leq I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Складывая неравенства

$$-s_{\tau(f)} \leq \frac{\varepsilon}{3} - I, \quad S_{\tau(f)} \leq I + \frac{\varepsilon}{3},$$

приходим к тому, что

$$S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Так как $\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} (S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)}) = 0$, то все верхние и нижние суммы Дарбу конечны. В силу леммы,

$$\sup_{\tau} s_{\tau(f)} = I_* < +\infty, \quad \inf_{\tau} S_{\tau(f)} = I^* < +\infty,$$

причем $I_* \leq I^*$. Пользуясь сказанным и тем, что для любого τ

$$s_{\tau(f)} \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau(f)},$$

получим

$$0 \leq I^* - I_* \leq S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)},$$

откуда, так как правая часть принимает сколь угодно малые значения $I_* = I^*$. Пусть $I = I_* = I^*$. Из неравенств

$$s_{\tau(f)} \leq I \leq S_{\tau(f)}, \quad s_{\tau(f)} \leq \sigma_{\tau(f,\xi)} \leq S_{\tau(f)},$$

получаем

$$|\sigma_{\tau(f,\xi)} - I| \leq S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)}.$$

Осталось воспользоваться утверждением критерия Дарбу и заметить, что мы приходим к тому, что

$$\int_a^b f dx = I,$$

что и доказывает утверждение.

Понятие колебания

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Колебанием функции f на множестве E назовем величину

$$\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} (f(x) - f(y)).$$

Теорема об интегрируемости непрерывной функции

$$f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b].$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Кантора, непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем, а значит

$$\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть τ - такое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\lambda(\tau) < \delta$, тогда

$$\omega(f, \Delta_i) = \sup_{x, y \in \Delta_i} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и

$$\sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

Значит, по следствию из критерия Дарбу, $f \in R[a, b]$.

Теорема о невлинии на интеграл значения функции в конкретной точке

Если значения интегрируемой функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. Пусть $f \in R[a, b]$, а функция $\tilde{f}$ отличается от f в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$. Так как, согласно необходимому условию интегрируемости, $|f| \leq C$, то

$$|\tilde{f}| \leq C_1, \quad C_1 = \max(C, |\tilde{f}(x_1)|, \dots, |\tilde{f}(x_n)|).$$

Заметим, что интегральные суммы для f и $\tilde{f}$ отличаются не больше, чем в $2n$ слагаемых, причем

$$|\sigma_{\tau(f, \xi)} - \sigma_{\tau(\tilde{f}, \xi)}| \leq 2n(C + C_1)\lambda(\tau) \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} 0,$$

что доказывает одновременное существование интегралов и их равенство между собой.

Теорема об интегрируемости функции и ее сужения

Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $f \in R[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Тогда $f \in R[\alpha, \beta]$.
2. Пусть $f \in R[a, c]$ и $f \in R[c, b]$, $a < c < b$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Доказательство. 1. Воспользуемся критерием Дарбу и, выбрав $\varepsilon > 0$, найдем δ , что выбрав разбиение τ отрезка $[a, b]$ мелкости меньшей, чем δ , будет выполняться

$$S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} < \varepsilon$$

Пусть теперь τ' - какое-то разбиение $[\alpha, \beta]$ мелкости меньшей δ . Дополним это разбиение, разбив отрезки $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$, до разбиения τ отрезка $[a, b]$ так, чтобы мелкость $\lambda(\tau)$ была меньше, чем δ . Тогда

$$0 \leq S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) \leq S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

2. Интегрируемость постоянной функции нам уже известна. Не нарушая общности будем считать, что f не постоянна, а значит $\omega(f, [a, b]) > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию интегрируемости найдем δ_1, δ_2 , что для любых разбиений отрезка $[a, c]$ таких, что $\lambda(\tau_1) < \delta_1$, и для любых разбиений отрезка $[c, b]$ таких, что $\lambda(\tau_2) < \delta_2$, выполняется

$$S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_{\tau_2}(f) - s_{\tau_2}(f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega(f, [a, b])}\right)$ и τ - разбиение отрезка $[a, b]$, что $\lambda(\tau) < \delta$. Пусть точка c принадлежит какому-то промежутку $[x_{i-1}, x_i]$. Обозначим

$$\tau' = \tau \cup \{c\}, \quad \tau_1 = \tau' \cap [a, c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c, b].$$

Тогда, согласно выбору δ ,

$$S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} \leq S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) + S_{\tau_2}(f) - s_{\tau_2}(f) + \omega(f, [a, b])\delta < \varepsilon,$$

что, согласно критерию Дарбу, влечет интегрируемость f на $[a, b]$.

Понятие кусочно-непрерывной функции

Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной, если ее множество точек разрыва конечно или пусто, и все разрывы - разрывы первого рода.

Теорема об интегрируемости кусочно-непрерывной функции

Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

Доказательство. Пусть $a_1 < \dots < a_m$ - все точки разрыва функции f на (a, b) . Функция f непрерывна во внутренних точках и имеет конечные односторонние пределы на концах отрезков $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_m, b]$, а значит интегрируема на каждом из них, отличаясь от непрерывной функции не более чем в двух точках, согласно теореме. Тогда, по только что доказанной теореме, она интегрируема на $[a, b]$.

Арифметические свойства интегрируемых функций

Пусть $f, g \in R[a, b]$. Тогда:

1. Линейная комбинация f и g интегрируема, то есть

$$\alpha f + \beta g \in R[a, b], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Произведение f и g интегрируемо, то есть

$$fg \in R[a, b].$$

3. Модуль функции интегрируем, то есть

$$|f| \in R[a, b].$$

4. Если $|f| > C$ на $[a, b]$, $C > 0$, то

$$\frac{1}{f} \in R[a, b].$$

Доказательство. 1. Так как

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)| \leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E),$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha| \omega(f, E) + |\beta| \omega(g, E),$$

верное для произвольного множества E .

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, то по следствию из критерия Дарбу интегрируемости функции,

$$\exists \delta_1 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_1 \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}.$$

Аналогично, так как $g \in R[a, b]$, то по следствию из критерия Дарбу интегрируемости функции,

$$\exists \delta_2 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta_2 \sum_{i=1}^n \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i=1}^n \omega(\alpha f + \beta g, \Delta_i) \Delta x_i \leq |\alpha| \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i + |\beta| \sum_{i=1}^n \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i \leq \frac{|\alpha| \varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta| \varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, по следствию из критерия Дарбу интегрируемости функции, $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$.

2. Так как $f, g \in R[a, b]$, то по необходимому условию они ограничены на $[a, b]$, то есть

$$\exists C : |f(x)| < C, |g(x)| < C \quad \forall x \in [a, b].$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} & |f(x)g(x) - f(y)g(y)| = \\ & |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + \\ & |g(y)| |f(x) - f(y)| \leq C(\omega(f, E) + \omega(g, E)), \end{aligned}$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega(fg, E) \leq C(\omega(f, E) + \omega(g, E)),$$

верное для произвольного множества E . Дальнейшие обоснования проводятся тем же образом, что и в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

4. Так как

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \left| \frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)} \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{C^2} \leq \frac{\omega(f, E)}{C^2},$$

то, переходя к супремуму в левой части, получим следующее неравенство:

$$\omega\left(\frac{1}{f}, E\right) \leq \frac{\omega(f, E)}{C^2},$$

верное для любого множества E . Дальнейшие обоснования проводятся тем же образом, что и в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

Теорема о линейности интеграла Римана

Пусть $f, g \in R[a, b]$, тогда

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Доказательство.

То, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$, известно из теоремы об арифметических свойствах интегрируемых функций. Осталось лишь в равенстве

$$\sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

перейти к пределу при $\delta(\tau) \rightarrow 0$, откуда и получим требуемое.

Теорема об аддитивности по промежутку

Пусть $f \in R[a, b]$, $c \in [a, b]$, тогда

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$ известна из ранее доказанной теоремы. Значит, для вычисления интеграла мы можем брать удобное для нас разбиение. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$, содержащее точку c . Это разбиение порождает разбиение τ_1 отрезка $[a, c]$ и τ_2 отрезка $[c, b]$, причем $\lambda(\tau_1) \leq \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \leq \lambda(\tau)$. Так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

и при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$ одновременно $\lambda(\tau_1) \rightarrow 0$ и $\lambda(\tau_2) \rightarrow 0$, то получаем требуемое.

Теорема о монотонности интеграла

Пусть $f, g \in R[a, b]$, $a \leq b$ и $f(x) \leq g(x)$ при $x \in [a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$, получаем требуемое.

Теорема о связи модуля интеграла и интеграла от модуля

Пусть $f \in R[a, b]$, тогда

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна из теоремы об арифметических свойствах интегрируемых функций. Так как

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i \right|,$$

то при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$ получается требуемое.

Первая теорема о среднем

Пусть $f, g \in R[a, b]$, g не меняет знак на $[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Тогда:

$$\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx.$$

Кроме того, если $f \in C[a, b]$, то

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f g dx = f(\xi) \int_a^b g dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, тогда

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x), \quad x \in [a, b]$$

и, по теореме о монотонности интеграла,

$$m \int_a^b g dx \leq \int_a^b f g dx \leq M \int_a^b g dx.$$

Если $\int_a^b g dx = 0$, то, согласно неравенству выше,

$$\int_a^b f g dx = 0,$$

а значит равенство

$$\int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx$$

верно при любом μ .

Если же $\int_a^b g dx \neq 0$, то, так как $g \geq 0$, выполнено, что $\int_a^b g dx > 0$.

Поделив все то же неравенство на этот интеграл, приходим к неравенству

$$m \leq \frac{\int_a^b f g dx}{\int_a^b g dx} \leq M.$$

Положив

$$\mu = \frac{\int_a^b f g dx}{\int_a^b g dx},$$

приходим к первому утверждению теоремы.

Если предположить, что $f \in C[a, b]$, то по второй теореме Больцано-Коши для каждого $\mu \in [m, M]$ существует $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$, что доказывает вторую часть теоремы.

Понятие интеграла с переменным верхним пределом

Пусть $f \in R[a, b]$ и $x \in [a, b]$. Функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f dx$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

$$\Phi \in C[a, b].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Так как $f \in R[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть существует $C > 0$, что

$$|f(x)| \leq C, \quad x \in [a, b].$$

Тогда, пользуясь следствием из теоремы об аддитивности, а также теоремой о сравнении интеграла от функции и интеграла от модуля функции, получим:

$$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f| dx \right| \leq C \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dx \right| = C|\Delta x|.$$

Значит, при $\Delta x \rightarrow 0$ выполняется $\Phi(x_0 + \Delta x) \rightarrow \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0 . Так как x_0 - произвольная точка отрезка $[a, b]$, то утверждение доказано.

Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом

Φ дифференцируема в точках непрерывности функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем в этих точках

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть f непрерывна в точке x_0 и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Рассмотрим цепочку преобразований:

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f dt - f(x_0)\Delta x}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt}{\Delta x} \right|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу непрерывности функции f в точке x_0 ,

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in [a, b] : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $|\Delta x| < \delta$, тогда

$$\left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt}{\Delta x} \right| \leq \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt}{\Delta x} \right| < \varepsilon \cdot \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dt}{\Delta x} \right| = \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Формула Ньютона-Лейбница для непрерывных функций

Пусть $f \in C[a, b]$ и F - ее первообразная. Тогда:

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Согласно следствию о существовании первообразной непрерывной функции, любая первообразная непрерывной функции имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f dt + C.$$

Подставим сначала $x = a$, получим

$$F(a) = \int_a^b f(x) dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Усиленная формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f \in R[a, b]$ и F - некоторая первообразная f на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Введем следующее разбиение отрезка $[a, b]$:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Пусть F - какая-то первообразная f на $[a, b]$. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

Согласно теореме Лагранжа, существует $\xi_k^n \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1}),$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k,$$

и мы получаем интегральную сумму для функции f по отрезку $[a, b]$ с оснащенным разбиением (τ^n, ξ^n) .

Так как $f \in R[a, b]$ и так как при $n \rightarrow \infty$ выполняется $\lambda(\tau^n) \rightarrow 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k = \int_a^b f dx.$$

С другой стороны,

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n) \Delta x_k,$$

а значит

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Формула интегрирования по частям

Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b]$, причем $u', v' \in R[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx$$

или

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доказательство. Согласно свойствам интегрируемых функций, $uv' \in R[a, b]$ и $u'v \in R[a, b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + uv' \in R[a, b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = \int_a^b (u'v + uv') dx = \int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b,$$

откуда и следует утверждение.

Формула замены переменной

Пусть $f \in C[a, b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$.

Тогда:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \varphi' dt.$$

Доказательство. Ясно, что интеграл от правой функции определен, ведь $f \circ \varphi \in C[\alpha, \beta]$, а значит $f(\varphi) \in R[\alpha, \beta]$ и, по свойствам интегрируемых функций, $f(\varphi) \varphi' \in R[\alpha, \beta]$. Кроме того, если F - первообразная f на $[a, b]$, то $F(\varphi)$ - первообразная $f(\varphi) \varphi'$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \varphi' dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f dx.$$

Теорема об интеграле от четной функции по симметричному промежутку

Пусть $f \in R[0, a]$ и является четной. Тогда:

$$\int_{-a}^a f dx = 2 \int_0^a f dx.$$

Доказательство. Так как $f(-x) = f(x)$, то, по теореме, $f \in R[-a, a]$. Пользуясь аддитивностью интеграла по промежутку, получим:

$$\int_{-a}^a f dx = \int_{-a}^0 f dx + \int_0^a f dx.$$

В первом интеграле можно сделать замену $t = -x, dt = -dx$, откуда

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt.$$

Значит,

$$\int_{-a}^a f dx = \int_0^a f dt + \int_0^a f dx = 2 \int_0^a f dx.$$

Теорема об интеграле от нечетной функции по симметричному промежутку

Пусть $f \in R[0, a]$ и является нечетной. Тогда:

$$\int_{-a}^a f dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей и остается в качестве упражнения.

Теорема об интеграле от периодической функции по периоду

Пусть $f \in R[0, T]$ и является периодической с периодом T . Тогда:

$$\int_a^{a+T} f dx = \int_0^T f dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей и остается в качестве упражнения.

Понятие длины арифметического вектора

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Элемент x иногда называется вектором, а иногда - точкой. Под длиной вектора (или под расстоянием от x до начала координат) будем понимать следующую величину:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Понятие движения

Отображение $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется движением, если

$$|x - y| = |U(x) - U(y)|.$$

Понятие площади

Функция множеств (функционал) $S: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве "квадрируемых" подмножеств плоскости, называется площадью, если

1. $S(A) \geq 0, A \in \mathcal{U}$.
2. Если $A, B \in \mathcal{U}, A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B \in \mathcal{U}$ и

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

3. Площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab .
4. Если $A \in \mathcal{U}, U$ - движение, то $U(A) \in \mathcal{U}$ и

$$S(U(A)) = S(A).$$

Понятия подграфика и криволинейной трапеции

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$. Множество

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется подграфиком функции f .

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то подграфик называется криволинейной трапецией.

Теорема о вычислении площади подграфика

Пусть $f \in R[a, b]$ и G_f - подграфик функции f . Если подграфик имеет площадь, то

$$S(G_f) = \int_a^b f dx.$$

Доказательство. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$. Геометрически очевидно, что

$$s_{\tau(f)} \leq S(G_f) \leq S_{\tau(f)}.$$

Поскольку $f \in R[a, b]$, то

$$S_{\tau(f)} \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \int_a^b f dx \xleftarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} S_{\tau(f)}.$$

Значит, по теореме о сжатой переменной,

$$S(G_f) = \int_a^b f dx.$$

Теорема о площади фигуры между графиками функций

Пусть $f, g \in R[a, b], f \leq g$. Тогда площадь фигуры $S(G_{f,g})$, где

$$G_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

вычисляется по формуле

$$S(G_{f,g}) = \int_a^b (g - f) dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перенести фигуру выше оси абсцисс, добавив к f и g такую постоянную c , чтобы $f + c \geq 0$. Тогда, пользуясь свойством сохранения площади при движении, а также предыдущей теоремой,

$$S(G_{f,g}) = S(G_{f+c,g+c}) = S(G_{g+c}) - S(G_{f+c}) = \int_a^b (g+c)dx - \int_a^b (f+c)dx = \int_a^b (g-f)dx.$$

Понятия подграфика и криволинейного сектора

Пусть $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Множество

$$\widetilde{G}_f = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f в полярных координатах. Если функция f непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то подграфик называется криволинейным сектором.

Теорема о площади подграфика в полярных координатах

Пусть $f \in R[\alpha, \beta]$ и $\widetilde{G}_f$ - подграфик функции f . Если подграфик имеет площадь, то

$$S(\widetilde{G}_f) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ - разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi).$$

Воспользовавшись тем, что площадь сектора радиуса r с углом φ равна $\frac{r^2\varphi}{2}$, составим суммы

$$s_{\tau(f)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S_{\tau(f)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Геометрически очевидно, что

$$s_{\tau(f)} \leq S(\widetilde{G}_f) \leq S_{\tau(f)}.$$

Кроме того, $s_{\tau(f)}$ и $S_{\tau(f)}$ - суммы Дарбу функции $\frac{f^2(\varphi)}{2}$. Поскольку $f^2 \in R[\alpha, \beta]$, то

$$S_{\tau(f)} \xrightarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi \xleftarrow{\lambda(\tau) \rightarrow 0} s_{\tau(f)}.$$

Значит, по теореме о сжатой переменной,

$$S(\widetilde{G}_f) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

Понятие объема

Функция множеств (функционал) $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве "кубируемых" подмножеств пространства $\mathbb{R}^3$, называется объемом, если

1. $V(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{U}$
2. Если $A, B \in \mathcal{U}$, $A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B \in \mathcal{U}$ и

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

3. Объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c равен abc
4. Если $A \in \mathcal{U}$, U - движение, то $U(A) \in \mathcal{U}$ и

$$V(U(A)) = V(A).$$

Свойства объема

Пусть $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ - объем. Тогда:

1. Объем монотонен, то есть если $A, B \in \mathcal{U}, A \subset B$,

$$V(A) \leq V(B).$$

2. Пусть $A \in \mathcal{U}$ содержится в некотором прямоугольнике. Тогда $V(A) = 0$.

3. Если множества $A, B \in \mathcal{U}$ пересекаются по множеству нулевого объема, то

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

Доказательство. 1. Заметим, что $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Тогда, предполагая кубируемость $(B \setminus A)$, согласно второму свойству из определения объема,

$$V(A \cup (B \setminus A)) = V(A) + V(B \setminus A) \geq V(A),$$

где последнее неравенство справедливо в виду неотрицательности объема.

2. Выберем $\varepsilon > 0$, тогда найдется параллелепипед P_ε , что

$$A \subset P_\varepsilon \text{ и } V(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Тогда, по доказанному в первом пункте,

$$0 \leq V(A) \leq V(P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

что, в силу произвольности ε , влечет равенство $V(A) = 0$.

3. Пусть $C = A \cap B$, причем $V(C) = 0$, тогда

$$V(A) = V(A \setminus C) + V(C) = V(A \setminus C),$$

откуда

$$V(A \cup B) = V(A \setminus C) + V(B) = V(A) + V(B).$$

Понятие сечения

Пусть T - тело, $x \in \mathbb{R}$. Множество

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$$

называется сечением тела T координатой x .

Теорема о вычислении объема через площади сечений

Пусть тело T удовлетворяет требованиям, озвученным выше. В рамках введенных обозначений, если тело T имеет объем, то

$$V(T) = \int_a^b S dx.$$

Доказательство. Пусть T имеет объем и τ - разбиение $[a, b]$. Пусть

$$m_k \min_{\Delta_k} S(x), \quad M_k = \max_{\Delta_k} S(x),$$

тогда

$$S(T(\xi_k^*)) = m_k, \quad S(T(\xi_k^{**})) = M_k.$$

Пусть

$$q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^*), \quad Q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^{**}),$$

тогда

$$q_k \subset T_k \subset Q_k, \quad T_k = \{(x, y, z) \in T : x \in \Delta_k\}.$$

Но тогда

$$\bigcup_{k=1}^n q_k \subset T \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k.$$

По пункту 3 леммы о свойствах объема,

$$V\left(\bigcup_{k=1}^n q_k\right) = \sum_{k=1}^n V(q_k) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = s_\tau,$$

$$V\left(\bigcup_{k=1}^n Q_k\right) = \sum_{k=1}^n V(Q_k) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S_\tau.$$

По монотонности объема,

$$s_\tau \leq V(T) \leq S_\tau.$$

Так как s_τ и S_τ - суммы Дарбу функции S , а последняя интегрируема, то

$$V(T) = \int_a^b S dx.$$

Понятие тела вращения

Пусть $f \in C[a, b]$, причем $f \geq 0$. Множество

$$T_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

называется телом вращения, полученным вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox .

Теорема о вычислении объема тела вращения

Пусть T - тело вращения, полученное вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox . Тогда

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2 dx.$$

Доказательство. Ясно, что $S(x) = \pi f^2(x)$, все условия предыдущей теоремы выполнены, а значит

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2 dx.$$

Понятие пути

Путем в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, все координатные функции которого непрерывны на $[a, b]$.

Понятия начала и конца пути, замкнутого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Точка $\gamma(a)$ называется началом пути, а точка $\gamma(b)$ - концом пути γ . Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то путь γ называется замкнутым.

Понятие носителя пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Множество $\gamma([a, b])$ называется носителем пути γ .

Понятие гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, причем

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

Говорят, что γ - путь гладкости $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, если $x_i \in C^m[a, b], i \in \{1, \dots, n\}$. Если $m = 1$, то путь γ часто просто называют гладким.

Понятие кусочно-гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Если отрезок $[a, b]$ можно разбить точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

так, что сужение пути γ на каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i], i \in \{1, \dots, n\}$ - гладкий путь, то путь γ называется кусочно-гладким.

Понятие эквивалентных путей

Путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется эквивалентным пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, если существует строго возрастающая биекция $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u).$$

Лемма

Введенное понятие эквивалентности путей - отношение эквивалентности на множестве путей.

Доказательство. Проверим все три свойства отношения эквивалентности.

1. Симметричность. Пусть путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u).$$

По свойствам обратных функций, $u^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ - возрастающая биекция, а значит

$$\gamma(u^{-1}) = \tilde{\gamma}(u(u^{-1})) = \tilde{\gamma},$$

и путь $\tilde{\gamma}$ эквивалентен пути γ .

2. Рефлексивность. Каждый путь, конечно, эквивалентен сам себе. В качестве функции u достаточно взять тождественное отображение.

3. Транзитивность. Пусть путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, что

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u).$$

Пусть, кроме того, путь $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\hat{\gamma} : [\varphi, \psi] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда существует возрастающая биекция $w : [\alpha, \beta] \rightarrow [\varphi, \psi]$, что

$$\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}(w).$$

Тогда $w(u) : [a, b] \rightarrow [\varphi, \psi]$ - возрастающая биекция, причем

$$\gamma = \tilde{\gamma}(u) = \hat{\gamma}(w(u)).$$

Понятие кривой

Класс эквивалентных путей называют кривой, а каждый представитель класса - параметризацией кривой. Кривую часто обозначают $\{\gamma\}$, где γ - какая-либо ее параметризация.

Понятие гладкости кривой

Кривая $\{\gamma\}$ называется гладкой (m -гладкой, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, кусочно-гладкой), если у нее существует гладкая (m -гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.

Понятие вписанной ломаной

Множество отрезков, соединяющих точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, называется ломаной, вписанной в путь γ , отвечающей разбиению τ . Эту ломаную будем обозначать s_τ .

Лемма о длине вписанной ломаной

Длина $|s_\tau|$ ломаной s_τ , вписанной в путь γ , равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Доказательство. Длина отрезка, соединяющего точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, вычисляется по теореме Пифагора и равна, очевидно,

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Тогда длина s_τ ломаной s_τ равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Понятие длины пути

Длиной пути γ называется величина

$$l_\gamma = \sup_{\tau} |s_\tau|.$$

Понятие спрямляемого пути

Если $l_\gamma < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Лемма о длинах эквивалентных путей

Длины эквивалентных путей равны.

Доказательство. Пусть путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ - возрастающая биекция. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^k$ - дробление $[a, b]$, тогда $\tilde{\tau}_k = u(t_k)$ - дробление $[\alpha, \beta]$. Значит,

$$s_{\tilde{\gamma}} = \sum_{k=1}^n |\tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_k) - \tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = s_\gamma \leq l_\gamma,$$

и, тем самым, $l_{\tilde{\gamma}} \leq l_\gamma$. Меняя γ и $\tilde{\gamma}$ местами, проводя аналогичные приведенным выше выкладки, придем к неравенству $l_\gamma \leq l_{\tilde{\gamma}}$, откуда $l_\gamma = l_{\tilde{\gamma}}$.

Понятие длины кривой

Длиной кривой называют длину любой ее параметризации.

Лемма об аддитивности длины

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ - путь, $c \in (a, b)$, γ^1, γ^2 - сужения пути γ на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$, соответственно. Путь γ спрямляем тогда и только тогда, когда спрямляемы пути γ^1 и γ^2 , причем

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть путь γ спрямляем и пусть τ - разбиение $[a, b]$, содержащее точку c . Ясно, что $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 - разбиение $[a, c]$ и τ_2 - разбиение $[c, b]$. Тогда ломанная s_τ - объединение ломаных s_{τ_1} и s_{τ_2} , причем

$$|s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| = |s_\tau| \leq l_\gamma < +\infty.$$

Отсюда сразу следует, что каждый из путей γ^1 и γ^2 спрямляем. Переходя в предыдущем неравенстве сначала к супремуму по τ_1 , а потом по τ_2 , получим

$$l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} \leq l_\gamma.$$

Докажем достаточность и, заодно, противоположное неравенство. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$. Если оно не содержит точку c , то добавим ее, получив разбиение $\tau' = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 - разбиение $[a, c]$ и τ_2 - разбиение $[c, b]$. Пусть точка c попала в i -ый отрезок разбиения, то есть $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Длина ломаной, отвечающей разбиению τ' , могла только увеличиться по сравнению с длиной ломаной, отвечающей разбиению τ , так как, согласно неравенству треугольника,

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \leq \\ \sqrt{(x(c) - x(t_{i-1}))^2 + (y(c) - y(t_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(t_i) - x(c))^2 + (y(t_i) - y(c))^2}$$

Значит,

$$|s_\tau| \leq |s_{\tau'}| = |s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} < +\infty.$$

и, тем самым, кривая γ спрямляема. Переходя к супремуму по τ в левой части неравенства, получим

$$l_\gamma \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Объединяя это неравенство и последнее неравенство, полученное в пункте необходимости, заключаем, что

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2},$$

и теорема полностью доказана.

Достаточное условие спрямляемости пути

Пусть γ - гладкий путь, тогда он спрямляем.

Доказательство. Пусть τ - разбиение отрезка $[a, b]$. Длина ломаной, вписанной в путь γ , равна

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа, найдутся точки $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, что

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

откуда

$$|s_\tau| = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \Delta t_i.$$

Пусть

$$M_x = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad M_y = \max_{t \in [a, b]} |y'(t)|,$$

$$m_x = \min_{t \in [a, b]} |x'(t)|, \quad m_y = \min_{t \in [a, b]} |y'(t)|,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \Delta t_i \leq |s_\tau| \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \Delta t_i,$$

откуда

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \leq |s_\tau| \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a).$$

Переходя к супремуму по τ , имеем

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}(b - a) \leq l_\gamma \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}(b - a).$$

и правое неравенство дает возможность заключить, что путь спрямляем.

Теорема о гладкости длины участка пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - гладкий путь. Тогда $l_\gamma \in C^1[a, b]$, причем

$$l'_{\gamma(t)} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$, причем $t_0, t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Согласно последнему неравенству в доказательстве предыдущей теоремы, сохраняя те же обозначения, на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ выполнено

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}\Delta t \leq l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_{\gamma(t_0)} \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\Delta t.$$

Поделив неравенство на $\Delta t > 0$, получим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \leq \frac{l_{\gamma(t_0 + \Delta t)} - l_{\gamma(t_0)}}{\Delta t} \leq \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Так как $M_x = \max_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |x'(t)|$, и функция $x'(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} M_x = x'(t_0).$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} m_x = x'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} M_y = y'(t_0), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} m_y = y'(t_0).$$

Значит,

$$\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} \frac{l_{\gamma(t_0 + \Delta t)} - l_{\gamma(t_0)}}{\Delta t} \leq \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}.$$

Аналогично рассматривается случай $\Delta t < 0$. Значит, в силу произвольности t_0 ,

$$l'_{\gamma(t)} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Теорема о вычислении длины пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - гладкий путь, тогда

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Доказательство. Так как $l'_\gamma \in C[a, b]$ и $l_\gamma(a) = 0$, то, по формуле Ньютона-Лейбница

$$l_{\gamma(t)} = l_{\gamma(t)} - l_{\gamma(a)} = \int_a^t l'_\gamma dt.$$

Так как $l_\gamma = l_{\gamma(b)}$, то

$$l_\gamma = l_{\gamma(b)} = \int_a^b l'_\gamma dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Теорема о длине графика гладкой функции

Пусть $f \in C^1[a, b]$ и

$$\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x), x \in [a, b]\}$$

- график функции f . Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx.$$

Доказательство. Действительно, график Γ_f может быть задан следующей параметризацией:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Дальше остается сослаться на только что доказанную теорему.

Теорема о длине графика функции в полярной системе координат

Пусть $f \in C^1[\varphi_0, \varphi_1]$, $f \geq 0$ и

$$\Gamma_f = \{(\varphi, r) : r = f(\varphi), \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$$

- график функции f в полярной системе координат. Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi.$$

Доказательство. Действительно, график Γ_f может быть задан следующей параметризацией:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = f(\varphi) \cos(\varphi) \\ y = f(\varphi) \sin(\varphi) \end{cases}, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1].$$

Дальше остается сослаться на только что доказанную теорему.

Понятие локальной интегрируемости

Говорят, что функция f локально интегрируема на множестве E , и пишут $f \in R_{loc}(E)$, если $f \in R[a, b]$ для любого $[a, b] \subset E$.

Понятие несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. Тогда символ

$$\int_a^b f dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a, b)$.

Понятие значения несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ и $\omega \in [a, b)$. Предел

$$\lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла от функции f по множеству $[a, b)$.

Понятие сходящегося несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ и $\omega \in [a, b)$. Если предел

$$\lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f dx$$

существует в $\mathbb{R}$, то несобственный интеграл называется сходящимся. Иначе - расходящимся.

Понятия интегралов первого и второго родов

Несобственный интеграл по неограниченному промежутку часто называется несобственным интегралом первого рода.

Несобственный интеграл от неограниченной функции по промежутку конечной длины часто называется несобственным интегралом второго рода.

Лемма о совпадении несобственного интеграла и интеграла Римана

Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow b-0} \int_a^\omega f dx = \int_a^b f dx,$$

где справа стоит интеграл Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из свойства непрерывности интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема о линейности несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если сходятся интегралы

$$\int_a^b f dx \text{ и } \int_a^b g dx,$$

то

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в равенстве, справедливом для интеграла Римана:

$$\int_a^\omega (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^\omega f dx + \beta \int_a^\omega g dx.$$

Теорема об аддитивности по промежутку

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда для любого $c \in (a, b)$ справедливо равенство

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx,$$

причем интегралы

$$\int_a^b f \, dx \text{ и } \int_c^b f \, dx$$

сходятся или нет одновременно.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в равенстве, справедливом для интеграла Римана:

$$\int_a^\omega f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^\omega f \, dx.$$

Понятие остатка несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда

$$\int_c^b f \, dx$$

называется остатком несобственного интеграла от f по $[a, b)$.

Лемма

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда сходимость несобственного интеграла от f по $[a, b)$ равносильна тому, что

$$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_c^b f \, dx = 0.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть несобственный интеграл от f по $[a, b)$ сходится. Тогда, по теореме об аддитивности по промежутку,

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx.$$

Пусть теперь $c \rightarrow b - 0$, тогда

$$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f \, dx = \int_a^b f \, dx,$$

откуда и следует требуемое.

Докажем достаточность. Пусть остаток интеграла стремится к нулю. Значит, при некотором $c \in (a, b)$

$$\int_c^b f \, dx \in \mathbb{R}.$$

Но тогда, при $\omega > c$ выполнено

$$\int_a^\omega f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^\omega f \, dx$$

и при $\omega \rightarrow b - 0$ приходим к требуемому.

Теорема о монотонности несобственного интеграла

Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$, причем

$$\int_a^b f \, dx \in \overline{\mathbb{R}} \text{ и } \int_a^b g \, dx \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Если $f \leq g$ на $[a, b)$, то

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в неравенстве, справедливом для интеграла Римана:

$$\int_a^\omega f \, dx \leq \int_a^\omega g \, dx.$$

Формула интегрирования по частям

Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b uv' \, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' \, dx, \quad uv \Big|_a^b = \lim_{\omega \rightarrow b-0} u(\omega)v(\omega) - u(a)v(a),$$

или

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du,$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует (в $\mathbb{R}$) хотя бы два предела из трех.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \rightarrow b - 0$ в верном для интеграла Римана равенстве:

$$\int_a^\omega uv' \, dx = uv \Big|_a^\omega - \int_a^\omega vu' \, dx.$$

Формула замены переменной

Пусть $f \in C[A, B)$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta) \rightarrow [A, B)$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$. Пусть, кроме того, существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' \, dt,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi)\varphi' dt, \quad F(C) = \int_{\varphi(\alpha)}^C f dx.$$

Согласно формуле замены переменной в интеграле Римана, $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

1. Пусть существует

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f dx = I \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Докажем, что второй интеграл тоже существует и равен I . Пусть $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$, причем $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \in [A, B)$ и $\varphi(\gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(\beta-0)$. Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\varphi(\gamma_n)) = I.$$

В силу произвольности последовательности γ_n , приходим к требуемому.

2. Пусть теперь существует

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi' dt = I \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Докажем, что второй интеграл тоже существует. Тогда, по уже доказанному в первом пункте, он равен I . Если $\varphi(\beta-0) \in [A, B)$, то интеграл существует в собственном смысле и доказывать нечего. Пусть теперь $\varphi(\beta-0) = B$. Пусть $C_n \in [A, B)$, $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$. Не нарушая общности можно считать, что $C_n \in [\varphi(\alpha), B)$. По теореме Больцано-Коши, найдутся точки $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$, что $\varphi(\gamma_n) = C_n$. Покажем, что $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$.

Если некоторая подпоследовательность $\gamma_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tau \in [\alpha, \beta)$, то, по непрерывности φ , $\varphi(\gamma_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(\tau) < B$, что неверно. Значит, $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\gamma_n) = I.$$

Критерий сходимости интеграла от знакопостоянной функции

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$. Тогда функция

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f dx, \quad \omega \in [a, b),$$

возрастает, а сходимость интеграла

$$\int_a^b f dx$$

равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.

Доказательство. Ясно, что если $a \leq \omega_1 \leq \omega_2 < b$, то, так как $f \geq 0$, по свойству интеграла Римана,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f \, dx \geq 0.$$

Но тогда

$$F(\omega_2) = \int_a^{\omega_2} f \, dx = \int_a^{\omega_1} f \, dx + \int_{\omega_1}^{\omega_2} f \, dx \geq \int_a^{\omega_1} f \, dx = F(\omega_1),$$

откуда $F(\omega_2) \geq F(\omega_1)$, что и доказывает неубывание $F(\omega)$.

Значит, вопрос сходимости несобственного интеграла, то есть вопрос существования конечного предела $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow b - 0$, сводится к теореме Вейерштрасса. Как мы знаем, конечность предела (или сходимость заявленного интеграла) в этом случае равносильна ограниченности $F(\omega)$.

Признаки сравнения

Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$ и $0 \leq f \leq g$ при $x \in [a, b)$. Тогда:

1. Сходимость интеграла от g по $[a, b)$ влечет сходимость интеграла от f по $[a, b)$, то есть

$$\int_a^b g \, dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f \, dx < +\infty.$$

2. Расходимость интеграла от f по $[a, b)$ влечет расходимость интеграла от g по $[a, b)$, то есть

$$\int_a^b f \, dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b g \, dx = +\infty.$$

3. Если $f \sim g$ при $x \rightarrow b - 0$, то интегралы от f и g по $[a, b)$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Согласно предыдущей теореме, функция

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f \, dx$$

не убывает с ростом ω . Используя монотонность интеграла Римана, а также используя теорему Вейерштрасса, при каждом $\omega \in [a, b)$ справедлива цепочка неравенств:

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f \, dx \leq \int_a^{\omega} g \, dx \leq \sup_{\omega \in [a, b)} \int_a^{\omega} g \, dx = \int_a^b g \, dx < +\infty,$$

где последнее неравенство выполнено, согласно условию. Но тогда $F(\omega)$ ограничена, а значит, по предыдущей теореме, интеграл от f по $[a, b)$ сходится.

2. От противного. Пусть интеграл

$$\int_a^b g \, dx$$

сходится. Тогда, по только что доказанному первому пункту, сходится и

$$\int_a^b f \, dx,$$

что противоречит условию.

3. Согласно определению, эквивалентность f и g при $x \rightarrow b - 0$ означает, что существует такая функция α , что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \text{ при } x \in U(b) \cap [a, b), \text{ причем } \lim_{x \rightarrow b-0} \alpha(x) = 1.$$

Тогда существует $\Delta > a$, что при $x \in [\Delta, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2},$$

откуда, при $x \in [\Delta, b)$,

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Кроме того, сходимость интегралов

$$\int_a^b f \, dx \text{ и } \int_a^b g \, dx$$

равносильна сходимости интегралов

$$\int_{\Delta}^b f \, dx \text{ и } \int_{\Delta}^b g \, dx.$$

Для последних же рассуждения проводятся использованием пунктов 1 и 2 данной теоремы, опираясь на приведенное выше неравенство.

Скажем, если сходится интеграл от g по $[\Delta, b)$, то, используя правую часть полученного неравенства, сходится и интеграл от f по $[\Delta, b)$. Если же расходится интеграл от f по $[\Delta, b)$, то, опять же, используя правую часть того же самого неравенства, расходится и интеграл от g по $[\Delta, b)$. Аналогичные рассуждения относительно левого неравенства завершают доказательство.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Для того чтобы интеграл

$$\int_a^b f \, dx$$

сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \quad \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f \, dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \int_a^{\omega} f \, dx.$$

Согласно определению, сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(\omega)$ при $\omega \rightarrow b - 0$. Согласно критерию Коши существования предела функции, это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \quad |F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon.$$

Последнее же неравенство, в силу свойств интеграла, переписывается как

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f \, dx \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое.

Понятие абсолютной сходимости

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f| \, dx.$$

Теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, то, согласно критерию Коши,

$$\exists \Delta : \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \quad \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f| \, dx \right| < \varepsilon.$$

Но, согласно свойствам интеграла,

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f \, dx \right| \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f| \, dx \right| < \varepsilon,$$

а значит, по критерию Коши, интеграл от f по $[a, b)$ сходится.

Понятие условно сходящегося интеграла

Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл от f по $[a, b)$ сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что интеграл сходится условно.

Понятие несобственного интеграла с двумя особенностями на концах

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Тогда символ

$$\int_a^b f \, dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству (a, b) .

Понятие значения несобственного интеграла с двумя особенностями на концах

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Тогда величина

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow a+0} \int_{\omega_1}^c f \, dx + \lim_{\omega_2 \rightarrow b-0} \int_c^{\omega_2} f \, dx,$$

если оба предела существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и не равны бесконечностям разных знаков, называется значением несобственного интеграла от функции f по множеству (a, b) .

Понятие сходящегося (расходящегося) несобственного интеграла

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}(a, b)$. Если

$$\left(\lim_{\omega_1 \rightarrow a+0} \int_{\omega_1}^c f \, dx + \lim_{\omega_2 \rightarrow b-0} \int_c^{\omega_2} f \, dx \right) \in \mathbb{R}$$

то несобственный интеграл от функции f по (a, b) называется сходящимся, иначе - расходящимся.

Лемма

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n = 2k-1 \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Легко проверить, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Пусть $n > 1$, тогда

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(-\cos(x)) = -\cos(x) \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

где последнее равенство верно в силу того, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. В итоге,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

откуда легко получается требуемое.

Формула Валлиса

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Доказательство. Ясно, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Обозначив

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx,$$

получим $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, откуда, по предыдущей лемме,

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Пусть

$$x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2,$$

тогда

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n} \pi,$$

откуда, по теореме о сжатой переменной, получается требуемое.

Интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Легко проверить, что при $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$e^x \geq 1 + x.$$

Тогда

$$(1 - x^2) \leq e^{-x^2} = (e^{x^2})^{-1} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Будем рассматривать левое неравенство при $x \in [-1, 1]$, а правое - при $x \in \mathbb{R}$, тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(1 + x^2)^k},$$

а значит, в силу неотрицательности интеграла от неотрицательной функции и монотонности интеграла

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^k dx \leq \int_{-1}^1 e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^k}.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = \sin t$, а в последнем замену $x = \tan t$. Тогда, согласно формуле замены переменной, придем к неравенству

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2} t dt,$$

откуда, в силу четности косинуса,

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2} t dt.$$

Так как, как было показано ранее,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} \\ n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \\ n = 2k-1 \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то приходим к цепочке неравенств

$$2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} \, dx \leq \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Сделаем в интеграле замену $t = \sqrt{k}x$ и придем к неравенству

$$2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \leq \pi \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

или

$$2\sqrt{k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \leq \pi \sqrt{k} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}.$$

По формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}.$$

Тогда

$$2\sqrt{k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}$$

и

$$\pi \sqrt{k} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^{-1} \frac{2k}{2k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы о сжатой переменной.

Понятие ряда

Пусть дана последовательность a_k . Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

называется числовым рядом с общим членом a_k .

Понятие частичной суммы ряда

n -ой частичной суммой ряда с общим членом a_k называется величина

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Понятие суммы ряда

Суммой ряда с общим членом a_k называют предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Понятие сходящегося ряда

Ряд с общим членом a_k называется сходящимся, если его сумма существует в $\overline{\mathbb{R}}$. Иначе ряд называется расходящимся.

Критерий Коши

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно определению, сходимость ряда - это сходимость последовательности его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

По критерию Коши эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \mid S_{n+p} - S_n < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно тому, что $\mid \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \mid < \varepsilon$.

Необходимое условие сходимости ряда

Пусть ряд с общим членом a_k сходится. Тогда

$$a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Так как ряд сходится, то, так как S_{n-1} - подпоследовательность S_n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}.$$

Но тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S - S = 0.$$

Пусть дан ряд с общим членом a_k . Тогда

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

называется m -ым остатком ряда.

Лемма о сходимости ряда в терминах остатков

Для сходимости ряда с общим членом a_k необходимо и достаточно, чтобы сходился любой его остаток R_m . В этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + R_m = S_m + R_m.$$

Доказательство. Ясно, что при $n > m$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k.$$

Так как первое слагаемое после знака равенства - число, не зависящее от n , то сходимость исходного ряда равносильна сходимости R_m . Заявленное равенство получается предельным переходом.

Лемма о стремлении остатка к нулю

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0.$$

Доказательство. 1. Докажем необходимость. Пусть ряд сходится. Тогда, по предыдущей лемме,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_m + R_m.$$

Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$.

2. Докажем достаточность. Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$. Тогда для всех номеров m определен и конечен R_m , а значит, например, сходится R_1 . Но тогда, по замечанию выше, сходится и ряд.

Лемма о линейности суммирования

Пусть сходятся ряды с общими членами a_k и b_k . Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд с общим членом $\alpha a_k + \beta b_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S_n^B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение.

Лемма о монотонности суммирования

Пусть $a_k \leq b_k$ и ряды с общими членами a_k и b_k имеют суммы в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим

$$S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \leq S_n^B \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^B \Rightarrow S^A \leq S^B.$$

Критерий сходимости ряда с положительными членами

Пусть $a_k \geq 0$. Тогда последовательность частичных сумм ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

возрастает и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм.

Доказательство. Так как $a_k \geq 0$, точнее

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Тем самым, вопрос о наличии (и конечности) предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n .

Признаки сравнения

Пусть $0 \leq a_k \leq b_k$. Тогда:

1. Сходимость ряда с общим членом b_k влечет сходимость ряда с общим членом a_k , то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty.$$

2. Расходимость ряда с общим членом a_k влечет расходимость ряда с общим членом b_k , то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty.$$

3. Если $a_k \sim b_k$ при $k \rightarrow +\infty$, то ряды с общими членами a_k и b_k сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Обозначим

$$S_n^A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k, \quad S_n^B = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A , согласно предыдущей теореме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.

2. Докажем второй пункт. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k , то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k . Это противоречит условию.

3. Докажем третий пункт. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow \frac{1}{2}b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}b_k.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичным рассуждениям в соответствующей теореме про интегралы, и остаются в качестве упражнения.

Радикальный признак Коши.

Пусть $a_k > 0$ и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. В силу того, что верхний предел - это частичный предел, найдется подпоследовательность a_{k_n} такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{a_{k_n}} = l.$$

Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого номера n_0 , выполняется

$$\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > 1 \Rightarrow a_{k_n} > 1.$$

Отсюда следует, что a_{k_n} не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости ряда, и ряд с общим членом a_k расходится.

2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. По свойству верхнего предела,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \sqrt[k]{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1.$$

Действительно, иначе мы могли бы из последовательности $\sqrt[k]{a_k}$ выделить подпоследовательность, все члены которой больше, чем $\frac{l+1}{2}$, а значит ее верхний предел был бы не меньше, чем $\frac{l+1}{2} > l$, что противоречит условию. Из полученного неравенства приходим к тому, что при $k > k_0$ выполняется

$$a_k < \left(\frac{l+1}{2} \right)^k.$$

Так как ряд

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2} \right)^k$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит сходится и исходный ряд.

Признак Даламбера

Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Так как $l > 1$, то при $k > k_0$ оказывается справедливым неравенство

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow a_k \geq a_{k_0+1} > 0,$$

откуда следует, что a_k не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию сходимости ряда.

2. Докажем второй пункт. Положим $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Согласно определению предела, найдется k_0 , что при $k > k_0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1,$$

а значит

$$a_{k+1} < \left(\frac{l+1}{2} \right) a_k.$$

По индукции, при $k > k_0$ имеем

$$a_k \leq \left(\frac{l+1}{2} \right)^{k-k_0-1} a_{k_0+1}.$$

Так как ряд

$$a_{k_0+1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2} \right)^{k-k_0-1}$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$R_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит сходится и исходный ряд.

Признак Раабе.

Пусть $a_k > 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда:

1. Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.
 2. Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.
-

Схема Куммера

Пусть $a_k, b_k > 0$, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$$

расходится. Пусть, кроме того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда:

1. Если $l > 0$, то ряд с общим членом a_k сходится.
2. Если $l < 0$, то ряд с общим членом a_k расходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Так как $l > 0$, то существует k_0 , что при $k > k_0$ выполнено

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} > \frac{l}{2} a_{k+1} > 0.$$

В частности, $a_k b_k > a_{k+1} b_{k+1}$, а значит последовательность $a_k b_k$ убывает при $k > k_0$. Кроме того, она ограничена снизу, например, нулем, а значит имеет предел, например, равный A . Но тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^k (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k_0+1} b_{k_0+1} - a_{k+1} b_{k+1}) = a_{k_0+1} b_{k_0+1} - A < +\infty. \end{aligned}$$

Значит, сходится и $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n+1}$, но тогда сходится и ряд с общим членом a_n .

2. Докажем второй пункт. Пусть $l < 0$. Тогда существует k_0 , что при $k > k_0$

$$b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} < 0 \Rightarrow b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1} < 0.$$

Отсюда получаем, что $b_{k+1} a_{k+1} > b_k a_k$ и последовательность $b_k a_k$ монотонно возрастает при $k > k_0$. Значит,

$$a_k b_k \geq a_{k_0+1} b_{k_0+1} \Rightarrow a_k \geq \frac{a_{k_0+1} b_{k_0+1}}{b_k}$$

и ряд $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$ расходится согласно признакам сравнения.

Теорема

Пусть $a_k > 0, a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

1. Если ряд с общим членом a_k расходится, то существует последовательность b_k , что $b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ и что ряд с общим членом $a_k b_k$ расходится.
2. Если ряд с общим членом a_k сходится, то существует последовательность b_k , что $b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$ и что ряд с общим членом $a_k b_k$ сходится.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Положим

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}}, \quad S_k = \sum_{i=1}^k a_i, \quad S_0 = 0.$$

Тогда

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \frac{S_k - S_{k-1}}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}.$$

Ясно, что ряд с таким общим членом расходится, так как

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}) = \sqrt{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

2. Докажем второй пункт. Положим

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{R_{k-1}}}, \quad R_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_k b_k &= \frac{a_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{R_{k-1} - R_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})(\sqrt{R_{k-1}} + \sqrt{R_k})}{\sqrt{R_{k-1}}} \leq \\ &\leq 2(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}). \end{aligned}$$

Понятно, что ряд с общим членом $(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})$ сходится, ведь

$$\sum_{k=1}^n (\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}) = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{R_0},$$

а значит, по признаку сравнения, сходится и требуемый ряд.

Интегральный признак Коши

Пусть $f \in R_{loc}[1, \infty)$ и монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд с общим членом $f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^\infty f \, dx.$$

Доказательство. Пусть, скажем, f убывает. Тогда, если $f(x_0) < 0$, в силу монотонности, неравенство $f(x) \leq f(x_0) < 0$ выполняется при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится. Кроме того,

$$\int_{x_0}^A f \, dx \leq f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -\infty,$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \geq 0$.

В этом случае, вспоминая, что f убывает, очевидно следующее неравенство:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \, dx \leq f(k),$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Учитывая, что функция

$$F(\omega) = \int_1^\omega f \, dx$$

возрастает, для существования предела $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n+1)$. Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ и рассуждениями, аналогичными приводимым в доказательстве третьего пункта признаков сравнения.

Лемма

Пусть f неотрицательна, убывает на $[1, +\infty)$ и $f \in R_{loc}[1, +\infty)$. Тогда последовательность

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f \, dx$$

имеет предел.

Доказательство. Докажем, что A_n возрастает. Действительно,

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f \, dx \geq 0.$$

Покажем, что A_n ограничена сверху. Для этого проведем следующее преобразование:

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f \, dx.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^n f(k+1),$$

то, согласно полученному в доказательстве интегрального признака Коши неравенству,

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f \, dx \leq 0,$$

откуда

$$A_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1).$$

Далее остается сослаться на теорему Вейерштрасса.

Понятие абсолютной сходимости

Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.

Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда

Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда, согласно тому же критерию Коши получаем, что ряд с общим членом a_k сходится.

Понятие условной сходимости

Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).

Признак Лейбница

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю, сходится.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность S_{2n} последовательности частичных сумм данного ряда. Группируя, получим, что

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2},$$

где неравенство верно ввиду неотрицательности скобок (в силу убывания a_n). Тем самым, последовательность S_{2n} возрастает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, по теореме Вейерштрасса, последовательность S_{2n} имеет предел, например S . Но тогда

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S,$$

так как общий член стремится к нулю. Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Тогда, по доказанному,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |S_{2n} - S| < \varepsilon,$$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |S_{2n-1} - S| < \varepsilon.$$

Но тогда, если $k > \max(2n_0, 2n_1 - 1)$, то либо $k = 2n$ и $n > n_0$, либо $k = 2n - 1$ и $n > n_1$, а значит

$$|S_k - S| < \varepsilon,$$

что доказывает сходимость рассматриваемого ряда.

Лемма об остатке ряда лейбницевского типа

Пусть рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю. Тогда

$$|R_n| \leq a_{n+1}, \quad R_{n(-1)}^n \geq 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что остаток ряда лейбницевского типа - с точностью до знака ряд лейбницевского типа и применять к нему сформулированное выше замечание.

Понятие функциональной последовательности

Последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, называется функциональной последовательностью.

Понятие функционального ряда

Пусть дана функциональная последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots$$

называется функциональным рядом с общим членом f_k .

Понятие поточечной сходимости функциональной последовательности

Говорят, что функциональная последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функциональной последовательности f_k .

Понятие частичной суммы функционального ряда

n -ой частичной суммой функционального ряда с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

Понятие сходимости функционального ряда

Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно (или просто сходится) на множестве $D \subset X$, если

$$\forall x \in D \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходятся.}$$

Множество D при этом называется множеством (поточечной) сходимости функционального ряда с общим членом f_k .

Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности

Говорят, что последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится к функции f на множестве $D \subset X$ равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall x \in D |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} f.$$

Понятие равномерно сходящегося ряда

Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на множестве $D \subset X$, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на D .

Критерий Коши равномерной сходимости ф. п.

Для того чтобы функциональная последовательность $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходилась равномерно на $D \subset X$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости f_k к некоторой функции f ,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 |f_k - f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $k + p > k_0$ и, по неравенству треугольника,

$$|f_{k+p} - f_k| \leq |f_{k+p} - f| + |f - f_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D |f_{k+p}(x) - f_{k(x)}| < \varepsilon$$

гарантирует, что при каждом $x \in D$ числовая последовательность фундаментальна, значит сходится. Положим

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k(x)}, \quad x \in D.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдем k_0 , что при $k > k_0$ и $p \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in D |f_{k+p}(x) - f_{k(x)}| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\forall x \in D |f(x) - f_{k(x)}| \leq \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое.

Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_{k(x)} \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, так как равномерная сходимость ряда - суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Необходимое условие равномерной сходимости ряда

Если ряд с общим членом $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$, то

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} 0.$$

Доказательство. Доказательство получается сразу, если положить в критерии Коши $p = 1$.

Признак Вейерштрасса

Пусть $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset X$. Если существует последовательность a_k , что

$$|f_{k(x)}| \leq a_k, \quad x \in D,$$

и ряд с общим членом a_k сходится, то функциональный ряд с общим членом f_k сходится равномерно (и абсолютно) на D .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Используя критерий Коши и учитывая неотрицательность a_k , имеем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

В то же время,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_{k(x)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_{k(x)}| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

что верно сразу для всех $x \in D$. Значит, используя критерий Коши равномерной сходимости ряда, а также определение абсолютной сходимости, получаем требуемое.

Теорема о перестановке предельных переходов

Пусть $f, f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f .
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{k(x)} = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 - предельная для D .

Тогда пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

существуют (в $\mathbb{R}$) и совпадают, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k(x)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_{k(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D |f_{k+p}(x) - f_{k(x)}| < \varepsilon.$$

Перейдя к пределу при $x \rightarrow x_0$, получим

$$|a_{k+p} - a_k| \leq \varepsilon,$$

что влечет фундаментальность и, как следствие, сходимость последовательности a_k .

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу равномерной сходимости на D ,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \forall x \in D |f_{k(x)} - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу сходимости последовательности a_k к числу A ,

$$\exists k_1 : \forall k > k_1 |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $m = 1 + \max(k_0, k_1)$, тогда одновременно, причем $\forall x \in D$,

$$|a_m - A| < \varepsilon \text{ и } |f_{m(x)} - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Согласно определению предела функции,

$$\exists \mathring{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap D \quad |f_{m(x)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Значит, при $x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap D$, имеем

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_{m(x)}| + |f_{m(x)} - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Теорема о почленном переходе к пределу

Пусть $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S .
2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{k(x)} = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 - предельная для D .

Тогда ряд с общим членом a_k сходится к сумме A , причем $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = A$, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_{k(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_{k(x)}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применять предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

Теорема о непрерывности предельной функции

Пусть $f, f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Последовательность f_k равномерно сходится на D к функции f .
2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0 .

Тогда f непрерывна в x_0 . В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D , то и f непрерывна на D .

Доказательство. Если x_0 - изолированная точка, то, так как любая функция непрерывна в изолированной точке своей области определения, утверждение доказано. Если x_0 - предельная, то выполнены условия теоремы о перестановке предельных переходов, где $a_k = f_{k(x_0)}$. Поэтому,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k(x_0)} = f(x_0),$$

что и завершает доказательство.

Теорема о непрерывности суммы ряда

Пусть $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем:

1. Ряд с общим членом f_k равномерно сходится на D к сумме S .
2. Все члены последовательности f_k непрерывны в x_0 .

Тогда сумма ряда S непрерывна в x_0 . В частности, если все члены последовательности f_k непрерывны на D , то и сумма ряда непрерывна на D .

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

Интегрирование и предельный переход

Пусть $f_k, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k \in C[a, b]$, и

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{[a, b]} f.$$

Тогда $f \in C[a, b]$ и

$$\int_a^x f_k dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{[a, b]} \int_a^x f dx.$$

Доказательство. То, что $f \in C[a, b]$ следует из теоремы о непрерывности предельной функции. Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - f_{k(x)}| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Пусть $k > k_0$, тогда

$$\left| \int_a^x f_k dx - \int_a^x f dx \right| \leq \int_a^x |f_k - f| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (x-a) \leq \varepsilon,$$

причем последняя оценка справедлива при всех $x \in [a, b]$. Это и доказывает равномерную сходимость.

Теорема о почленном интегрировании ряда.

Пусть $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k \in C[a, b]$. Если ряд с общим членом f_k сходится равномерно к функции S на $[a, b]$, то $S \in C[a, b]$, причем

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_k dx \right) \quad x \in [a, b].$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к частичным суммам рассматриваемого ряда.

Дифференцирование и предельный переход

Пусть $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что последовательность $f_{k(x_0)}$ сходится.
2. Последовательность производных f'_k сходится на $[a, b]$ равномерно к функции g .

то

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{[a, b]} f,$$

причем $f' = g$ на $[a, b]$. В частности, $f \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Сперва заметим, что $g \in C[a, b]$. По теореме об интегрировании и предельном переходе,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_k dx = \int_{x_0}^x g dx,$$

где последняя сходимость равномерна по $x \in [a, b]$. В то же время,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{k(x)} - f_{k(x_0)}) = \int_{x_0}^x g dx.$$

Так как, согласно условию, существует предел

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k(x_0)},$$

то

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k(x)} = C + \int_{x_0}^x g dx,$$

где последняя сходимость, опять-таки, равномерна на $[a, b]$. Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, получим

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

что и завершает доказательство.

Теорема о почленном дифференцировании ряда

Пусть $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f_k \in C^1[a, b]$. Если

1. Существует $x_0 \in [a, b]$, что ряд с общим членом $f_{k(x_0)}$ сходится.
2. Ряд с общим членом f'_k сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме $\tilde{S}$,

то ряд с общим членом f_k сходится на $[a, b]$ равномерно к сумме S , причем $S' = \tilde{S}$ на $[a, b]$. В частности, $S \in C^1[a, b]$.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую к последовательности частичных сумм рассматриваемого ряда.

Понятие степенного ряда

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $a_k \in \mathbb{R}$.

Первая теорема Абеля

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$.

1. Если существует x_1 , что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \text{ сходитс}я,$$

то ряд с общим членом $a_k x^k$ сходится абсолютно при всех x таких, что $|x| < |x_1|$.

2. Если существует x_1 , что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \text{ расходится,}$$

то ряд с общим членом $a_k x^k$ расходится при всех x таких, что $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Докажем первый пункт. Ясно, что имеет смысл рассматривать случай $x_1 \neq 0$, ведь иначе множество x таких, что $|x| < |x_1|$, пусто. Пусть $x_1 \leq 0$ и $|x| < |x_1|$, тогда

$$|a_k x^k| = |a_k x_1^k| \left| \frac{x}{x_1} \right|^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k x_1^k$ сходится, то его общий член стремится к нулю, а значит ограничен. Тем самым, $|a_k x_1^k| \leq C$, а тогда

$$|a_k x_1^k| \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \leq C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k.$$

Заметим, что

$$0 \leq \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1,$$

а значит ряд с общим членом

$$C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k$$

сходится как геометрическая прогрессия. Отсюда, согласно признакам сравнения, сходится, причем абсолютно, исходный ряд.

2. Докажем второй пункт. От противного. Если бы при x таком, что $|x| > |x_1|$, ряд сходилс}я, то по только что доказанному, он бы сходилс}я и при $x = x_1$, что противоречит условию.

О виде множества сходимости степенного ряда

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$. Тогда существует $R \in [0, +\infty]$, что при $x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -R); (R, +\infty)$ ряд расходится.

Понятие радиуса сходимости степенного ряда

Число R , существование которого доказано в предыдущем следствии, называется радиусом сходимости степенного ряда с общим членом $a_k x^k$, а множество $(-R, R)$ - интервалом сходимости соответствующего степенного ряда.

Формула Коши-Адамара

Пусть дан степенной ряд с общим членом $a_k x^k$. Тогда

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Найдем

$$l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, причем абсолютно. Если $l > 1$, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Если договориться, что $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{(+\infty)} = 0$, то последнее равносильно неравенствам

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{и} \quad |x| > \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

соответственно, что и доказывает теорему.

Теорема о равномерной сходимости степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ рассматриваемый ряд сходится равномерно на $[-r, r]$.

Доказательство. Для общего члена ряда при $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$|a_k x^k| \leq a_k r^k.$$

Но, так как $r \in (0, R)$, то ряд с общим членом $a_k r^k$ сходится. Значит, утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса.

Вторая теорема Абеля

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Если сходится ряд с общим членом $a_k R^k$, то исходный ряд сходится равномерно на $[0, R]$.

Доказательство. Так как ряд с общим членом $a_k R^k$ сходится, то, согласно критерию Коши, по $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \right| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_0$, $m > n$. Обозначим

$$A_m = \sum_{k=n+1}^m a_k R^k, \quad A_n = 0$$

и заметим, что

$$|A_m| < \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) \left(\frac{x}{R}\right)^k = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right) + A_{n+p} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}. \end{aligned}$$

Так как $x \in [0, R]$, то

$$\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \geq 0, \quad \left(\frac{x}{R}\right)^k \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right) + |A_{n+p}| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} < \\ &< \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right) + \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \right) = \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, согласно критерию Коши равномерной сходимости и следует утверждение.

Теорема о непрерывности суммы степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Тогда сумма ряда непрерывна на множестве сходимости $\langle -R, R \rangle$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ и

$$\delta = \min \left(\frac{R - x_0}{2}, \frac{x_0 + R}{2} \right).$$

Тогда $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R)$ и, по теореме о равномерной сходимости степенного ряда, на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ряд сходится равномерно. Так как члены рассматриваемого ряда непрерывны на этом отрезке, то по теореме о непрерывности суммы ряда, суммы рассматриваемого ряда тоже непрерывна на этом отрезке. В частности, она непрерывна при $x = x_0$.

Допустим теперь, что $x_0 = R$, $R \in \langle -R, R \rangle$. Тогда, согласно второй теореме Абеля, рассматриваемый ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$. Аналогичные приведенным ранее рассуждения показывают, что сумма рассматриваемого ряда непрерывна при $x = R$. Аналогичным образом рассматривается случай $x_0 = -R$, $-R \in \langle -R, R \rangle$.

Теорема об интегрировании степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$ и пусть R - его радиус сходимости. Тогда сумма ряда интегрируема по любому отрезку $[a, b]$ внутри множества сходимости $\langle -R, R \rangle$, причем

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Доказательство. Опираясь на теоремы и данная теорема - прямое следствие теоремы об интегрировании равномерно сходящегося ряда.

Лемма

Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

совпадают.

Доказательство. Докажем, например, что радиусы сходимости первого и второго рядов совпадают. Так как $1 \leq \sqrt[k]{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$, то по $\varepsilon > 0$ найдется k_0 , что $\forall k > k_0$ выполняется

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \sqrt[k]{k|a_k|} < (1 + \varepsilon) \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} \leq (1 + \varepsilon) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

В силу произвольности ε ,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

а значит, по теореме Коши-Адамара, радиусы сходимости одинаковы. Аналогично доказывается, что радиус сходимости третьего ряда такой же.

Теорема о дифференцировании степенного ряда

Пусть дан ряд с общим членом $a_k x^k$, R - его радиус сходимости, S - его сумма. Тогда $S \in C^\infty(-R, R)$, причем

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)a_k x^{k-m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как было доказано в предыдущей лемме, ряд, полученный формальным дифференцированием, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

имеет тот же радиус сходимости R , что и исходный. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Тогда, выбрав

$$\delta = \frac{1}{2} \min(R - x_0, x_0 + R),$$

получим, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R),$$

а значит ряд, полученный формальным дифференцированием, сходится на этом отрезке равномерно. Так как исходный ряд сходится (хотя бы в точке $x_0 \in (-R, R)$), то по теореме о дифференцировании функционального ряда заключаем, что

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k.$$

Так как x_0 - произвольная точка из интервала сходимости, то доказано, что S дифференцируема на $(-R, R)$ и

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

Из теоремы о непрерывности суммы степенного ряда заключаем, что $S \in C^1(-R, R)$. Дальнейшее доказательство проводится по индукции.

Интегральная форма остаточного члена

Пусть функция f непрерывно дифференцируема $(n + 1)$ раз на отрезке с концами x_0 и x . Тогда

$$r_{n(x, x_0)} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница и проинтегрируем по частям. Тогда,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = - \int_{x_0}^x f'(t)(x-t)' dt = \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt = f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f''(t)((x-t)^2)' dt. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Теперь, используя первую теорему о среднем, мы без труда получим остаток в форме Лагранжа:

$$r_{n(x, x_0)} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0 .

Понятие ряда Тейлора

Пусть функция f бесконечно число раз дифференцируема в точке x_0 . Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

называется рядом Тейлора, порожденным в точке x_0 функцией f . В случае $x_0 = 0$ ряд Тейлора часто называется рядом Маклорена.

Критерий представимости функции своим рядом Тейлора

Для того чтобы ряд Тейлора, построенный по функции f , сходил к этой функции в точке x необходимо и достаточно, чтобы

$$r_{n(x, x_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из представления

$$f(x) = P_{n(x, x_0)} + r_{n(x, x_0)}.$$

Достаточное условие представимости функции своим рядом Тейлора

Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке I с концами x_0 и x . Если на этом отрезке производные функции f равномерно ограничены, то есть

$$|f^{(n)}(t)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad t \in I,$$

то

$$r_{n(x, x_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то есть ряд Тейлора, построенный по функции f , сходится к этой функции в точке x .

Доказательство. Рассмотрим остаток в форме Лагранжа. Согласно условию,

$$|r_{n(x, x_0)}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где последнее утверждение верно в силу леммы. Последнее утверждение теоремы следует из (предыдущей) теоремы.

Теорема единственности

Пусть при $|x - x_0| < R$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k(x-x_0)}^k.$$

Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Согласно теореме о дифференцировании суммы степенного ряда,

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) a_{k(x-x_0)}^{k-m}.$$

Подставив $x = x_0$, получаем, что

$$f^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_m,$$

откуда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

Ряд Маклорена для показательной функции

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = e^x$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \leq e^{|x|},$$

а значит утверждение следует из теоремы.

Для доказательства второго соотношения заметим, что

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Так как $x \ln a \in \mathbb{R}$, то утверждение следует из доказанного для экспоненты.

Ряд Маклорена для синуса и косинуса

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. Пусть $f(x) = \sin(x)$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

то на отрезке с концами 0 и x выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(t)| \leq 1,$$

а значит утверждение следует из теоремы. Второе соотношение доказывается аналогичным образом.

Ряд Маклорена для логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Так как

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n},$$

то ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^{(n)}(x)$ на множестве $(-1, 1]$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши, получим

$$|r_{n(x,0)}| = \left| \frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \right| |x| = \frac{|x|}{1+\xi} \left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right|^n.$$

Так как при $x \in (-1, 1)$

$$\left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right| = \frac{|x| - |\xi|}{1+\xi} \leq \frac{|x| - |\xi|}{1-|\xi|} = 1 + \frac{|x| - 1}{1-|\xi|} \leq 1 + |x| - 1 = |x|,$$

то мы приходим к тому, что

$$|r_{n(x,0)}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(-1,1)} 0.$$

Наконец, так как при $x = 1$ по признаку Лейбница заявленный ряд сходится, то его сумма непрерывна не только на $(-1, 1)$, но и на $(-1, 1]$, а значит заявленное разложение справедливо и при $x = 1$.

Ряд Маклорена для арктангенса

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Доказательство. В верном равенстве

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

заменяем x на $-x^2$, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in (-1, 1).$$

Теперь, интегрируя написанный ряд по отрезку с концами 0 и x при $x \in (-1, 1)$ приходим к тому, что

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

По признаку Лейбница, ряд, написанный справа, сходится при $x = \pm 1$, а значит, его сумма непрерывна не только на $(-1, 1)$, но и на $[-1, 1]$. Тем самым, заявленное разложение справедливо и при $x = \pm 1$.

Ряд Маклорена для бинома

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

то при $\alpha - n < 0$ ограниченности, и тем более равномерной ограниченности $f^{(n)}(x)$ на множестве $(-1, 1)$ нет. Воспользуемся остатком в форме Коши, получим

$$|r_n(x, 0)| = \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} (1+\xi)^{\alpha-1} |x| \left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right|^n.$$

Тогда, при $x \in (-1, 1)$, так как $(1+\xi) < 2$, аналогично доказанному при рассмотрении логарифма,

$$|r_n(x, 0)| \leq 2^{\alpha-1} |x|^{n+1} \left| \alpha \left(\frac{\alpha}{1} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{\alpha}{n} - 1 \right) \right|.$$

Так как при достаточно больших n (момент зависит от α и x) при увеличении n на единицу правая часть полученного неравенства умножается на

$$\left| \frac{\alpha}{n+1} - 1 \right| |x| < q < 1,$$

то $r_{n(x,0)}$ с ростом n стремится к нулю, что и доказывает утверждение.

Ряд Маклорена для арксинуса

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Доказательство. Доказательство можно провести с использованием разложения бинома для функции $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и последующим интегрированием полученного равенства. Остальные детали остаются читателю в качестве упражнения.

Понятие тригонометрического ряда

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется тригонометрическим рядом, построенным по функциям

$$\{1, \cos kx, \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Лемма об ортогональности системы тригонометрических функций

Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi.$$

Доказательство. Доказательство проводится прямым вычислением и остается в качестве упражнения.

Понятие тригонометрического ряда Фурье

Если для функции f существуют числа $a_{m(f)}$ и $b_{m(f)}$, введенные выше, то ряд

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(f)} \cos kx + b_{k(f)} \sin kx$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f , а числа $a_{m(f)}$ и $b_{m(f)}$ - коэффициентами Фурье функции f относительно системы функции

$$\{1, \cos kx, \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Ряд Фурье в комплексной форме

Если для функции f существуют числа $c_{k(f)}$, введенные выше, то ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k(f)} e^{ikx}$$

называется рядом Фурье в комплексной форме функции f , а числа $c_{k(f)}$ - коэффициентами Фурье функции f относительно системы функций

$$\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ядро Дирихле

Функция $D_{n(p)}$ называется ядром Дирихле.

Свойства ядра Дирихле

Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:

1. $D_{n(p)}$ - 2π периодическая функция.
2. $D_{n(p)}$ - четная функция.
3. Выполнено условие нормировки:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n dp = 1.$$

Доказательство. Все эти свойства моментально следуют из исходного представления ядра Дирихле:

$$D_{n(p)} = \sum_{k=-n}^n e^{ikp}.$$

Детали остаются в качестве упражнения.

Лемма Римана

Пусть $f \in R_{loc}(a, b)$ и

$$\int_a^b |f| dx < +\infty.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для начала заметим, что если $f(x) = c$ - некоторая константа и (a, b) - ограниченный промежуток, то

$$\begin{aligned} \int_a^b c e^{i\lambda x} dx &= c \left(\int_a^b \cos \lambda x dx + i \int_a^b \sin \lambda x dx \right) = \\ &= c \left(\frac{\sin \lambda b - \sin \lambda a}{\lambda} - i \frac{\cos \lambda b - \cos \lambda a}{\lambda} \right) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

и утверждение теоремы выполнено. Сведем общий случай к данному.

Для начала покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется отрезок $[\delta_1, \delta_2] \subset [a, b]$, что

$$\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Согласно условию (об абсолютной сходимости интеграла), можно найти числа δ_1 и δ_2 , что $\delta_1 < \delta_2$ и

$$\int_a^{\delta_1} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{\delta_2}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

Далее, для найденных δ_1 и δ_2 ,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &= \left| \int_a^{\delta_1} f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_{\delta_2}^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^{\delta_1} |f(x)| e^{i\lambda x} dx + \int_{\delta_2}^b |f(x)| e^{i\lambda x} dx = \int_a^{\delta_1} |f(x)| dx + \int_{\delta_2}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $f \in R[\delta_1, \delta_2]$, то существует разбиение τ отрезка $[\delta_1, \delta_2]$ на отрезки Δ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, что

$$0 \leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} f dx - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

где

$$s_{\tau(f)} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

- нижняя сумма Дарбу. Пусть $g(x) = m_i$ при $x \in \Delta_i$ (на общих концах отрезков значения g можно брать любыми), тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) e^{i\lambda x} dx \right| &= \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x)) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x) - g(x)| e^{i\lambda x} dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (f - g) dx, \end{aligned}$$

так как $f(x) \geq g(x)$. Последний интеграл, в свою очередь, может быть переписан так:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx - s_{\tau(f)} < \varepsilon.$$

Итого,

$$0 \leq \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon.$$

Осталось заметить, что

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(x) e^{i\lambda x} dx = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i e^{i\lambda x} dx = 0,$$

где последнее равенство верно в силу того, что слагаемых конечное число, и каждое слагаемое стремится к нулю по доказанному в самом начале. В силу произвольности ε , лемма Римана полностью доказана.

Лемма

Пусть функция f является 2π -периодической на $\mathbb{R}$. Тогда

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_{n(t)} dt.$$

Доказательство. Вспомним, что

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) D_{n(x-t)} dt.$$

Сделаем замену переменной $p = x - t$ и учтем, что, согласно условию и свойствам ядра Дирихле, подынтегральная функция является 2π -периодической. Тогда

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-p) D_{n(p)} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x-p) D_{n(p)} dp.$$

Так как ядро Дирихле является четным, то

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-p) + f(x+p)) D_{n(p)} dp,$$

что и доказывает лемму.

Условия Дини

Говорят, что функция $f : \dot{U}(x) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, если:

1. Существуют односторонние пределы $f(x \pm 0)$ функции f в точке x .
2. Интегралы

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt, \text{ и } \int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt$$

сходятся при некотором $\delta > 0$.

Достаточное условие сходимости ряда Фурье

Пусть f — 2π -периодическая на $\mathbb{R}$ функция, причем $|f| \in R[-\pi, \pi]$. Если функция f удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k(f)} e^{ikx} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Так как

$$T_{n(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_{n(t)} dt,$$

и так как

$$\int_0^\pi D_{n(t)} dt = \pi,$$

то

$$\begin{aligned} T_{n(x)} - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_{n(t)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+0) + f(x-0)) D_{n(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x-t) - f(x-0) + f(x+t) - f(x+0)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt. \end{aligned}$$

Так как $\sin(\frac{t}{2}) \sim \frac{t}{2}$ при $t \rightarrow 0+$, то, согласно условиям Дини, интегралы

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| dt \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| dt$$

сходятся, а значит мы попадаем в условия леммы Римана. Тем самым,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n(x)} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Понятие кусочно-непрерывно дифференцируемой функции

Функцию f , имеющую на отрезке $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную, назовем кусочно-непрерывно дифференцируемой.

Кусочно-непрерывно дифференцируемая функция удовлетворяет условиям Дини.

Вот ответы на все вопросы по предмету «Компьютерные сети» в соответствии с курсом лекций:

1. Названия уровней модели OSI по порядку (сверху вниз):

1. Прикладной (Application)
2. Представления (Presentation)
3. Сеансовый (Session)
4. Транспортный (Transport)
5. Сетевой (Network)
6. Канальный (Data Link)
7. Физический (Physical)

2. Прикладной уровень (Application Layer):

Функции: Обеспечивает интерфейс между сетевыми службами и приложениями пользователя. Определяет протоколы для обмена данными между приложениями. Управляет доступом к сети.

Примеры протоколов: HTTP, HTTPS, FTP, SMTP, POP3, IMAP, DNS, Telnet, SSH, DHCP, SNMP.

3. Уровень представления данных (Presentation Layer):

Функции: Преобразование данных в форму, понятную прикладному уровню. Кодирование/декодирование, шифрование/дешифрование, сжатие/распаковка данных. Гарантирует, что данные одного приложения будут поняты другим приложением.

Примеры протоколов/стандартов: SSL/TLS (шифрование), MIME (кодирование данных для почты), JPEG, GIF, MPEG (форматы представления данных).

4. Сеансовый уровень (Session Layer):

Функции: Установление, управление, поддержание и завершение сеансов связи между приложениями на разных хостах. Синхронизация диалога (контрольные точки), управление диалогом (дуплекс/полудуплекс).

Примеры протоколов: NetBIOS, PPTP (частично), RPC (Remote Procedure Call), SIP (установление сеансов VoIP).

5. Транспортный уровень (Transport Layer):

Функции: Обеспечение сквозной (end-to-end) доставки данных между процессами на хостах-источнике и назначения. Сегментация данных приложения, контроль ошибок, управление потоком (flow control), мультиплексирование/демультиплексирование соединений. Гарантирует надежность доставки (или указывает на ее отсутствие).

Примеры протоколов: TCP (Transmission Control Protocol - надежный, с установлением соединения), UDP (User Datagram Protocol - ненадежный, без установления соединения).

6. Сетевой уровень (Network Layer):

Функции: Определение пути (маршрутизация) пакетов через сеть от источника к получателю. Логическая адресация (IP-адреса), фрагментация/дефрагментация пакетов. Обеспечивает связь между различными сетями.

Примеры протоколов: IP (Internet Protocol), ICMP (Internet Control Message Protocol), IGMP (Internet Group Management Protocol), OSPF, RIP, BGP (протоколы маршрутизации).

7. Канальный уровень (Data Link Layer):

Функции: Обеспечение надежной передачи кадров (frames) между непосредственно соединенными узлами (в пределах одной локальной сети). Физическая адресация (MAC-адреса), обнаружение и (иногда) исправление ошибок передачи, управление доступом к среде (MAC - Media Access Control).

Примеры протоколов: Ethernet (IEEE 802.3), Wi-Fi (IEEE 802.11), PPP (Point-to-Point Protocol), HDLC (High-Level Data Link Control), MAC Sublayer Protocols (CSMA/CD, CSMA/CA).

8. Физический уровень (Physical Layer):

Функции: Передача неструктурированного потока битов по физической среде. Определение электрических, оптических, механических и функциональных характеристик интерфейса со средой передачи. Кодирование сигналов (представление битов в виде электрических/оптических импульсов), синхронизация битов.

Примеры протоколов/технологий: RS-232, V.35, Ethernet (10BASE-T, 100BASE-TX, 1000BASE-SX и т.д.), USB Physical Layer, Bluetooth Physical Layer, спецификации физических сред (витая пара, коаксиальный кабель, оптоволокно).

9. Инкапсуляция и Деинкапсуляция в модели OSI:

Инкапсуляция: Процесс добавления заголовка (а иногда и трейлера) к данным при движении вниз по уровням модели OSI на передающей стороне. Каждый уровень добавляет свою управляющую информацию (протокольный блок данных - PDU) к данным, полученным от уровня выше.

Данные приложения -> Сегмент/Дейтаграмма (Транспорт) -> Пакет (Сеть) -> Кадр (Канальный) -> Биты (Физический).

Деинкапсуляция: Процесс удаления заголовков (и трейлеров) при движении данных вверх по уровням модели OSI на принимающей стороне. Каждый уровень считывает и обрабатывает информацию в заголовке своего уровня, а затем передает оставшиеся данные уровню выше.

Биты -> Кадр (удаляется заголовок/трейлер Канального) -> Пакет (удаляется заголовок Сетевого) -> Сегмент/Дейтаграмма (удаляется заголовок Транспортного) -> Данные приложения.

10. Формулы скорости передачи данных на Физическом уровне:

1. Теоретическая максимальная скорость (Пропускная способность канала):

$$C = 2 B \log_2(M) \text{ [бит/с]}$$

C - Пропускная способность канала (бит/с)

B - Ширина полосы пропускания канала (Гц)

M - Количество уровней сигнала (количество различных состояний сигнала, используемых для кодирования битов). Для базовых схем: $M=2$ (0 и 1) -> $\log_2(2)=1$.

Описание: Формула Найквиста. Определяет теоретический предел скорости передачи данных по каналу с заданной полосой пропускания B без шума при использовании M уровней сигнала. Удвоение связано с теоремой отсчетов (частота Найквиста = $2B$).

2. Максимальная скорость с учетом шума (Предел Шеннона):

$$C = B \log_2(1 + S/N) \text{ [бит/с]}$$

C - Пропускная способность канала (бит/с)

B - Ширина полосы пропускания канала (Гц)

`S/N` - Отношение сигнал/шум (Signal-to-Noise Ratio). Часто выражается в децибелах (dB): $\text{SNR}_{\text{db}} = 10 \log_{10}(S/N)$. Тогда $S/N = 10^{(\text{SNR}_{\text{db}} / 10)}$.

Описание: Формула Шеннона-Хартли. Определяет теоретическую максимальную скорость безошибочной передачи данных по каналу с заданной полосой пропускания `B` и отношением сигнал/шум `S/N`, при наличии шума Гауссова типа. Учитывает влияние шума.

11. Физическое кодирование “Код NRZ” (Non-Return to Zero):

Принцип работы: Самый простой метод. Уровень сигнала остается постоянным в течение всего битового интервала.

`0` - представлен одним напряжением (обычно низким, например, 0V).

`1` - представлен другим напряжением (обычно высоким, например, +5V).

Особенности: Нет возврата к нулевому уровню между битами. Нет встроенной синхронизации (проблема при длинных последовательностях нулей или единиц - приемник теряет синхронизацию битов). Требуется отдельной линии тактового сигнала или сложных методов восстановления тактовой частоты. Уязвим к постоянной составляющей (DC bias).

12. Физическое кодирование “Манчестер-II”:

Принцип работы: Каждый битовый интервал разделен на две половины. Переход уровня сигнала происходит в середине каждого битового интервала. Этот переход используется для синхронизации.

`0` - представлен переходом от высокого уровня к низкому в середине интервала.

`1` - представлен переходом от низкого уровня к высокому в середине интервала.

Особенности: Синхронизация встроена в сигнал (нет проблемы длинных последовательностей одинаковых битов). Нет постоянной составляющей (DC balance). Требуется вдвое большей полосы пропускания, чем NRZ для той же скорости передачи данных (частота перехода вдвое выше битовой скорости). Широко использовался в классическом Ethernet (10 Мбит/с).

13. Физическое кодирование “PAM-5” (5-Level Pulse Amplitude Modulation):

Принцип работы: Использует 5 различных уровней напряжения амплитуды импульса для кодирования информации. Позволяет передавать несколько бит на

одном символе (символе линии). В Gigabit Ethernet (1000BASE-T) используется 4D-PAM5: каждые 2 бита данных кодируются в один из 5 уровней напряжения на одной из 4 витых пар в кабеле одновременно (двунаправленная передача по всем парам).

Особенности: Позволяет достигать высоких скоростей (1 Гбит/с и выше) по медной витой паре категории 5е. Более сложная схема модуляции по сравнению с бинарными (двухуровневыми). Требуется сложных методов коррекции ошибок и выравнивания канала из-за межсимвольной интерференции.

14. Логическое кодирование (код 4В/5В):

Принцип работы: Каждой группе из 4 бит данных ставится в соответствие 5-битный код. Эти 5-битные коды выбираются из таблицы так, чтобы гарантировать достаточное количество переходов сигнала (для синхронизации) и отсутствие длинных последовательностей нулей. Затем 5-битный код передается с использованием физического кодирования (например, NRZI).

Преимущества:

Синхронизация: Обеспечивает достаточное количество переходов сигнала в потоке данных, устраняя проблему длинных последовательностей нулей, присущую базовым NRZ/NRZI.

Контроль ошибок: Некоторые недопустимые 5-битные коды могут использоваться для индикации ошибок.

Эффективность: Избыточность 20% (5 бит для передачи 4 бит данных) лучше, чем у Манчестера (100% избыточность). Пропускная способность канала используется эффективнее.

Применение: Использовался в Fast Ethernet (100BASE-TX) поверх физического кодирования MLT-3.

15. Структура СКС (Структурированная Кабельная Система):

Структура: Иерархическая система кабелей и коммутационных элементов (кроссов, патч-панелей), удовлетворяющая стандартам (TIA/EIA-568). Состоит из подсистем:

1. Горизонтальная подсистема: От телекоммуникационной розетки на рабочем месте до горизонтального кросса (НС) в телекоммуникационном шкафу/комнате этажа. Используется витая пара Cat 5е/6/6а/7 или оптоволокно.

2. Магистральная подсистема: Соединяет телекоммуникационные комнаты этажей (НС) с главным кроссом (МС) здания и кроссами комплекса зданий (IC). Используется многопарный кабель UTP/STP или (чаще) многожильное оптоволокно.

3. Подсистема рабочего места: Кабель от розетки до оконечного оборудования (ПК, телефон).

4. Аппаратная/Телекоммуникационная комната: Размещение кроссового оборудования (патч-панели, коммутаторы, маршрутизаторы) для горизонтальной подсистемы и подключения к магистрали.

Пример типовой проводки по зданию:

Этаж: В телекоммуникационных шкафах (TR) на каждом этаже установлены патч-панели для горизонтальной разводки и активное оборудование (коммутаторы).

Горизонтальная разводка: Кабели витой пары Cat 6 идут от патч-панелей в TR к розеткам на рабочих местах в офисах этого этажа.

Магистраль: Оптоволоконные кабели (многомодовые или одномодовые) идут от патч-панелей в TR каждого этажа вертикально вниз/вверх в Главную аппаратную (MDF/ER) в подвале/цоколе здания.

Главная аппаратная (MDF/ER): Содержит главные патч-панели, магистральные коммутаторы/маршрутизаторы, оборудование связи с внешним миром (телефония, интернет).

16. CSMA/CD (Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection):

Суть: Протокол доступа к разделяемой среде передачи (например, классический Ethernet на коаксиале или хабах).

Принципы работы:

1. Прослушивание несущей (Carrier Sense): Узел, желающий передать, сначала прослушивает среду. Если среда свободна (нет несущей), он начинает передачу.

2. Множественный доступ (Multiple Access): Несколько узлов имеют равный доступ к одной и той же среде.

3. Обнаружение коллизий (Collision Detection): Во время передачи узел продолжает прослушивать среду. Если он обнаруживает, что сигнал в среде отличается от передаваемого им (из-за наложения сигналов от другого узла), это означает коллизию.

4. Прекращение передачи: При обнаружении коллизии узел немедленно прекращает передачу.

5. Отправка Jam-сигнала: Узел посылает короткий сигнал "затора" (jam), чтобы все узлы в сегменте узнали о коллизии.

6. Ожидание и повтор: Каждый участвовавший в коллизии узел ожидает случайный промежуток времени (определяемый алгоритмом отката - backoff

algorithm, обычно бинарная экспоненциальная задержка), а затем повторяет попытку передачи с шага 1.

17. Простейший концентратор (Hub, Повторитель):

Принцип работы:

1. Работает на Физическом уровне (L1) модели OSI.
2. Принимает электрический (или оптический) сигнал на один из своих портов.
3. Усиливает (регенерирует) этот сигнал.
4. Ретранслирует (дублирует) усиленный сигнал на все свои остальные порты (кроме порта, с которого сигнал пришел).

Последствия: Создает единый домен коллизий - все устройства, подключенные к хабу (и к другим хабам, соединенным с ним), конкурируют за одну и ту же среду передачи с помощью CSMA/CD. Пропускная способность сети делится между всеми устройствами. Не фильтрует трафик по MAC-адресам. Не знает топологию сети.

18. Широковещательный шторм (Broadcast Storm):

Что это: Состояние сети, при котором она перегружается огромным количеством широковещательных (или иногда многоадресных) пакетов, лавинообразно генерируемых и ретранслируемых устройствами.

Причины появления:

1. Петли в топологии (L2 loops): Физические или логические петли в сети на канальном уровне (L2), особенно при отсутствии STP (Spanning Tree Protocol) или его сбое. Широковещательный пакет, попав в петлю, бесконечно циркулирует по сети, копируясь коммутаторами на каждом обороте.
2. Неисправное оборудование/софт: Сетевые карты или драйверы, генерирующие бесконечные широковещательные пакеты (например, при сбое).
3. Злонамеренные атаки: Намеренная генерация широковещательного трафика для отказа в обслуживании (DoS).
4. Протоколы, генерирующие широковещания: Неконтролируемое использование протоколов типа ARP, DHCP, NetBIOS в очень больших плоских сетях (без VLAN).

Последствия: Полная или почти полная потеря полезной пропускной способности сети, так как вся доступная полоса заполняется штормовым трафиком. Зависание устройств. Трудности с диагностикой и управлением сетью.

19. Коммутатор 2 уровня (L2 Switch):

Принцип работы:

1. Работает на Канальном уровне (L2) модели OSI. Оперирует MAC-адресами.
2. Таблица MAC-адресов (CAM-таблица): Строит таблицу соответствия MAC-адресов устройств номерам портов, на которых они "живут". Делает это, изучая исходный MAC-адрес (Source MAC) входящих кадров.
3. Прием кадра: Получает кадр Ethernet на один из своих портов.
4. Фильтрация и Переадресация:

Смотрит на MAC-адрес назначения (Destination MAC) в кадре.

Ищет этот MAC в своей таблице:

Если MAC найден в таблице и он связан с другим портом (не тем, откуда пришел кадр) -> Коммутатор пересылает кадр только на этот конкретный порт (точка-точка).

Если MAC найден в таблице и он связан с тем же портом, откуда пришел кадр -> Коммутатор отбрасывает кадр (фильтрация в пределах одного сегмента).

Если MAC не найден в таблице -> Коммутатор затопляет (flood) кадр на все свои порты, кроме того, откуда он пришел (как хаб, но только для неизвестных адресов).

Если MAC назначения - Широковещательный (FF:FF:FF:FF:FF:FF) или Многоадресный (Multicast) -> Коммутатор по умолчанию затопляет кадр на все порты, кроме исходного (если не настроено IGMP Snooping для многоадресности).

5. Создание доменов коллизий: Каждый порт коммутатора представляет собой отдельный домен коллизий (в отличие от хаба). Полнодуплексная связь устраняет коллизии на портах.

6. Логическая сегментация: Разбивает один широковещательный домен (домен L2) на множество доменов коллизий, но сам по себе не сегментирует широковещательные домены (все порты в одном VLAN по умолчанию - один широковещательный домен).

20. Коммутатор 3 уровня (L3 Switch):

Принцип работы: Сочетает функциональность коммутатора L2 и маршрутизатора.

1. Коммутация L2: На канальном уровне работает как обычный L2 коммутатор (фильтрация/пересылка по MAC, создание доменов коллизий).

2. Маршрутизация L3: На сетевом уровне (L3) способен маршрутизировать трафик между разными IP-подсетями/VLAN. Для этого он:

Имеет IP-адреса, назначенные на свои виртуальные интерфейсы (SVI - Switched Virtual Interface), каждый из которых представляет собой шлюз по умолчанию для своей VLAN.

Строит таблицу маршрутизации (RIB - Routing Information Base), используя статические маршруты или динамические протоколы маршрутизации (RIP, OSPF, EIGRP).

Принимает решение о пересылке пакетов на основе IP-адреса назначения и таблицы маршрутизации.

3. Аппаратная маршрутизация (ASIC): Ключевое отличие от "программных" маршрутизаторов - коммутаторы L3 выполняют маршрутизацию на аппаратном уровне с помощью специализированных микросхем (ASIC). Это обеспечивает очень высокую скорость маршрутизации (часто на скорости коммутации проводов - wire speed), сравнимую со скоростью коммутации L2.

4. Коммутация на основе потока (Flow-Based): Первый пакет в новом потоке (между парой IP-адресов) обрабатывается процессором маршрутизации (CPU), который определяет путь (интерфейс и следующий хоп) и создает запись в кеше коммутации (FIB - Forwarding Information Base). Последующие пакеты этого потока пересылаются на аппаратном уровне (ASIC) по информации из FIB, что и обеспечивает высокую скорость.

21. Маршрутизатор (Router):

Принцип работы:

1. Работает на Сетевом уровне (L3) модели OSI. Оперирует IP-адресами.
2. Интерфейсы: Имеет несколько сетевых интерфейсов (портов), каждый подключен к разной IP-сети/подсети.
3. Таблица маршрутизации (Routing Table): Содержит информацию о том, как достичь других сетей. Включает:

Сеть назначения / Маска: Целевая IP-сеть.

Next-Hop (Следующий прыжок): IP-адрес следующего маршрутизатора на пути к сети назначения.

Выходной интерфейс: Локальный интерфейс, через который нужно отправить пакет к next-hop.

Метрика: "Стоимость" маршрута (используется протоколами для выбора лучшего пути).

Источник: Как получен маршрут (прямо подключенная сеть, статический маршрут, динамический протокол - RIP, OSPF и т.д.).

4. Принятие решения о маршрутизации:

Получает пакет на одном из своих интерфейсов.

Смотрит на IP-адрес назначения в пакете.

Ищет в таблице маршрутизации наиболее специфичный (с самой длинной маской) маршрут, который соответствует адресу назначения.

Если маршрут найден:

Уменьшает TTL (Time To Live) в IP-заголовке на 1 (если TTL=0, пакет отбрасывается, отсылается ICMP Time Exceeded).

Пересчитывает контрольную сумму IP-заголовка.

Инкапсулирует IP-пакет в новый кадр канального уровня (L2) для интерфейса, указанного в маршруте (с новыми MAC-адресами источника и назначения для следующего сегмента).

Передает кадр через указанный выходной интерфейс.

Если маршрут не найден -> пакет отбрасывается, отсылается ICMP Destination Unreachable.

5. Соединение сетей: Основная задача - соединять разные IP-сети/подсети, изолируя широковещательные домены (каждый интерфейс маршрутизатора - граница широковещательного домена).

6. Выполнение протоколов маршрутизации: Обменивается информацией о сетях с другими маршрутизаторами для автоматического построения и обновления таблиц маршрутизации (RIP, OSPF, BGP и т.д.).

22. Виртуальные локальные сети (VLAN - Virtual Local Area Network):

Что это: Технология, позволяющая логически сегментировать один физический коммутируемый домен L2 на несколько изолированных широковещательных доменов.

Суть: Приписывание портов коммутатора к определенному VLAN. Порты, принадлежащие разным VLAN, не могут обмениваться данными на канальном уровне (L2), даже если они подключены к одному и тому же физическому коммутатору. Обмен между VLAN возможен только через маршрутизацию (L3) - либо на маршрутизаторе, либо на коммутаторе L3.

Преимущества:

Логическая группировка: Группировка устройств по функциям (бухгалтерия, отдел продаж), а не по физическому расположению.

Сокращение широковещательных доменов: Уменьшает область распространения широковещательного трафика, повышая производительность и безопасность.

Повышение безопасности: Изоляция трафика между VLAN (без маршрутизации устройства из разных VLAN не видят друг друга).

Гибкость управления: Упрощение перемещений устройств между группами (достаточно изменить настройку VLAN на порту коммутатора).

Теггирование (802.1Q): Для передачи трафика нескольких VLAN по одному физическому каналу (транк - trunk) между коммутаторами используется стандарт IEEE 802.1Q. В кадр Ethernet добавляется VLAN Tag (4 байта) между полями Source MAC и EtherType/Length, содержащий идентификатор VLAN (VID - 12 бит, диапазон 1-4094).

23. Названия уровней модели стека TCP/IP по порядку (сверху вниз):

1. Прикладной (Application)
2. Транспортный (Transport)
3. Сетевой (Internet)
4. Канальный (Network Access / Link)

24. Различия TCP и UDP:

Характеристика	TCP (Transmission Control Protocol)	UDP (User Datagram Protocol)
Порядок доставки	Гарантирует порядок доставки сегментов	Не гарантирует порядок доставки дейтаграмм
Надежность	Надежный (гарантированная доставка)	Ненадежный (доставка не гарантирована)
Установление соединения	С установлением соединения (3-way handshake)	Без установления соединения (connectionless)
Контроль потока	Есть (механизм скользящего окна)	Нет

Контроль перегрузки Есть (механизмы предотвращения перегрузки) Нет
Заголовок Большой (20 байт минимум + опции), сложный Маленький (8 байт), простой
Накладные расходы Высокие Низкие
Использование HTTP, HTTPS, FTP, SMTP, Telnet, SSH DNS, DHCP, SNMP, VoIP (RTP), видеостриминг, TFTP
Структура PDU Сегмент (Segment) Дейтаграмма (Datagram)

25. Пример адресации на разных уровнях TCP/IP:

Прикладной уровень (Application): Имена доменов (например, `www.example.com` - преобразуются DNS в IP), Имена служб/Порты (например, `http://` указывает на порт 80).

Транспортный уровень (Transport): Номера портов (Port Numbers). Например:

IP-пакет от `192.168.1.100:54321` (исходный IP:порт) к `93.184.216.34:80` (IP назначения:порт).

Порт назначения указывает на приложение (веб-сервер на порту 80).

Исходный порт идентифицирует сеанс на клиенте.

Сетевой уровень (Internet): IP-адреса (например, `192.168.1.100` - источник, `93.184.216.34` - назначение). Уникально идентифицируют хост в сети.

Канальный уровень (Network Access): MAC-адреса (например, `00:1A:2B:3C:4D:5E` - источник, `00:0C:29:XX:XX:XX` - назначение (MAC шлюза или соседа)). Уникально идентифицируют сетевой интерфейс в локальном сегменте сети.

26. Типы рассылок в TCP/IP:

1. Юникаст (Unicast): От одного отправителя одному конкретному получателю (определенному по уникальному IP-адресу). Стандартный тип связи (веб-серфинг, почта, FTP).

2. Широковещательная рассылка (Broadcast): От одного отправителя всем устройствам в локальной сети (L2 широковещательный домен).

L2 Broadcast: MAC-адрес назначения = `FF:FF:FF:FF:FF:FF`.

L3 Broadcast: IP-адрес назначения = `255.255.255.255` (ограниченный широковещательный - local broadcast) или `[сеть].255` (напр., `192.168.1.255` -

направленный широковещательный - directed broadcast, если разрешено).

Маршрутизаторы обычно не пересылают широковещательные пакеты между сетями.

Примеры: ARP (запрос), DHCP (DISCOVER/REQUEST).

3. Многоадресная рассылка (Multicast): От одного отправителя группе устройств, которые выразили желание получать трафик для этой группы.

L3 Multicast: IP-адреса назначения из диапазона `224.0.0.0` - `239.255.255.255` (например, `224.0.0.1` - все хосты в локальной сети, `224.0.0.5` - OSPF маршрутизаторы).

L2 Multicast: Соответствующий MAC-адрес из диапазона `01:00:5E:00:00:00` - `01:00:5E:7F:FF:FF`, вычисляемый из IP multicast группы.

Примеры: Видеоконференции, IPTV, обновление ПО группе устройств, протоколы маршрутизации (OSPF, EIGRP).

4. Эникаст (Anycast): От одного отправителя ближайшему (в терминах метрики маршрутизации) устройству в группе, использующей один и тот же IP-адрес. Не является отдельным типом пакета на L3, реализуется протоколами маршрутизации (BGP). Примеры: Корневые DNS-серверы, CDN (Content Delivery Network) узлы.

27. Классы IP-адресов в TCP/IP (Историческая классовая адресация - устарела, заменена CIDR):

Класс А:

Первый бит = `0`.

Диапазон: `1.0.0.0` - `126.255.255.255`.

Маска по умолчанию: `255.0.0.0` (/8).

Сетей: 126 (по 16.7 млн. хостов).

Класс В:

Первые два бита = `10`.

Диапазон: `128.0.0.0` - `191.255.255.255`.

Маска по умолчанию: `255.255.0.0` (/16).

Сетей: ~16,384 (по 65,534 хоста).

Класс С:

Первые три бита = `110`.

Диапазон: `192.0.0.0` - `223.255.255.255`.

Маска по умолчанию: `255.255.255.0` (/24).

Сетей: ~2 млн. (по 254 хоста).

Класс D (Multicast):

Первые четыре бита = `1110`.

Диапазон: `224.0.0.0` - `239.255.255.255`.

Нет масок/хостов - только группы.

Класс E (Зарезервирован):

Первые четыре бита = `1111`.

Диапазон: `240.0.0.0` - `255.255.255.255`.

Важно: Современные сети используют бесклассовую адресацию (CIDR - Classless Inter-Domain Routing), где маска подсети указывается явно (`/24`, `/27` и т.д.) и может быть любой длины, не ограничиваясь границами классов A/B/C.

28. Таблица маршрутизации (Routing Table):

Что это: База данных, хранящаяся в памяти маршрутизатора (или L3 коммутатора, или даже хоста), которая содержит информацию о том, как достичь удаленных IP-сетей.

Содержимое: Каждая запись (маршрут) обычно содержит:

Сеть назначения (Destination Network): IP-адрес целевой сети.

Маска подсети (Subnet Mask): Маска, определяющая размер сети назначения.

Next Hop (Следующий прыжок): IP-адрес следующего маршрутизатора на пути к сети назначения, которому нужно передать пакет.

Выходной интерфейс (Outgoing Interface): Локальный физический или логический интерфейс маршрутизатора, через который нужно отправить пакет, чтобы он достиг next hop.

Метрика (Metric): Числовое значение, представляющее "стоимость" или "предпочтительность" маршрута (чем меньше, тем лучше). Используется для выбора лучшего пути при наличии нескольких маршрутов к одной сети.

Административное расстояние (AD - Administrative Distance): Приоритет источника маршрута (прямое подключение - 0, статический - 1, OSPF - 110, RIP - 120 и т.д.). Чем меньше AD, тем более надежным считается источник. Используется для выбора между маршрутами из разных источников к одной сети.

Источники записей:

Прямо подключенные сети (Connected): Автоматически добавляются при назначении IP-адреса интерфейсу и включении интерфейса (AD=0).

Статические маршруты (Static): Вручную введенные администратором маршруты (AD=1).

Динамические протоколы маршрутизации (Dynamic): Маршруты, полученные от других маршрутизаторов через протоколы (RIP, OSPF, EIGRP, BGP). AD зависит от протокола.

Функция: Используется процессом маршрутизации для определения выходного интерфейса и IP-адреса следующего прыжка для каждого входящего IP-пакета на основе его IP-адреса назначения.

29. Пример работы RIP2 (Routing Information Protocol version 2):

Принцип: Дистанционно-векторный протокол (Distance Vector). Каждый маршрутизатор периодически (каждые 30 сек) рассылает всю свою таблицу маршрутизации всем соседям по широковещанию (RIP v1) или многоадресно на `224.0.0.9` (RIP v2).

Как наполняются таблицы:

1. Инициализация: Маршрутизатор добавляет свои прямо подключенные сети в таблицу с метрикой 1 (хоп=1) и помечает их как источник `C` (Connected).

2. Обновление от соседа: Маршрутизатор R1 получает от соседа R2 обновление RIP. В обновлении содержится список сетей, известных R2, и метрика, с которой R2 знает эти сети (Hop Count).

3. Обработка обновления: Для каждой сети `X` в обновлении от R2:

R1 увеличивает метрику, полученную от R2, на 1 (так как до `X` через R2 будет на 1 хоп больше, чем до R2).

Если сети `X` нет в таблице R1 -> R1 добавляет запись: Сеть=X, NextHop=R2, Метрика = (Метрика_R2 + 1).

Если сеть `X` есть в таблице R1 с NextHop=R2 -> R1 обновляет запись новой метрикой (Метрика_R2 + 1), даже если она хуже.

Если сеть `X` есть в таблице R1 с NextHop=другой_маршрутизатор -> R1 сравнивает новую метрику (Метрика_R2 + 1) с текущей метрикой для `X`:

Если новая метрика лучше (меньше) -> Заменяет запись (NextHop=R2, Метрика=новая).

Если новая метрика хуже или равна -> Игнорирует.

4. Таймеры:

Invalid Timer (180 сек): Если обновление для маршрута не получено за 180 сек, маршрут помечается как возможно недоступный (метрика=16 - бесконечность), но остается в таблице.

Flush Timer (240 сек): Если за 240 сек от соседа не пришло подтверждение маршрута, он удаляется из таблицы.

Holddown Timer (180 сек): После получения обновления с худшей метрикой (но не 16) для существующего маршрута, маршрутизатор игнорирует все последующие обновления с лучшей метрикой для этой сети в течение Holddown времени (чтобы избежать распространения ложной информации).

5. Распространение: R1 теперь включает информацию о сети `X` (с NextHop=R2 и увеличенной метрикой) в свои собственные периодические обновления, рассылаемые соседям.

Особенности RIP2: Поддержка VLSM/CIDR (маски в обновлениях), аутентификация, многоадресные обновления (`224.0.0.9`). Максимальная метрика (макс. хопов) = 15. Метрика 16 = бесконечность (сеть недостижима).

30. NAT (Network Address Translation - Преобразование Сетевых Адресов):

Суть: Технология, позволяющая множеству устройств в частной (локальной) сети использовать один или несколько публичных (глобальных) IP-адресов для выхода в Интернет (или другую внешнюю сеть).

Как работает (основной тип - SNAT: Source NAT):

1. Устройство в локальной сети (с частным IP, напр. `192.168.1.100`) отправляет пакет во внешнюю сеть (Интернет).

2. Пакет достигает маршрутизатора/шлюза с настроенным NAT.

3. Преобразование исходящего адреса (Source):

Маршрутизатор заменяет частный исходный IP-адрес (`192.168.1.100`) в IP-заголовке на свой публичный IP-адрес (напр., `93.184.216.34`).

Маршрутизатор часто заменяет и исходный порт TCP/UDP на уникальный порт из своего пула (чтобы отличать сессии разных внутренних хостов). Например: `192.168.1.100:54321` -> `93.184.216.34:45000`.

4. Маршрутизатор сохраняет запись о этом преобразовании (маппинге) в своей NAT-таблице (Private IP:Port <-> Public IP:Port).

5. Пакет с публичным исходным адресом и портом отправляется дальше в Интернет.

6. Ответ из Интернета: Приходит ответ, адресованный на `93.184.216.34:45000`.

7. Обратное преобразование (Destination):

Маршрутизатор ищет в своей NAT-таблице запись для публичного IP:порта назначения (`93.184.216.34:45000`).

Находит соответствие частному IP:порту (`192.168.1.100:54321`).

Заменяет IP-адрес назначения в IP-заголовке на `192.168.1.100`.

Заменяет порт назначения в TCP/UDP заголовке на `54321`.

8. Пакет пересылается на внутренний хост `192.168.1.100`.

Типы NAT:

Статический NAT (Static NAT): Постоянное сопоставление одного частного IP с одним публичным IP (1:1). Используется для серверов внутри сети, доступных извне.

Динамический NAT (Dynamic NAT): Сопоставление частного IP с публичным IP из пула доступных публичных адресов на время сессии. Адрес берется из пула динамически.

PAT / NAT (Port Address Translation / Network Address Port Translation): Самый распространенный тип. Множество частных IP преобразуются в один публичный IP, но с разными портами источника (Many:1). Именно он описан в примере выше.

Причины использования:

Экономия публичных IPv4-адресов.

Безопасность (ограниченная): Скрывает структуру внутренней сети от внешнего мира.

Гибкость: Упрощает смену ISP (меняется только публичный IP на шлюзе).

31. "Порт" в протоколах UDP и TCP:

Что это: 16-битное число (0-65535), используемое на Транспортном уровне (L4) для идентификации конечной точки сетевого соединения на конкретном хосте.

Функции:

1. Мультиплексирование/Демультиплексирование: Позволяет одному IP-хосту (с одним IP-адресом) одновременно поддерживать множество сетевых приложений/сервисов. Каждое приложение/сервис "слушает" на определенном порту. Транспортный уровень использует порты, чтобы определить, какому приложению передать входящие данные.

2. Идентификация службы: Номера портов используются для согласования клиентом и сервером, к какому конкретному сервису нужно подключиться.

Стандартные (well-known) порты (0-1023) зарезервированы за распространенными службами (HTTP - 80, HTTPS - 443, SSH - 22, DNS - 53 и т.д.).

Структура в сегменте/дейтаграмме:

В заголовках TCP и UDP есть поля:

Source Port (Исходный порт): Порт на хосте-отправителе. Обычно выбирается случайным образом клиентским приложением (эфемерный порт > 1023).

Destination Port (Порт назначения): Порт на хосте-получателе. Указывает на конкретный сервис (напр., 80 для веб-сервера).

Пример: Веб-браузер (клиент) на хосте `192.168.1.100` использует исходный порт `49152` и порт назначения `80` для подключения к веб-серверу на `93.184.216.34`. Веб-сервер отвечает, используя исходный порт `80` и порт назначения `49152`.

32. Проблемы передачи цифрового сигнала по радиоканалу:

1. Затухание (Attenuation): Ослабление мощности сигнала с увеличением расстояния. Зависит от частоты и среды.

2. Многолучевое распространение (Multipath Propagation): Сигнал от передатчика достигает приемника несколькими путями (прямой + отражения от объектов).
Приводит к:

Интерференции: Конструктивной (усиление) или деструктивной (ослабление, замирания - fading) в точке приема.

Межсимвольной интерференции (ISI): "Размазывание" символов во времени из-за разной длины путей, что затрудняет их распознавание.

3. Замирания (Fading): Быстрые (быстрые замирания - fast fading) или медленные (медленные замирания - slow fading) изменения уровня сигнала из-за многолучевости, движения приемника/передатчика или изменения среды.

4. Шум: Тепловой шум, атмосферные помехи, промышленные помехи.

5. Интерференция (Co-Channel & Adjacent-Channel Interference):

Co-Channel (CCI): Помехи от другого передатчика, работающего на той же частоте.

Adjacent-Channel (ACI): Помехи от передатчика, работающего на соседней частоте (из-за неидеальности фильтров).

6. Доплеровский сдвиг (Doppler Shift): Изменение частоты принимаемого сигнала из-за относительного движения передатчика и приемника. Особенно критично на высоких скоростях и высоких частотах.

7. Ограниченный спектр: Радиочастотный спектр - ограниченный ресурс. Необходимость эффективного использования полосы пропускания.

8. Безопасность: Легкость перехвата сигнала по сравнению с проводной средой.

33. OFDM и OFDMA:

OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing - Мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов):

Принцип: Высокоскоростной поток данных разделяется на множество медленных параллельных потоков. Каждый медленный поток модулирует свою собственную ортогональную поднесущую частоту. Поднесущие расположены так близко, что их спектры перекрываются, но ортогональность (интеграл за период произведения любых двух разных поднесущих = 0) позволяет их разделить на приеме без взаимных помех.

Преимущества:

Высокая устойчивость к межсимвольной интерференции (ISI) благодаря длинному символному интервалу (при той же общей скорости).

Эффективное использование спектра за счет перекрытия поднесущих.

Устойчивость к узкополосным помехам (повреждает только несколько поднесущих).

Относительно простая реализация с помощью БПФ (FFT/IFFT).

Применение: Wi-Fi (802.11 a/g/n/ac/ax), WiMAX, DSL, DVB-T, 4G LTE (в нисходящем канале).

OFDMA (Orthogonal Frequency Division Multiple Access - Множественный доступ с ортогональным частотным разделением каналов):

Принцип: Расширение OFDM для поддержки множественного доступа. В OFDMA поднесущие группируются в небольшие блоки (ресурсные блоки - Resource Units, RU в Wi-Fi 6). Эти блоки динамически распределяются между разными пользователями (устройствами) для одновременной передачи/приема данных.

Преимущества (по сравнению с OFDM + TDMA/CSMA):

Повышение эффективности: Одновременная связь с несколькими пользователями в одном временном интервале.

Снижение задержек (Latency): Не нужно ждать своей очереди во временной области для коротких пакетов.

Более эффективное использование спектра: Тонкое распределение ресурсов под нужды пользователей (назначается нужное количество поднесущих).

Масштабируемость: Лучше поддерживает большое количество устройств (IoT).

Применение: Wi-Fi 6 (802.11ax) - в нисходящем (DL) и восходящем (UL) каналах, 5G NR.

34. Модуляция в Wi-Fi:

Суть: Процесс изменения параметров несущего высокочастотного сигнала (амплитуды, частоты, фазы) в соответствии с передаваемыми цифровыми данными.

Основные типы модуляции, используемые в Wi-Fi (802.11):

1. DSSS/FHSS (Прямая последовательность / Скачкообразная перестройка частоты): Использовались в ранних стандартах (802.11, 802.11b).

2. OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): Основа для высокоскоростных стандартов (802.11a/g/n/ac/ax). В рамках OFDM используется:

BPSK (Binary Phase Shift Keying): 1 бит на символ. Самая устойчивая, самая низкая скорость. (Напр., 6 Мбит/с в 802.11a/g).

QPSK (Quadrature Phase Shift Keying): 2 бита на символ. (Напр., 12 Мбит/с).

QAM (Quadrature Amplitude Modulation): Комбинирует амплитудную и фазовую модуляцию. Чем выше порядок, тем выше скорость, но требуется лучшее отношение сигнал/шум (SNR).

16-QAM: 4 бита на символ. (Напр., 24 Мбит/с).

64-QAM: 6 бит на символ. (802.11n: до 65 Мбит/с на поток; 802.11ac: базовая).

256-QAM: 8 бит на символ. (802.11ac: до 86.7 Мбит/с на поток; 802.11ax: базовая).

1024-QAM: 10 бит на символ. (802.11ax: до 120 Мбит/с на поток).

3. MIMO (Multiple Input Multiple Output): Не модуляция, а технология использования множества антенн для передачи нескольких пространственных потоков данных одновременно на одной частоте. Работает совместно с OFDM и QAM, умножая пропускную способность (кол-во потоков x скорость модуляции). (802.11n: до 4x4; 802.11ac: до 8x8; 802.11ax: до 8x8).

Адаптивность: Точки доступа и клиенты Wi-Fi постоянно оценивают качество канала (SNR, затухание). В зависимости от условий они автоматически выбирают наиболее подходящую схему модуляции и кодирования (MCS - Modulation and Coding Scheme), чтобы обеспечить максимально возможную скорость при допустимом уровне ошибок.

35. Типовые топологии в беспроводной связи:

1. "Точка-Точка" (Point-to-Point - P2P):

Описание: Прямое беспроводное соединение между двумя узлами (антеннами). Обычно узлы направлены друг на друга.

Применение: Соединение двух зданий (мост), магистральные каналы связи, спутниковая связь "земная станция - спутник".

2. "Точка-Многоточка" (Point-to-Multipoint - P2MP):

Описание: Один центральный узел (базовая станция, точка доступа) обменивается данными с множеством удаленных узлов (клиентов, абонентских станций). Удаленные узлы обычно не взаимодействуют друг с другом напрямую через центральный узел.

Применение: Сотовые сети (BS -> MS), Wi-Fi (AP -> клиенты), фиксированный беспроводной доступ (WISP), спутниковое ТВ (спутник -> приемники).

3. Инфраструктурный режим (Infrastructure Mode / Star Topology):

Описание: Частный случай P2MP. Все клиентские устройства (STA) соединяются с центральной Точкой Доступа (AP). AP действует как мост между беспроводной и проводной сетью (или как маршрутизатор). Клиенты не общаются напрямую друг с другом; весь трафик идет через AP.

Применение: Классические сети Wi-Fi в офисах, домах, общественных местах.

4. Режим AD-HOC (Ad-Hoc Mode / Peer-to-Peer / IBSS - Independent Basic Service Set):

Описание: Устройства соединяются напрямую друг с другом без использования центральной точки доступа. Формируют временную сеть "на лету". Каждое устройство может быть и клиентом, и маршрутизатором (в более сложных mesh-сетях).

Применение: Прямая передача файлов между устройствами (Wi-Fi Direct), временные сети (конференции, игры), сенсорные сети, mesh-сети (частично).

5. Ячеистая сеть (Mesh Topology):

Описание: Устройства (mesh-ноды) соединяются друг с другом множеством связей, образуя сетку. Трафик от клиента может достигать точки выхода в интернет (шлюза) через несколько промежуточных прыжков (нодов). Пути могут быть избыточными и динамически перестраиваться при изменении условий или отказе нодов.

Применение: Домашние mesh-системы Wi-Fi для покрытия больших площадей, городские беспроводные сети, промышленные IoT сети, военные сети. Стандарты: Wi-Fi Mesh (802.11s), Zigbee, Thread.

Механика

Лекция 1. Кинематика поступательного движения.

Механика – наука о движении и равновесии тел.

Материальной точкой называется тело, размеры и форма которого в условиях данной задачи несущественны.

Абсолютно твердое тело – система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

Механическое движение – изменение положения тела в пространстве с течением времени.

Виды механического движения:

1. Поступательное
2. Вращение вокруг неподвижной оси
3. Вращение вокруг неподвижной точки
4. Плоское движение
5. Свободное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, все время остается параллельной своему начальному положению.

Плоским называется такое движение твердого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной (в данной системе отсчета) плоскости.

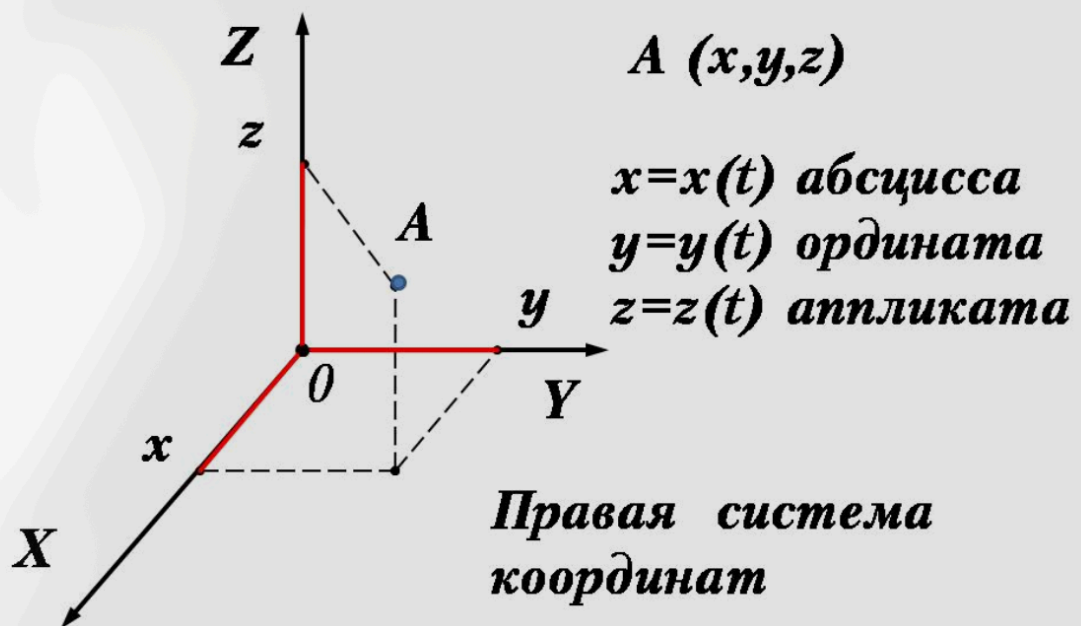
Описание механического движения.

Тело отсчета – тело, относительно которого задается положение данного тела или данной точки.

Система отсчета – совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат, и синхронизованных между собой часов.

Международный стандарт ISO 31-11 предполагает использование следующих систем координат:

Декартова (прямоугольная) система координат.



Цилиндрическая система координат.



$\rho \geq 0$ - расстояние от начала координат до A'

$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ - угол между осью OX и отрезком OA'

z - аппликата точки A

Цилиндрическая система координат удобна при анализе поверхностей, симметричных относительно какой-либо оси, если взять ось OZ в качестве оси симметрии. Бесконечный цилиндр в декартовых координатах имеет уравнение $x^2 + y^2 = r^2$,

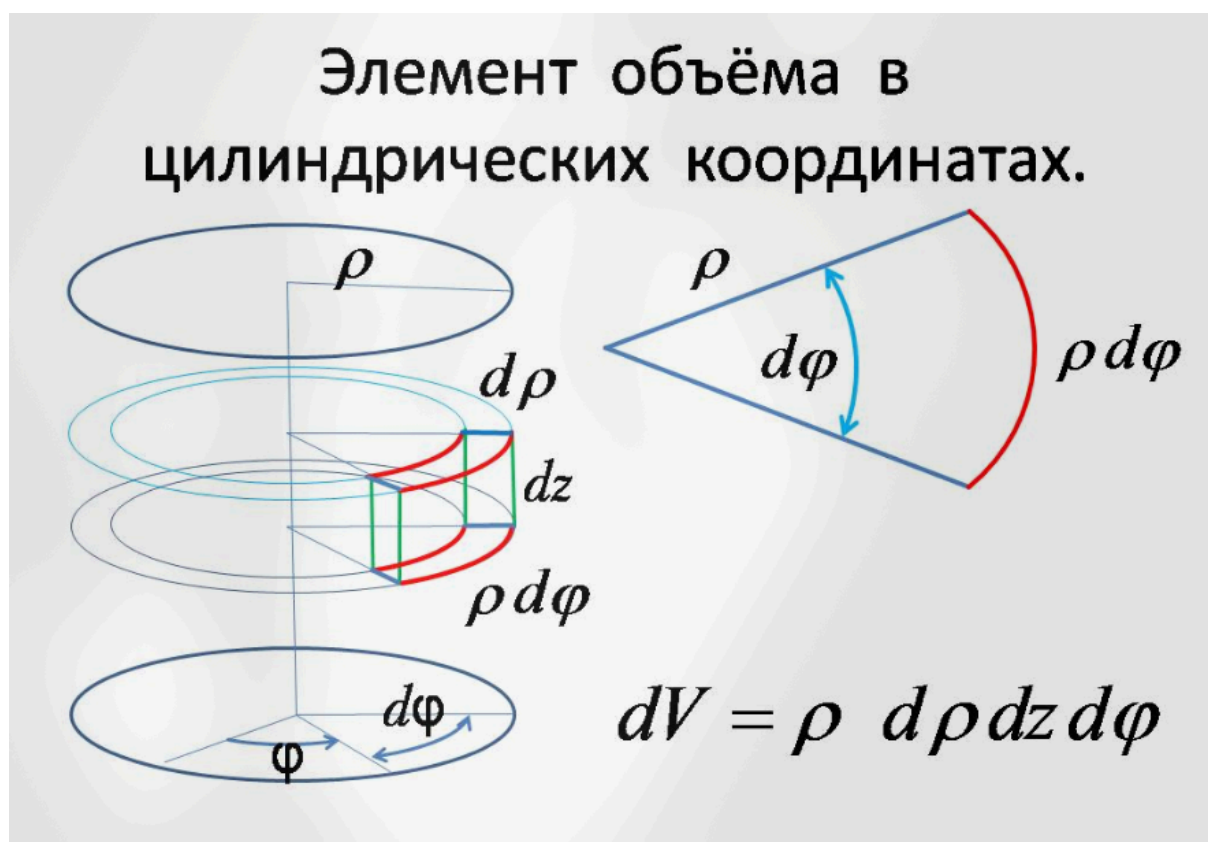
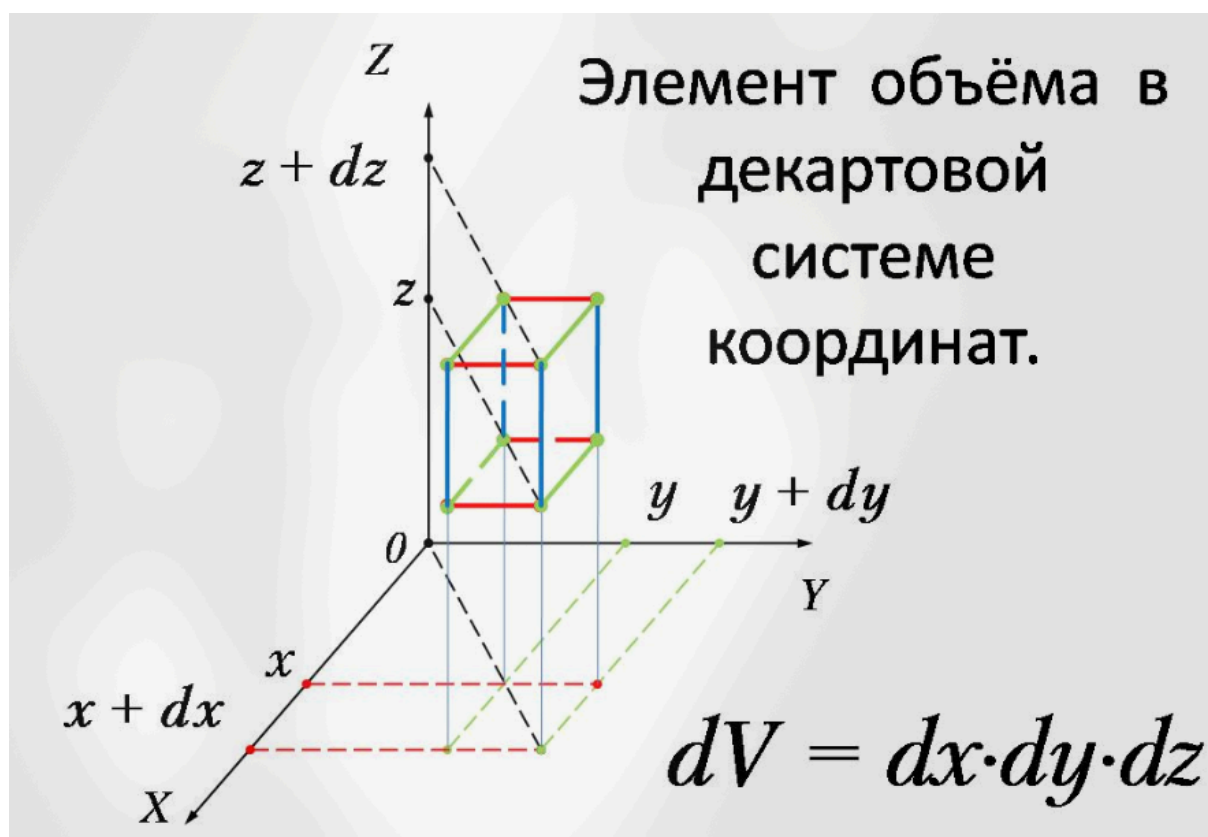
А в цилиндрических – простое: $\rho = r$



$r \geq 0$ – расстояние от начала координат до заданной точки A .

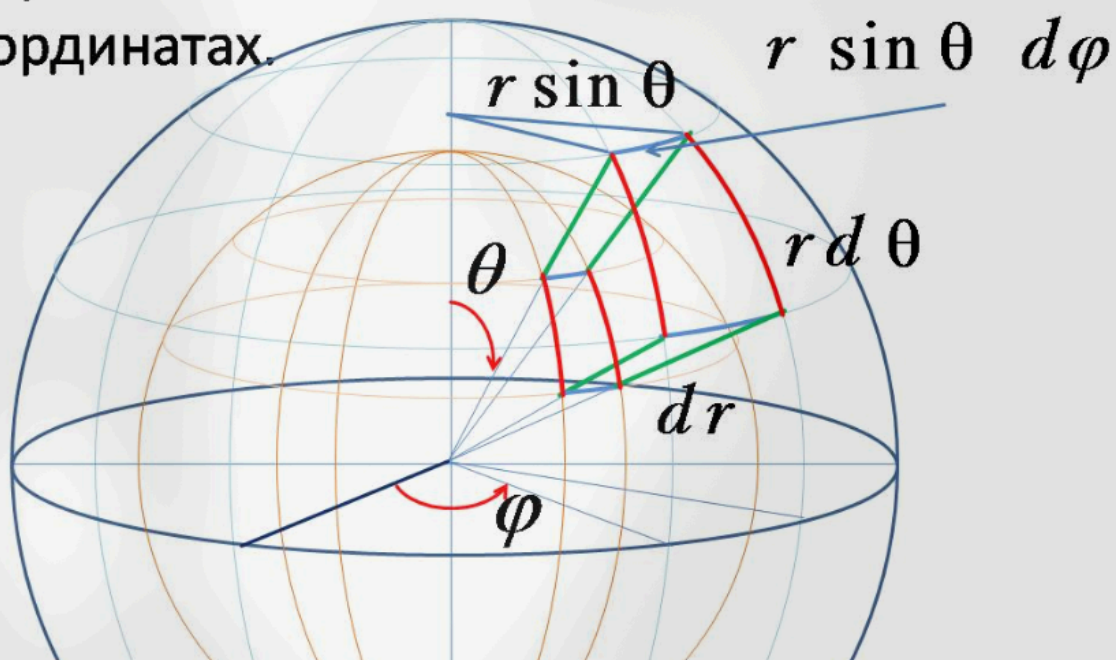
θ – угол между осью OZ и отрезком, соединяющим начало координат и точку A .

$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ – угол между осью OX и проекцией на плоскость XOY отрезка, соединяющего точку A с началом координат. Сферическая система координат удобна при анализе поверхностей, имеющих сферическую симметрию. Начало координат нужно поместить в центр симметрии, тогда уравнение сферы $r = r_{\text{сферы}}$

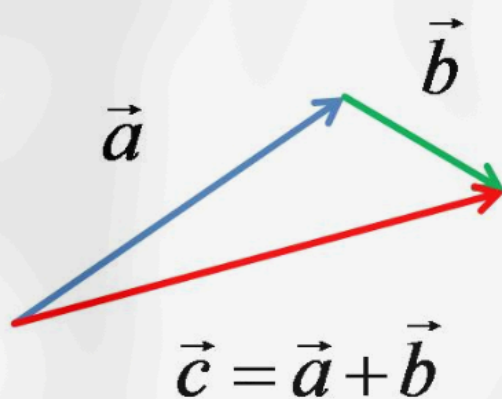


Элемент объёма в
сферических
координатах.

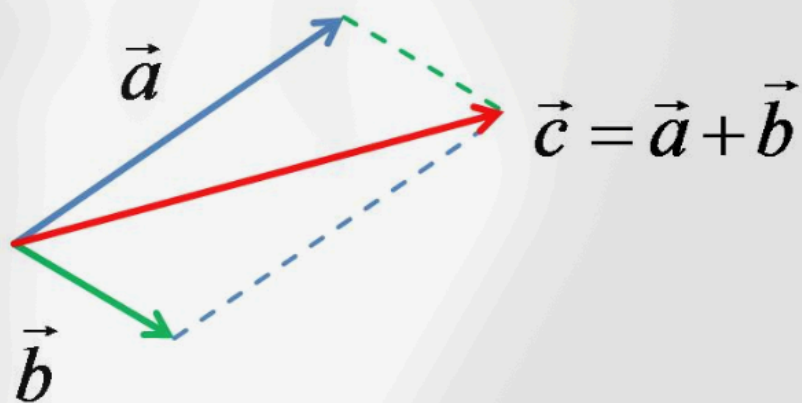
$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$



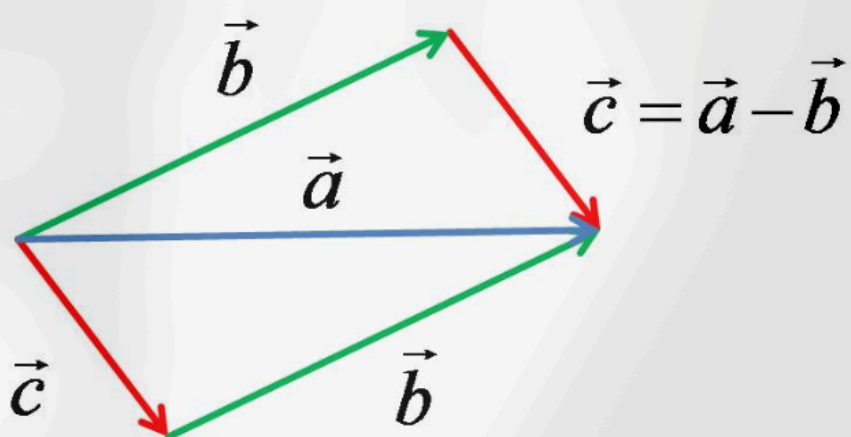
Сумма векторов.
Правило треугольника.



Сумма векторов.
Правило параллелограмма.

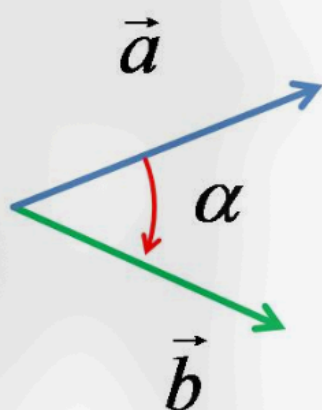


Разность векторов.



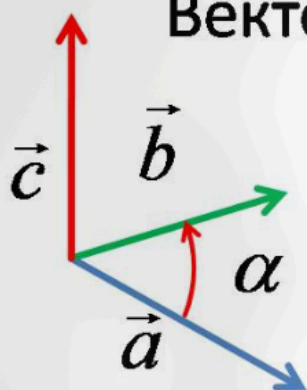
Скалярное произведение.

$$c = (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$



Скалярным произведением векторов a и b называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними (первый вектор вращаем ко второму по кратчайшему пути) .

Векторное произведение.



$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

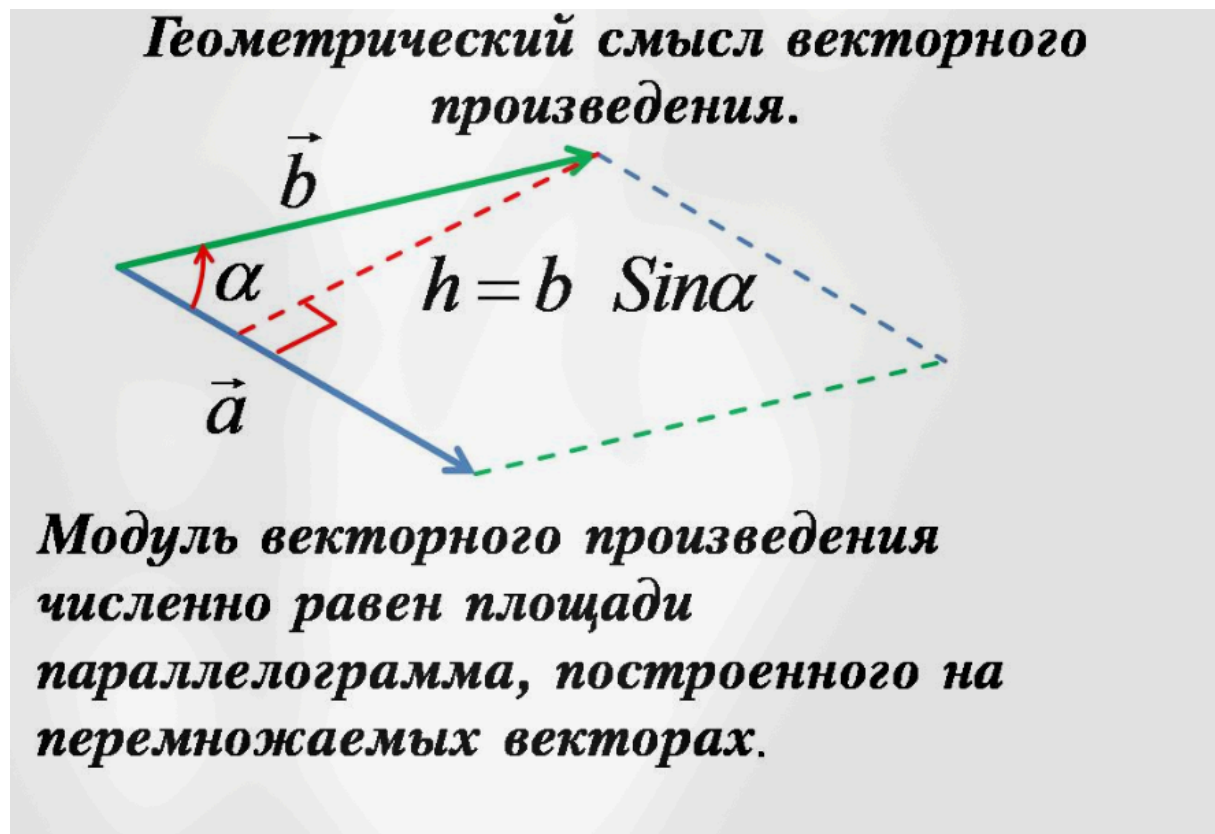
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \cdot \vec{n}$$

Последовательность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ образует правую тройку

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого равен произведению модулей этих векторов на синус угла между ними, а направление определяется следующим образом: если

смотреть на конец вектора $\vec{c}$, то поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути осуществляется против часовой стрелки.



Дифференциалы – малые приращения

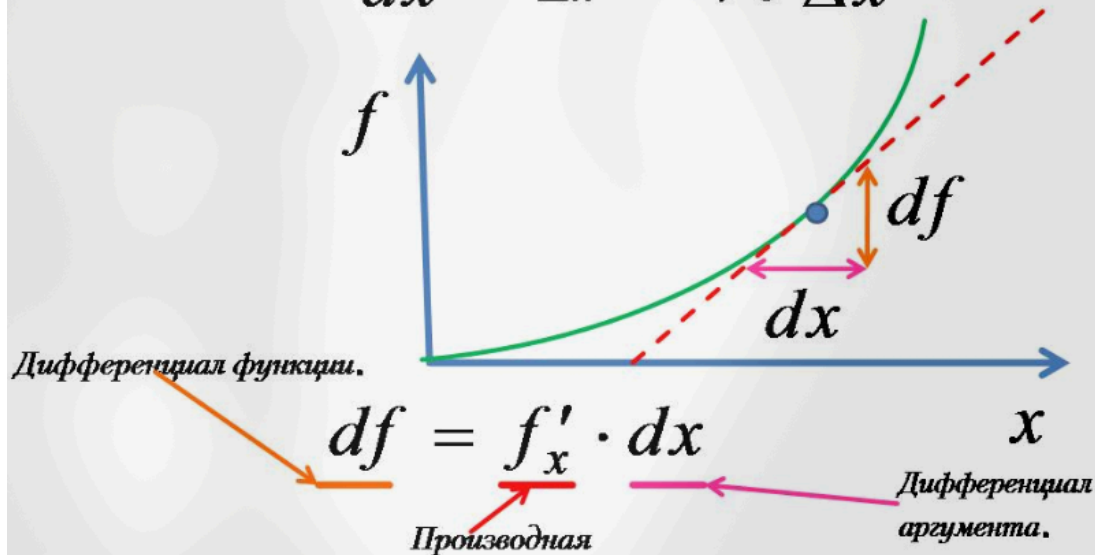
$$\Delta x \quad dx$$

В математике спокойно говорим “бесконечно малые”

В физике тоже так говорим, но понимаем, что это малые, но конечные (доступные для измерения) приращения, иначе они могут менять физический смысл – вместо классической, окажемся в мире квантовой механики.

Геометрический смысл производной

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Примеры вычисления дифференциалов

Рассмотрим, например, такую функцию.

$$f = 3x^2$$

Теперь вычислим дифференциалы левой и правой части этого уравнения.

$$df = \underline{6x} \, dx$$

Подчеркнута производная.

Дифференциальное уравнение

$$f'_x = 6x \quad \frac{df}{dx} = 6x$$

Разделяем переменные. $df = 6x \, dx$

Нужно знать начальные условия. Пусть, например, при $x = 0$ $f(x) = 3$

Интегрируем $\int df = \int 6x \, dx$

$$f = 3x^2 + \text{const} = 3x^2 + 3$$

Измерение времени.

Часы – тело или система тел, в которых совершается периодический процесс, служащий для измерения времени.

Одна секунда

9102631700

колебаний электромагнитного излучения между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия 133.

Измерение расстояний.

Один метр – длина пути, проходимая светом в вакууме в течение

$$\frac{1}{299792458} \text{ секунды}$$

Такое измерение эталона метра вызвано тем, что экспериментальная погрешность определения скорости света в вакууме в настоящее время составляет примерно 0,3 м/с. Это превышает относительную точность воспроизведения метра $4 \cdot 10^{-9}$ предложенным выше способом.

Относительная точность измерения расстояния будет непрерывно повышаться, чтобы каждый раз не менять определения метра, зафиксировали скорость света. Это позволило зафиксировать значения ряда физических констант.

Частота сверхтонкого расщепления основного состояния атома цезия-133 в точности равна 9192631770 Гц;

скорость света в вакууме c в точности равна $299792458 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

световая эффективность k_{cd} монохроматического излучения частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц в точности равна 683 лм/Вт

Планируется зафиксировать следующие константы

постоянная Планка h в точности равна $6.62606X \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

элементарный электрический заряд e в точности равен $1.60217X \cdot 10^{-19}$ Кл;

постоянная Больцмана k в точности равна $1.3806X \cdot 10^{-23}$ Дж/К;

число Авогадро N_A в точности равно $6.02214X \cdot 10^{23}$ моль⁻¹;

На XXIV Генеральной конференции по мерам и весам 17 – 21 октября 2011 года была единогласно принята резолюция, в которой, в частности, предложено в будущей ревизии Международной системы единиц переопределить четыре основные единицы СИ: килограмм, ампер, кельвин и моль.

Предполагается, что новые определения будут базироваться на фиксированных численных значениях постоянной Планка, элементарного электрического заряда, постоянной Больцмана и постоянной Авогадро, соответственно. Всем этим величинам будут приписаны точные значения, основанные на наиболее достоверных результатах измерений, рекомендованных Комитетом по данным для науки и техники (CODATA). Под фиксированием (или фиксацией) подразумевается “принятие некоторого точного численного значения величины по определению”. В резолюции сформулированы следующие положения, касающихся этих единиц

Килограмм останется единицей массы, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Планка равным в точности $6.62606X \cdot 10^{-34}$, когда она выражена единицей СИ $\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$, что эквивалентно Дж·с.

Ампер останется единицей силы электрического тока, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения элементарного электрического заряда равным в точности $1.60217X \cdot 10^{-19}$, когда он выражен единицей СИ $\text{с} \cdot \text{А}$, что эквивалентно Кл.

Кельвин останется единицей термодинамической температуры, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Больцмана равным в точности $1.3806X \cdot 10^{-23}$, когда она выражена единицей СИ $\text{м}^{-2} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$, что эквивалентно Дж·К⁻¹.

Моль останется единицей количества вещества, но его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения постоянной Авогадро равным в точности $6.02214X \cdot 10^{23}$, когда она выражена единицей СИ моль^{-1} .

Выше и далее X заменяет одну или более значащих цифр, которые будут определены в дальнейшем на основании наиболее точных рекомендаций CODATA.

Систем единиц СИ

“Système International d’Unités” Включает в себя основные и производные единицы.

Основные единицы системы СИ: секунда, метр

Килограмм – единица массы, равная массе международного эталона килограмма.

Ампер – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ на каждый метр длины.

Кельвин – единица абсолютной температуры, равная $\frac{1}{273.16}$ части температуры тройной точки воды.

Моль – единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул), сколько содержится атомов углерода в углероде-12 массой 0.012 кг.

Кандела – единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет $\frac{1}{683}$ Вт/ср.

Дополнительные единицы СИ.

Радиян – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

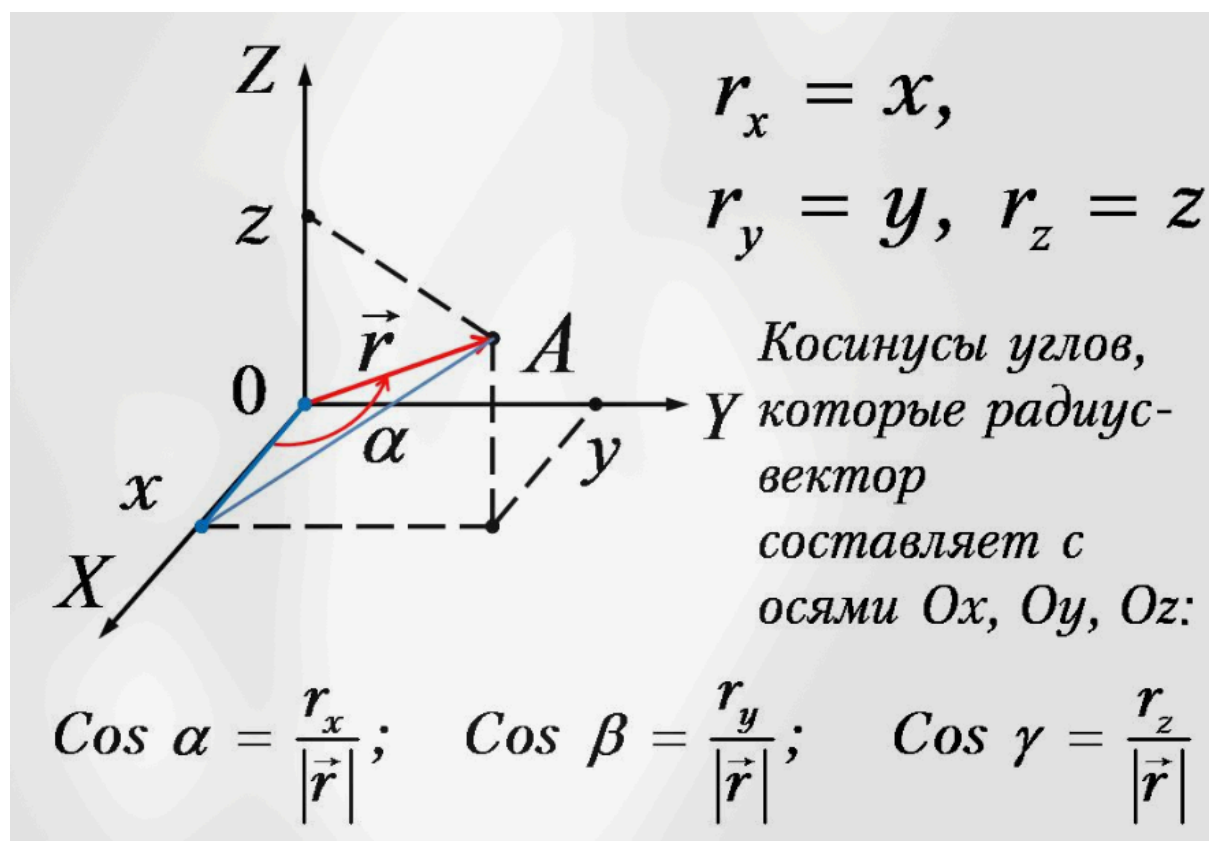
Стерadian – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площади, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Принципы, используемые при построении классической механики.

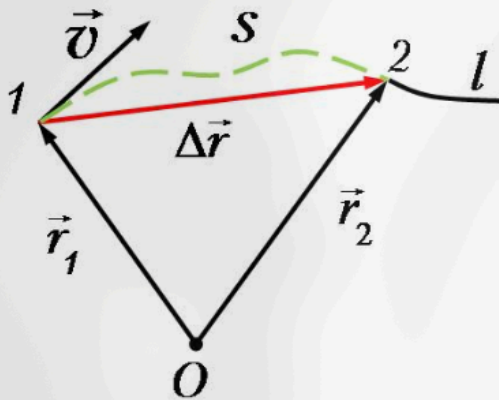
1. Однородность пространства – все пространственные точки эквивалентны между собой. (Начало отсчета можно выбрать в любой точке.)
2. Изотропность пространства – все направления в пространстве эквивалентны. (Систему координат можно поворачивать произвольным образом)
3. Однородности времени – все моменты времени эквивалентны. (В любой момент можно начать отсчет времени)

Радиус-вектор

Радиус-вектор точки – вектор, проведенный из начала координат в данную точку.



Основные понятия кинематики.



Пусть за интервал времени от t_1 до t_2 материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2.

O – начало отсчёта.

$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

l – траектория материальной точки.

S – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 .

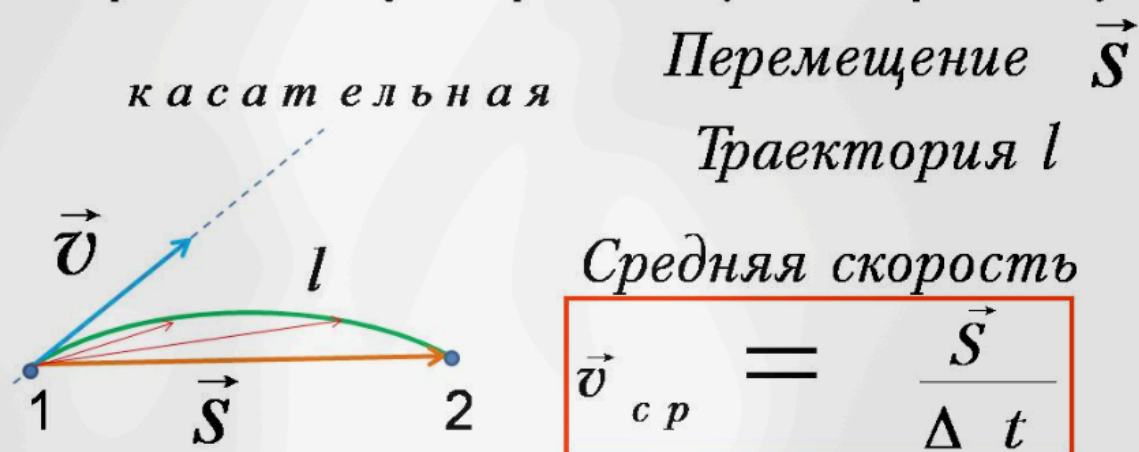
$\vec{S} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 .

Перемещением материальной точки за интервал времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ называется вектор, проведенный из ее положения в момент времени t_1 в ее положение в момент времени t_2 .

Траекторией материальной точки называется линия, которую она описывает при своем движении.

Длиной пути S называется сумма длин всех участков траектории, пройденных материальной точкой за рассматриваемый промежуток времени.

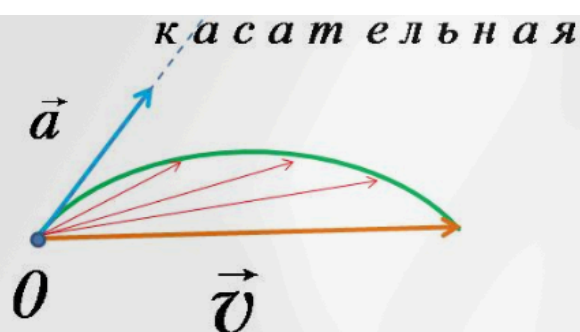
Скорость и ускорение (повторение).



Мгновенная скорость.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Направлена по касательной к траектории



Среднее ускорение

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

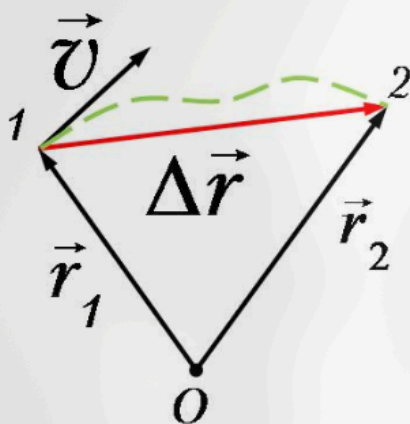
Вектор скорости точки в каждый момент времени направлен по касательной к ее пространственной траектории. Для получения траектории в пространстве скорости необходимо все векторы скорости,

относящиеся к выбранному моменту времени, отложить от одной точки-начала отсчета в пространстве скоростей.

Конец, изменяющегося во времени вектора скорости, вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называемую годографом вектора скорости. (Гамильтон 1846 г.) Вектор мгновенного ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости.

Мы будем использовать три способа описания движения – векторный, координатный и траекторный.

Векторный способ описания движения.

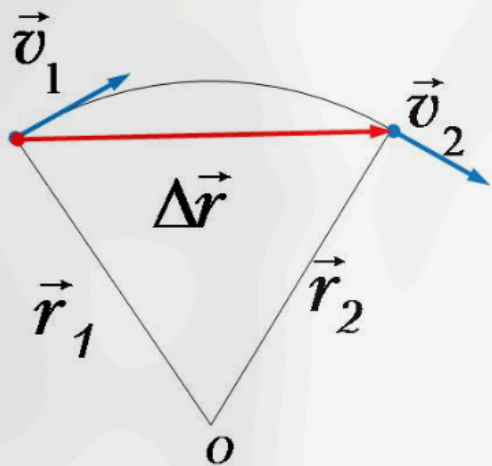


Для того, чтобы описать движение материальной точки, необходимо указать зависимость её радиуса-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 равно приращению её радиуса-вектора за этот интервал времени

Скорость и ускорение материальной точки.



Средняя скорость
материальной точки в
интервале времени от
 t_1 до t_2 :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Среднее ускорение материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Скорость материальной точки в момент времени t :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt,$$

где $\vec{v}_0$ – скорость материальной точки в момент времени $t = 0$.

Радиус-вектор материальной точки в момент времени t :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки в момент времени $t = 0$.

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t :

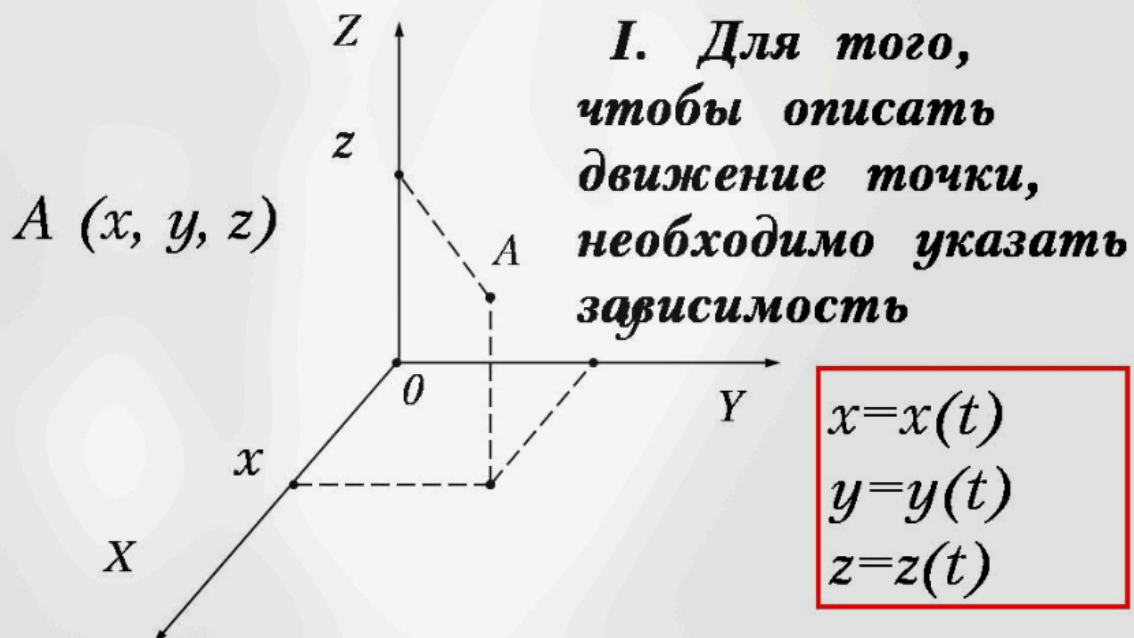
$$\Delta \vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Почему траектория тела, брошенного под углом к горизонту, плоская кривая?

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

В любой момент времени вектор перемещения лежит в плоскости, содержащей векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$

Координатный способ описания движения.



II Вектор скорости материальной точки.

Проекции вектора скорости на оси координат.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

Модуль вектора скорости:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор скорости составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

III. Ускорение материальной точки.

Проекции вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль вектора ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор ускорения составляет с осями $0x, 0y, 0z$:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

IV. Перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2

Проекции вектора перемещения на оси координат:

$$(\vec{S})_x = x_2 - x_1$$

$$(\vec{S})_y = y_2 - y_1$$

$$(\vec{S})_z = z_2 - z_1$$

Модуль вектора перемещения:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор перемещения составляет с осями $0x, 0y, 0z$:

$$\cos \alpha = \frac{S_x}{|\vec{S}|}; \quad \cos \beta = \frac{S_y}{|\vec{S}|}; \quad \cos \gamma = \frac{S_z}{|\vec{S}|};$$

V. Приращение радиуса-вектора материальной точки (перемещение)

Проекции приращения радиуса-вектора на оси координат:

$$\Delta r_x = x_2 - x_1$$

$$\Delta r_y = y_2 - y_1$$

$$\Delta r_z = z_2 - z_1$$

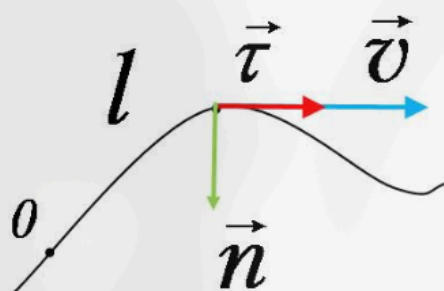
Модуль приращения радиуса-вектора:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2 + \Delta r_z^2}$$

Косинусы углов, которые приращение радиуса-вектора составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{\Delta r_x}{|\Delta \vec{r}|}; \quad \cos \beta = \frac{\Delta r_y}{|\Delta \vec{r}|}; \quad \cos \gamma = \frac{\Delta r_z}{|\Delta \vec{r}|}$$

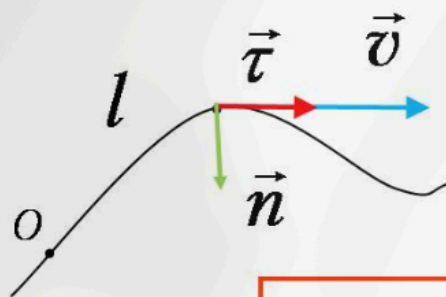
Траекторный способ описания движения



Используется , когда траектория движения материальной точки известна заранее.

Положение материальной точки задаётся с помощью дуговой координаты l , отсчитываемой от выбранного на траектории начала.

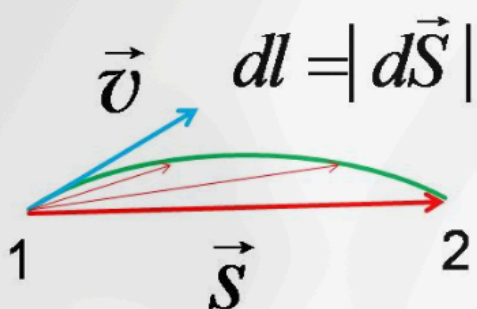
$$l = l(t)$$



**Скорость
материальной точки:**

$$\vec{v} = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{\tau} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ — **единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.**



**Обратите внимание!
Модуль вектора
скорости равен
производной от пути
по времени.**

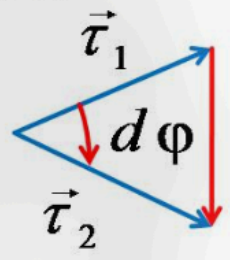
Через перемещение

$$|\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{S}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\vec{S}}{dt} \right|$$

Через путь

$$|\vec{v}| = \frac{dl}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Вычислим производную от вектора $\vec{\tau}$ по времени



$$|\vec{\tau}| = 1$$

$$d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \vec{n} \quad |d\vec{\tau}| = d\varphi$$

$$d\vec{\tau} = d\varphi \vec{n}$$

Орт $\vec{n}$ лежит в той же плоскости, в которой поворачивается вектор $\vec{\tau}$, направлен в ту же сторону, в которую происходит вращение.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}$$

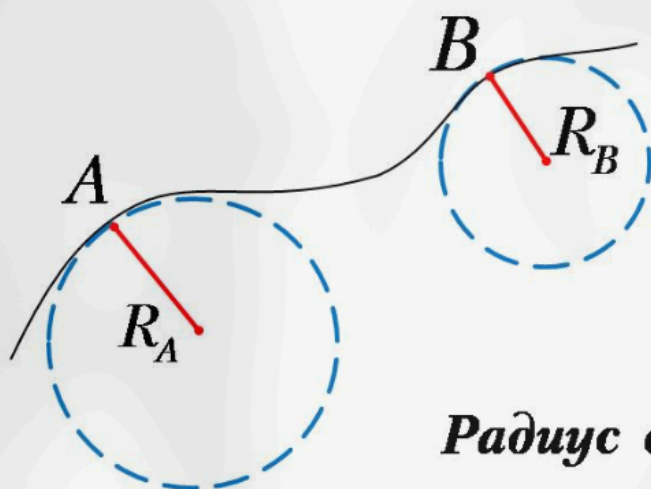
Полное ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{\frac{|\vec{v}| \cdot d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{|\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Если $|\vec{v}| \uparrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$ Если $|\vec{v}| \downarrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

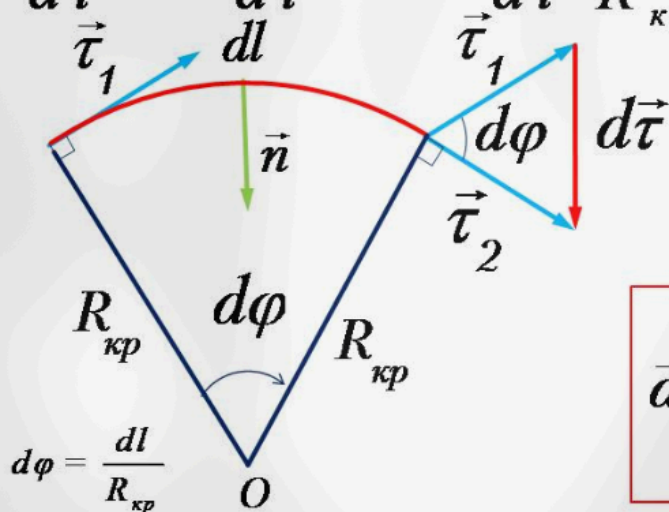
Радиус кривизны траектории



**Радиус окружности,
аппроксимирующей траекторию
в данной точке**

Выразим нормальное ускорение материальной точки через радиус кривизны её траектории:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = \frac{dl}{dt} \frac{1}{R_{кр}} \vec{n} = |\vec{v}| \frac{1}{R_{кр}} \vec{n}$$



$$\vec{a}_n = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

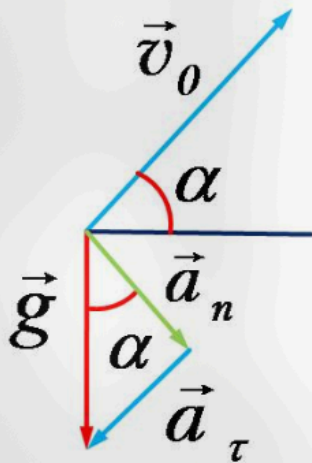
Тангенциальное ускорение отвечает за скорость изменения модуля скорости

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Нормальное ускорение пропорционально скорости изменения направления вектора скорости

$$\vec{a}_n = |\vec{v}| \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = |\vec{v}|^2 \frac{1}{R} \vec{n}$$

Пример. Камень брошен со скоростью $\vec{v}_0$ под углом к горизонту. Определите его нормальное и тангенциальное ускорение, и радиус кривизны траектории в начальный момент времени.



$$a_n = g \cos \alpha$$

$$a_\tau = g \sin \alpha$$

$$R = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}$$

Движение с постоянным ускорением

Зависимость скорости материальной точки от времени:

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$\vec{v}_0$ – скорость материальной точки в момент времени $t = 0$.

Зависимость радиуса-вектора материальной точки от времени:

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор материальной точки в момент времени $t = 0$

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\vec{a} = \text{const}, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Формула для разности квадратов скоростей

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

Приращение координаты материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}$$

Проекция на ось Ox перемещения материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$(\Delta \vec{r})_x = \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2 a_x}$$

Средняя скорость прохождения отрезка пути.

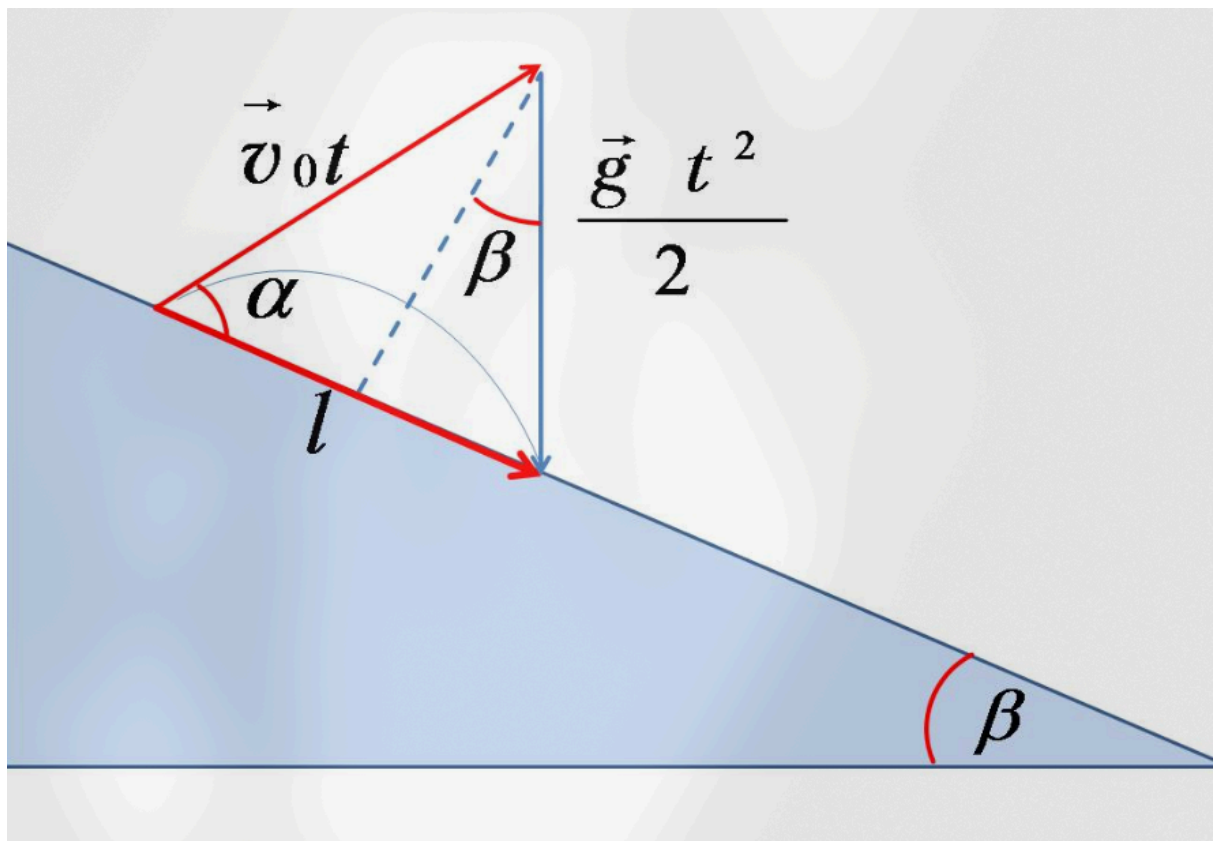
$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{\Delta t}$$

Средней путевой скоростью движения точки называется скалярная величина равная отношению пути, пройденного точкой за интервал времени Δt , к его продолжительности.

Пример . Материальная точка прошла путь из точки A в точку B со скоростью v_1 и обратно со скоростью v_2 . Вычислите среднюю путевую скорость.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\vec{v}_1} \quad \xleftarrow{\vec{v}_2} \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 A \quad S \quad B
 \end{array}
 \quad
 v_{cp} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} \right)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Пример. Камень брошен со склона горы с начальной скоростью v_0 , направленной под углом α к склону горы, составляющего угол β с горизонтом. На каком расстоянии от точки бросания l упадет камень?



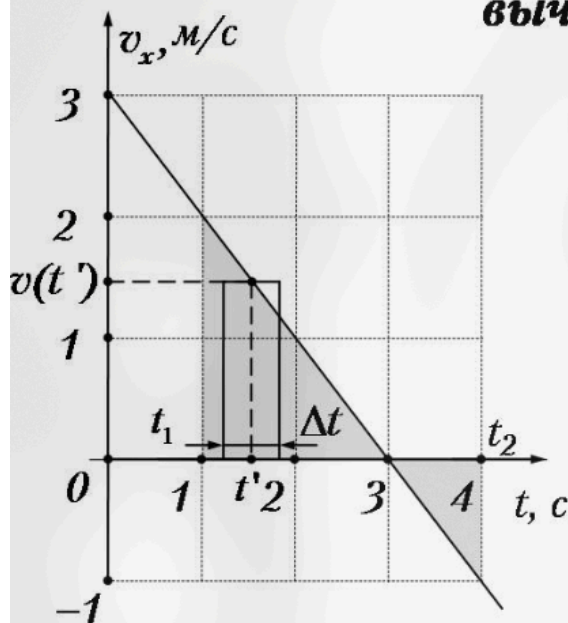
Выразим высоту в треугольнике через модуль каждого из векторов по очереди.

$$v_0 t \sin \alpha = \frac{gt^2}{2} \cos \beta$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \beta}$$

$$l = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos \beta} \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \beta} \cos(\alpha - \beta)$$

Пример 2. Материальная точка движется вдоль оси Ox . По графику зависимости $v_x(t)$ вычислим:



1). **Путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 :**

$$S = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м}$$

2). **Приращение координаты материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :**

$$x_2 - x_1 = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

3). **Проекцию перемещения материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :**

$$(\Delta \vec{r})_x = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$



Пример. Материальная точка движется вдоль оси Ox .

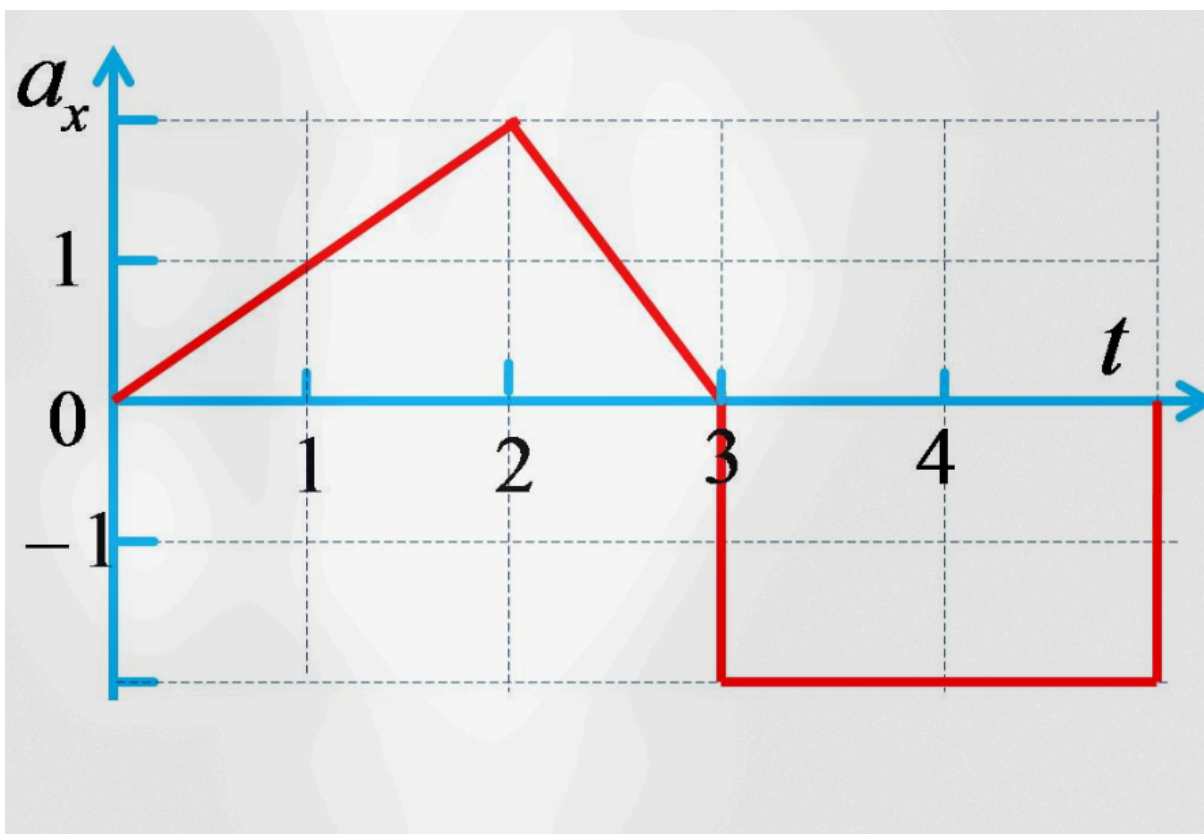
1. Укажите момент времени, когда мгновенная скорость точки максимальна.

2. Укажите момент времени t_1 , когда мгновенная скорость совпадает по величине со средней путевой скоростью за интервал времени от 0 до t_1 .



Пример. Материальная точка покоится в начале координат. В момент времени $t=0$ она начинает движение вдоль оси Ox . На рисунке показан график зависимости проекции ее ускорения на ось Ox от времени. Определите:

1. В какие моменты времени модуль скорости точки возрастает
2. В какой момент времени направление движения точки изменяется на противоположное.
3. Максимальное значение модуля скорости точки
4. На какое максимальное расстояние точка удалилась от начала координат



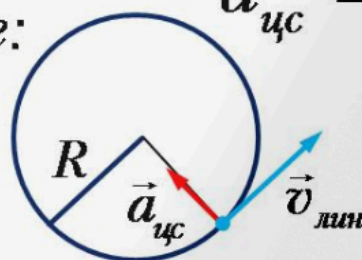
Лекция 2. Кинематика вращательного движения.

Кинематика равномерного вращения материальной точки по окружности

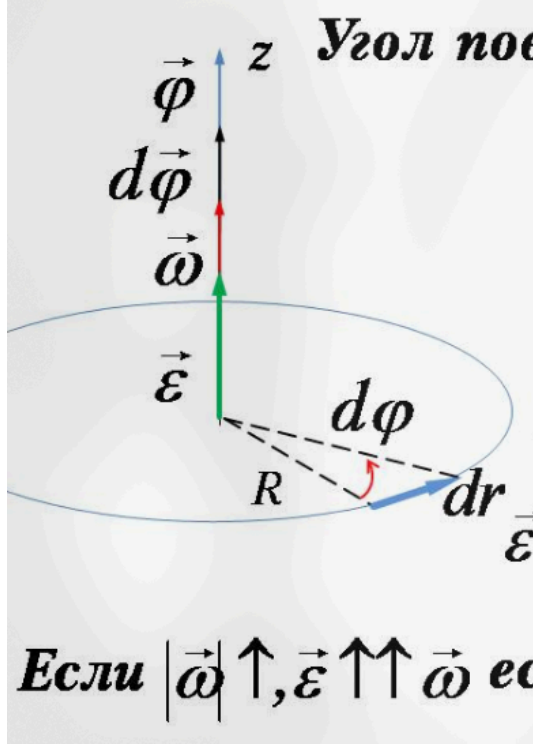
Период обращения точки: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ $[T] = c$

Частота обращения точки: $\nu = \frac{1}{T}$ $[\nu] = c^{-1}$

Центростремительное ускорение: $a_{\text{цс}} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$



Кинематика вращения материальной точки вокруг неподвижной оси.



The diagram illustrates the kinematics of rotation around a fixed vertical axis labeled z . A horizontal disk is shown rotating. Several vectors are depicted along the z -axis: a blue vector $\vec{\varphi}$ (angle of rotation), a red vector $d\vec{\varphi}$ (infinitesimal angle change), a green vector $\vec{\omega}$ (angular velocity), and a green vector $\vec{\varepsilon}$ (angular acceleration). On the disk, a radius vector R is shown, with a blue vector $d\vec{r}$ representing an infinitesimal displacement along the circumference. A red curved arrow indicates the direction of rotation, corresponding to the angle $d\varphi$.

Угол поворота: $\vec{\varphi}$ аксиальный вектор

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{c}$$

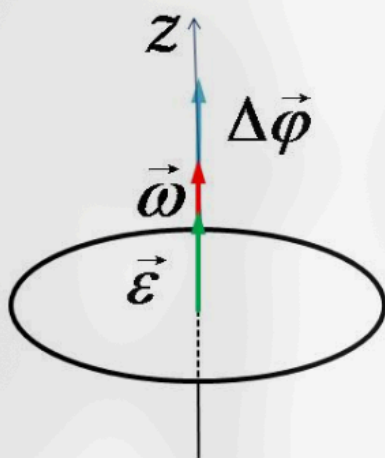
Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \quad [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{c^2}$$

Если $|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ **если** $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$

Направление вектора угла поворота определяют по правилу правого винта: если смотреть вдоль вектора угла поворота, то мы будем видеть поворот, совершающимся по часовой стрелке.

Равноускоренное движение материальной точки по окружности.



Зависимость угловой скорости от времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t$$

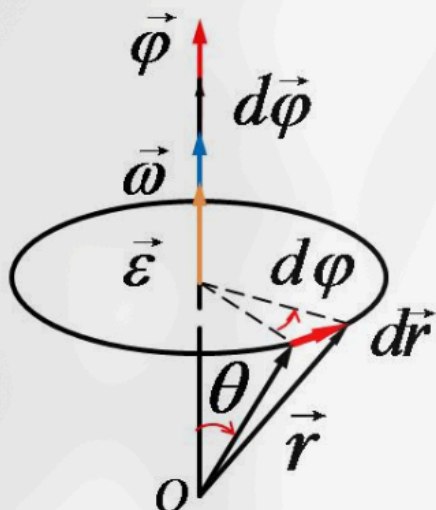
Зависимость приращения угла поворота от времени:

$$\Delta\vec{\phi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t$$

$$\Delta\phi_z = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}$$

Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



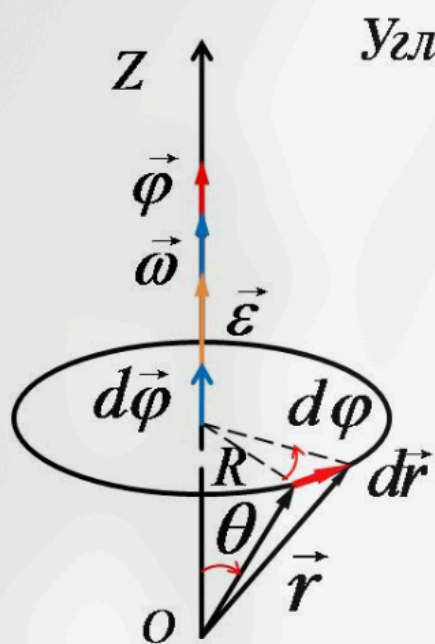
Для точек твёрдого тела начало отсчёта в общем случае не совпадает с центром окружности, по которой движется точка

Угол поворота: $\vec{\phi}$

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$



Угловое ускорение:

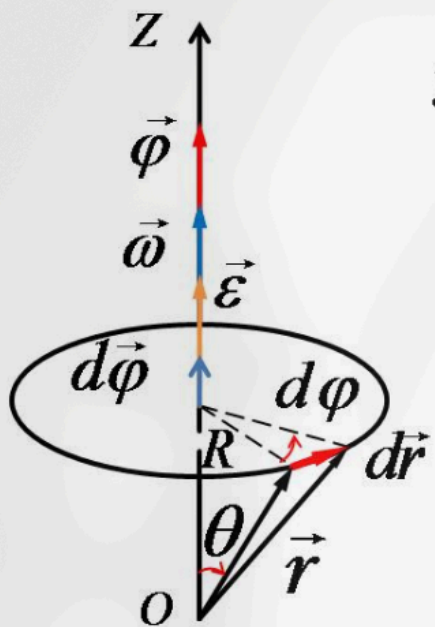
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Если:

$$|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

Если: $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$



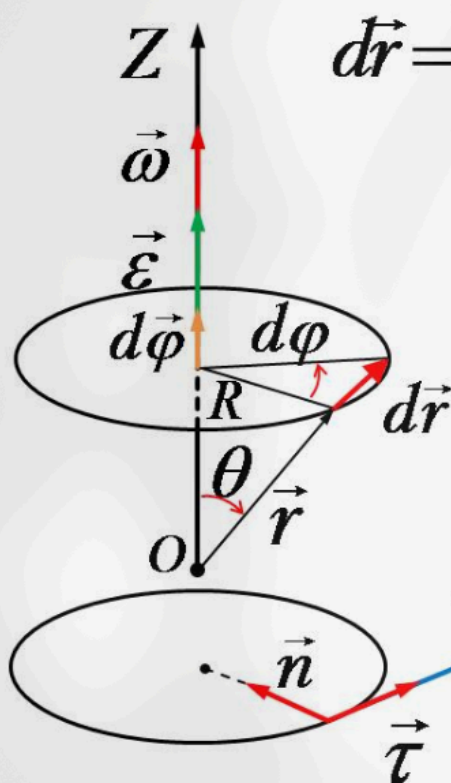
**Вращение с постоянным
угловым ускорением**

$$\vec{\varepsilon} = \text{const},$$

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t,$$

$$\Delta \vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0 \cdot t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$$

Связь линейных и угловых величин.



$$d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}]$$

При вращении
вокруг

неподвижной оси R не
изменяется, поэтому
дифференцируем
только первый
сомножитель

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$R = r \sin \theta$$

$$v = \omega R$$

Подробное объяснение (доп. материал)
в конце лекции

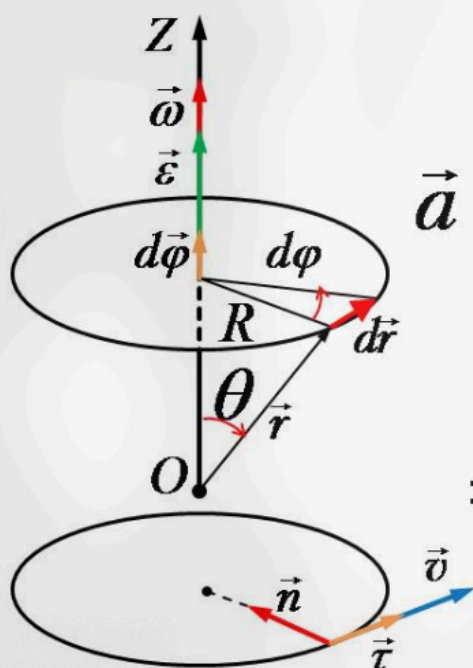
При рассмотрении таких векторов, как радиус-вектор, скорость или сила и. т. п., вопрос о выборе их направления не возникает – оно вытекает естественным образом из природы этих величин. Такие векторы называют полярными или истинными. Векторы, направление которых связано с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами.

При изменении условия, определяющего направление псевдовекторов, например, переходе от правой системы координат к левой псевдовекторы меняют направление на противоположное, а полярные остаются без изменений. Если оба вектора в векторном произведении полярные (или аксиальные), то векторное произведение – аксиальный вектор.

Произведение полярного вектора на аксиальный будет полярным вектором. Изменение условия, определяющего направление псевдовекторов на обратное приведет в этом случае к изменению знака перед векторным произведением и одновременно к изменению знака перед аксиальным вектором. В итоге направление векторного произведения не изменится.

Продифференцируем скорость по времени- найдём ускорение

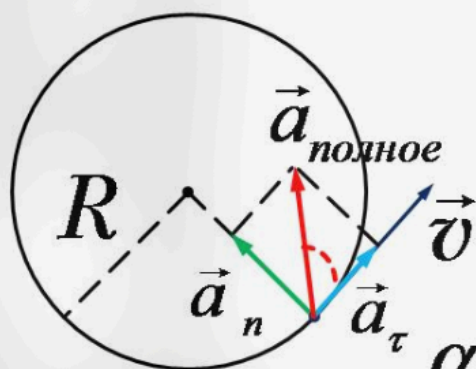
$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \\ &= \varepsilon \cdot R \cdot \vec{\tau} + \omega^2 \cdot R \cdot \vec{n} = \\ &= \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n \end{aligned}$$

Пример. Материальная точка начинает движение по окружности радиусом R с постоянным угловым ускорением ε . Вычислите угол между векторами её скорости и полного ускорения через t секунд после начала движения.

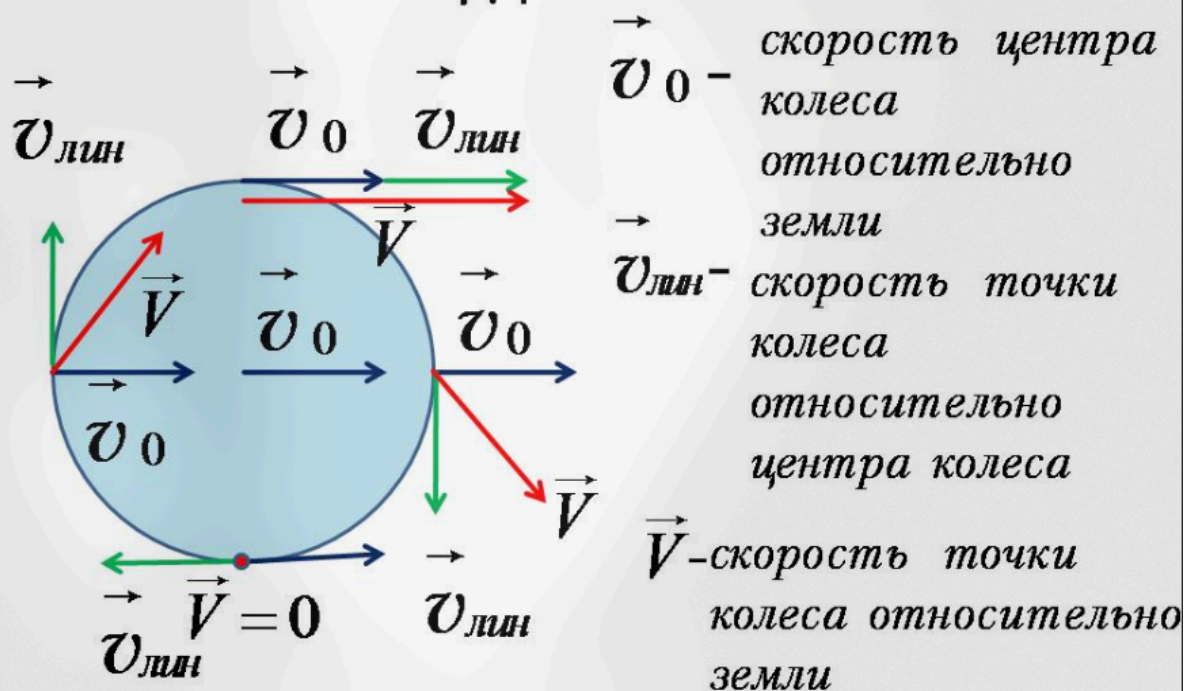
$$a_{\tau} = \varepsilon R$$



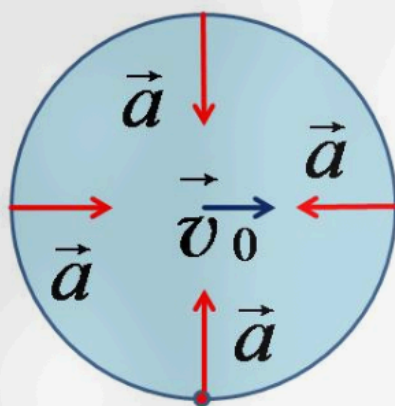
$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$$

$$\alpha = \arctg \frac{a_n}{a_{\tau}} = \arctg \varepsilon t^2$$

Плоское движение абсолютно твёрдого тела.

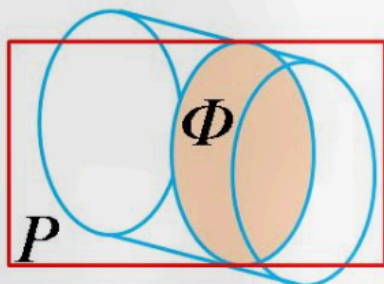


$$\frac{d\vec{V}_{\text{цм}}}{dt} = 0$$



При равномерном вращении колеса ускорение точек колеса так же, как при вращении вокруг неподвижного центра направлено к центру колеса, а не к мгновенной оси вращения.

Плоское движение абсолютно твёрдого тела.



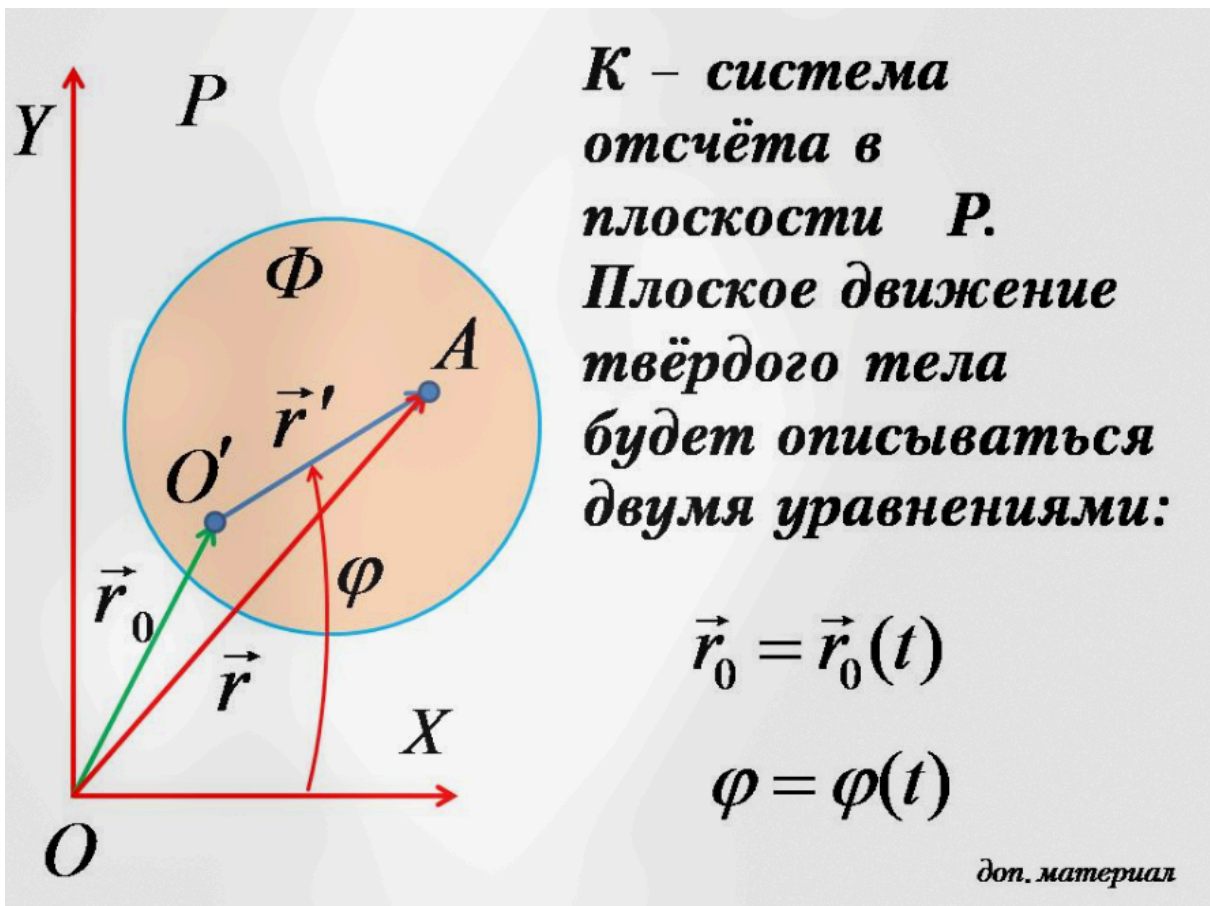
*Пример-цилиндр
катится по столу*

При плоском движении каждая точка твёрдого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной в данной системе отсчёта плоскости. Понятно, что при таком движении плоская фигура, образованная сечением тела этой плоскостью Φ всё время остаётся в этой плоскости P .

доп. материал

Положение твёрдого тела однозначно определяется положением плоской фигуры Φ в неподвижной плоскости P . Выберем произвольные точки A' и O' плоской фигуры Φ . Положение фигуры Φ в плоскости P можно определить, задав радиус-вектор $\vec{r}_0$ точки O' и угол между радиусом-вектором $\vec{r}'$ задающим положение A' относительно O' (этот вектор жестко связан с фигурой) и некоторым фиксированным направлением в K – системе отсчета.

Выберем произвольные точки A и O' плоской фигуры Φ . Положение фигуры Φ в плоскости P можно определить, задав радиус-вектор $\vec{r}_0$ точки O' и угол между радиусом-вектором $\vec{r}'$, задающим положение A относительно O' , и некоторым фиксированным направлением в K – системе отсчета (например, с осью Ox).

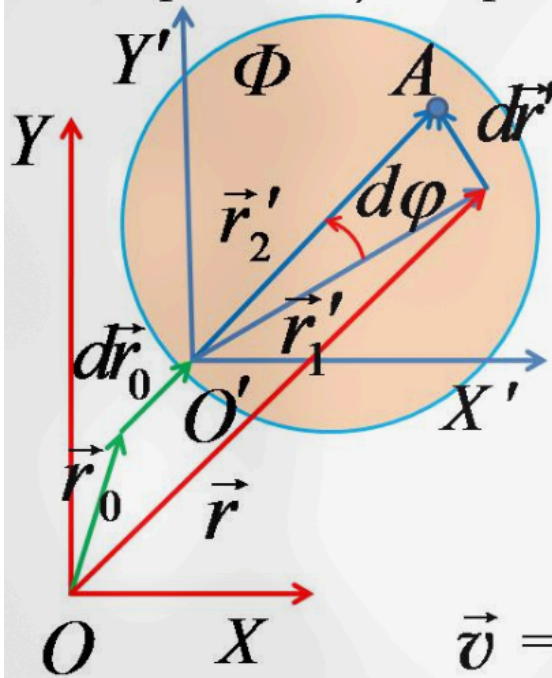


Заметим, что, если $\vec{r}'$ повернется на угол $d\varphi$, на такой же угол повернется и любой другой отрезок фигуры. Угловая скорости фигуры не зависит от выбора точки O'

Введем вспомогательную систему отсчета K' , с началом отсчета в точке O' . Оси Ox и Ox' направим параллельно. Пусть система отсчета K' перемещается поступательно относительно K . Элементарное перемещение $d\vec{r}$ точки A в K – системе

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \quad (1)$$

Перемещение $d\vec{r}'$ обусловлено вращением тела относительно неподвижной в K' системе оси, проходящей через точку O' .



$$d\vec{r}' = [d\vec{\phi}, \vec{r}'](2)$$

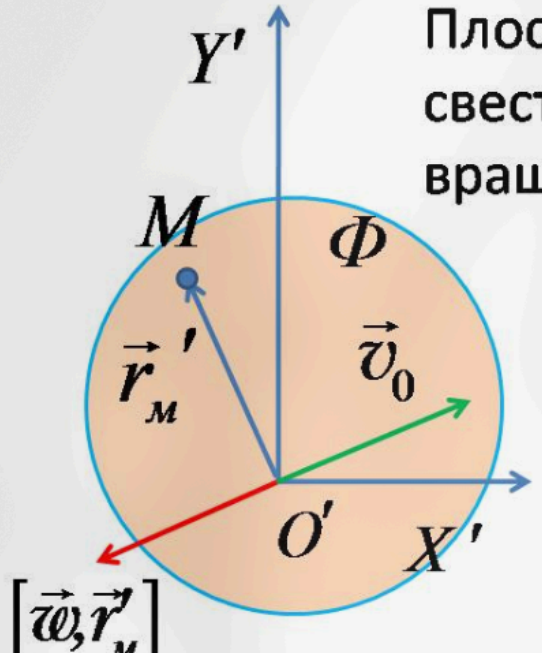
(2) в (1) и

дифференцируем
с учётом того,
что $\vec{r}'$
по модулю не
меняется

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \quad \text{доп. материал}$$

Скорость любой точки A твердого тела при плоском движении складывается из скорости $\vec{v}_0$ произвольной точки O' тела и $\vec{v}' = [\vec{\omega}, \vec{r}']$ скорости, обусловленной вращением тела вокруг оси, проходящей через точку O' .

Плоское движение можно свести к чисто вращательному



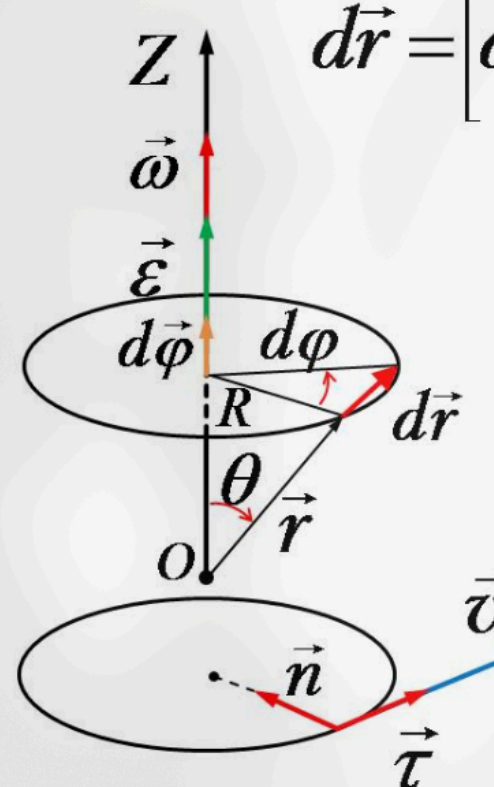
На предыдущем рисунке угловая скорость направлена на нас. Всегда найдётся такая точка M , что

$$0 = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}'_m]$$

Через точку M проходит мгновенная ось вращения

доп. материал

Связь линейных и угловых величин ●.



$$d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}]$$

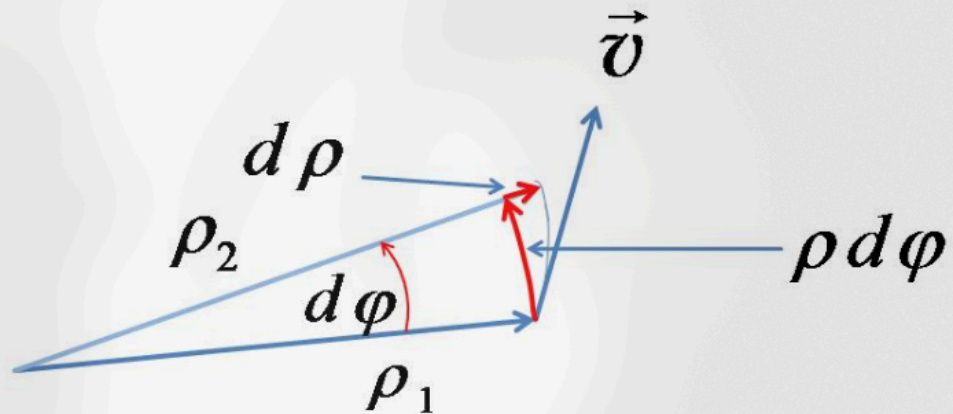
Казалось бы, надо продифференцировать сомножители векторного произведения по очереди, но ни в одном учебнике так не делают

Иродов И.Е., например, просто $d\phi$ делит на dt

Савельев И.В. Вообще не говорит о перемещении, а сразу вводит формулу для линейной скорости без доказательства.

Не заметите неточности, не страшно... а если заметили...

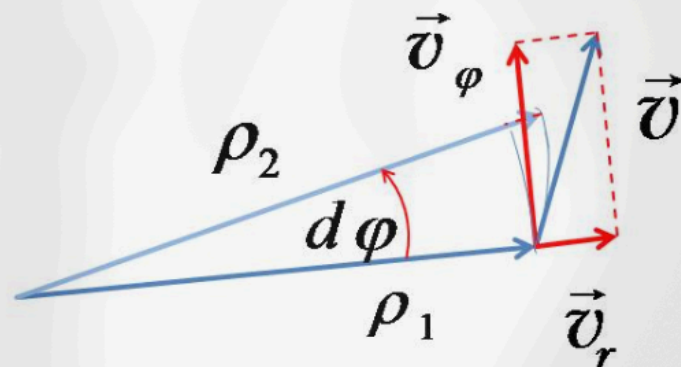
доп. материал



Перемещение вдоль ρ равно $d\rho\vec{e}_r$
 В перпендикулярном направлении $\rho d\varphi\vec{e}_\varphi$

Продифференцируем эти перемещения,
 найдём радиальную

$$\vec{v}_r = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_r$$



и тангенциальную или поперечную
 скорости

$$\vec{v}_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi = \rho\omega\vec{e}_\varphi$$

доп. материал

При вращении вокруг неподвижной оси $\rho = R$ не изменяется. Нет радиального перемещения dp , есть только поперечное перемещение $\rho d\varphi$. Нет радиальной скорости

$$\vec{v}_r = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_r$$

есть только трансверсальная скорость

$$\vec{v}_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \rho \omega \vec{e}_\varphi$$

А она в свою очередь может быть представлена в виде

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$R = r \sin \theta$$

$$v = \omega R$$

Лекция 3. Динамика поступательного движения.

Законы динамики Ньютона.

I закон:

Существуют такие системы отсчета, в которых свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такие системы отсчета называются инерциальными.

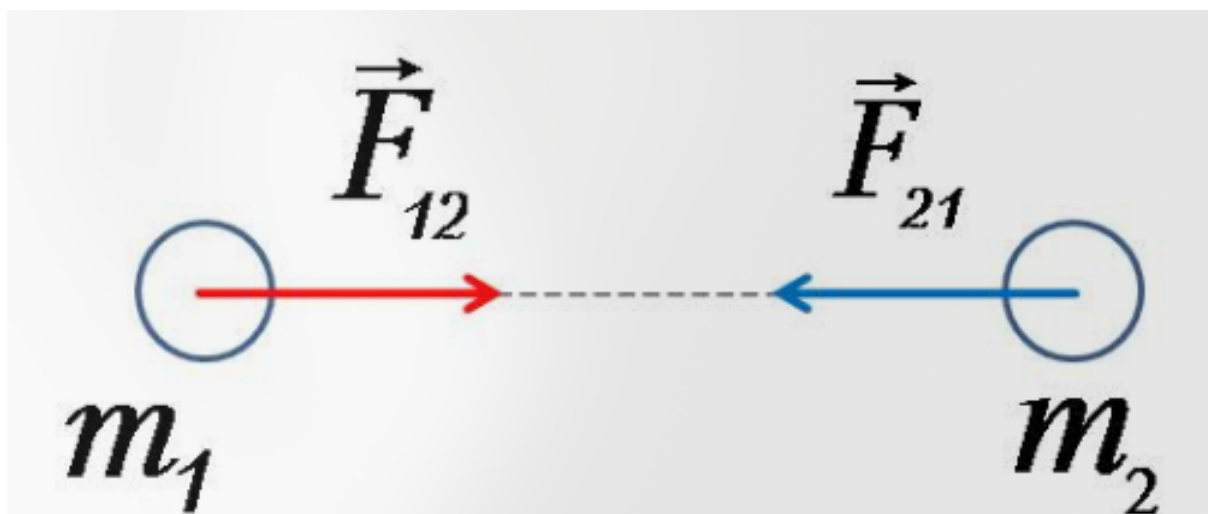
II закон:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_\Sigma}{m}$$

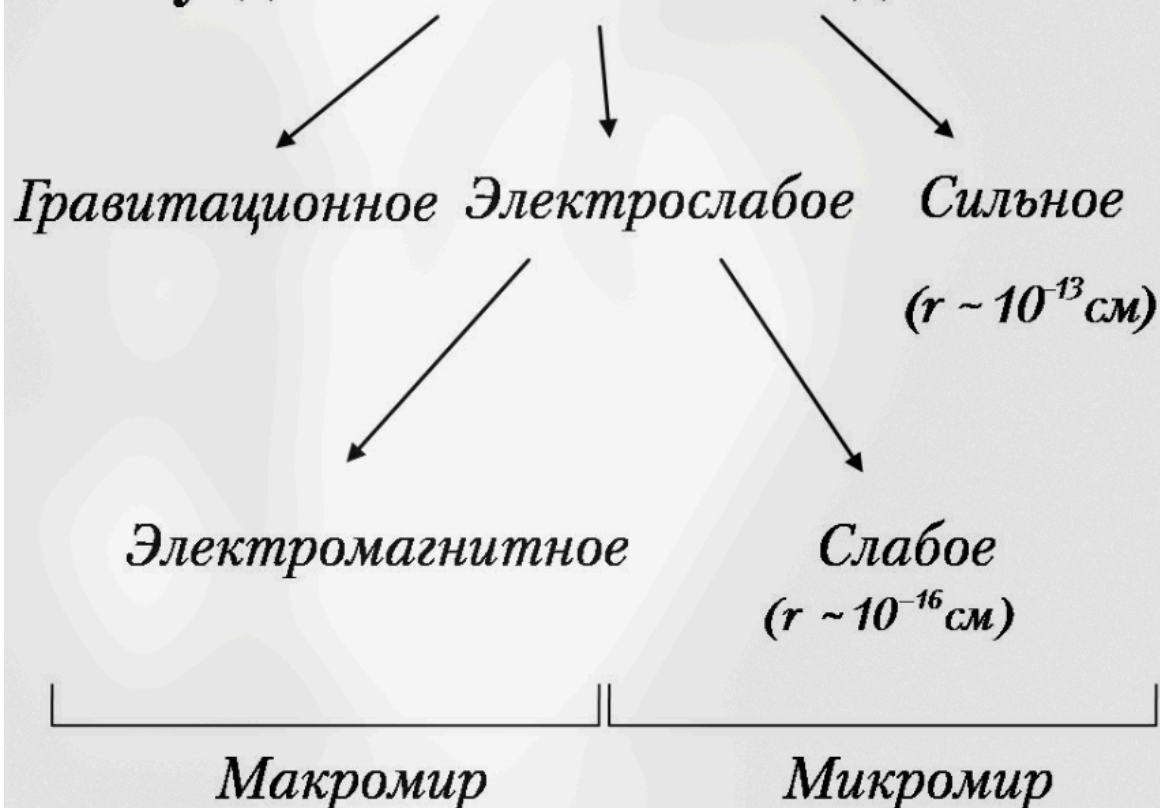
$\vec{F}_\Sigma$ – сумма всех сил, действующих на тело

III закон:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Фундаментальные взаимодействия



Закон всемирного тяготения

Diagram illustrating the Law of Universal Gravitation:

Two masses, m_1 and m_2 , are shown. The force vector $\vec{F}_{21}$ (red arrow) points from m_2 towards m_1 . The position vector $\vec{r}_{21}$ (green arrow) points from m_1 towards m_2 .

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$
$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

Масса инертная и гравитационная

Казалось бы, инертность и способность к гравитационным взаимодействиям представляют собой совершенно различные свойства материи. Количественные меры этих свойств могли бы быть разными, но...

I. Впервые (сам не подозревая об этом) доказать на опыте равенство инертной и гравитационной масс пытался Галилей. Он проводил опыты, стремясь опровергнуть утверждение Аристотеля о том, что тяжелые тела падают быстрее легких.

$$m_{\text{инертн}}a = m_{\text{грав}}g$$

для всех тел.

II. Ньютон открыл закон всемирного тяготения, анализируя законы Кеплера и используя свой закон динамики.

$$m_{\text{инертн}}a = F_{\text{грав}} = G \frac{m_{\text{грав}}M}{r^2}$$

Он первый проверил пропорциональность инертной и гравитационной масс с точностью до 10^{-3}

III. Современные эксперименты доказали равенство инертной и гравитационной масс с относительной погрешностью измерений до 10^{-12} .

В классической механике можно выбрать один и тот же эталон для измерения обеих масс и говорить просто и массе, которая выступает как мера инертности тела и как мера его гравитационного взаимодействия.

Принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции Эйнштейна.

Общая теория относительности релятивистская теория гравитации. Равенство инертной и гравитационной масс заложено в основу теории. Все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции.

Законы Кеплера.

1. Траектории, по которым движутся планеты, представляют собой эллипсы, а одним из фокусов которых находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты, проведенный из Солнца, зачерчивает за равные промежутки времени одинаковые площади.
3. Для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси эллиптической орбиты имеет одно и то же значение.

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Вывод третьего закона Кеплера из закона всемирного тяготения.

Будем рассматривать движение по круговым орбитам

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{F_{\text{грав}}}{m} = G \frac{M_{\text{Солн}}}{R^2}$$

Для всех планет, вращающихся вокруг Солнца,

$$G \frac{M_{\text{солн}}}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2} = \text{const}$$

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Приближенные силы.

I. Однородная сила тяжести $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$

II. Сила упругости. Закон Гука.

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}$$

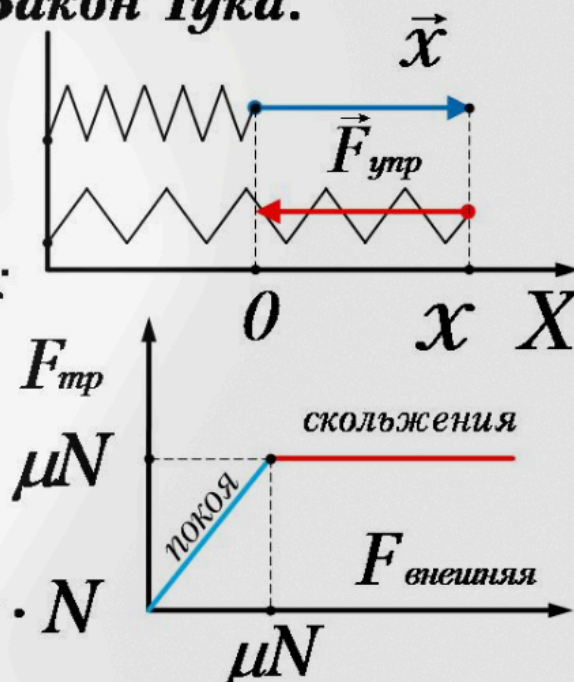
III. Сила трения:

1). Сила трения покоя:

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = |\vec{F}_{\text{внешн}}|$$

2). Сила трения

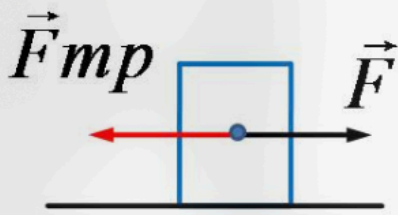
скольжения: $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu \cdot N$



Пример. Брусок массой $m=3\text{ кг}$ находится на горизонтальной поверхности.

Коэффициент трения бруска о поверхность μ равен 0.1 . К бруску приложили горизонтальную силу $F=1\text{ Н}$. Вычислите силу трения, действующую на брусок.

$$\mu N = \mu mg = 3\text{ Н}.$$



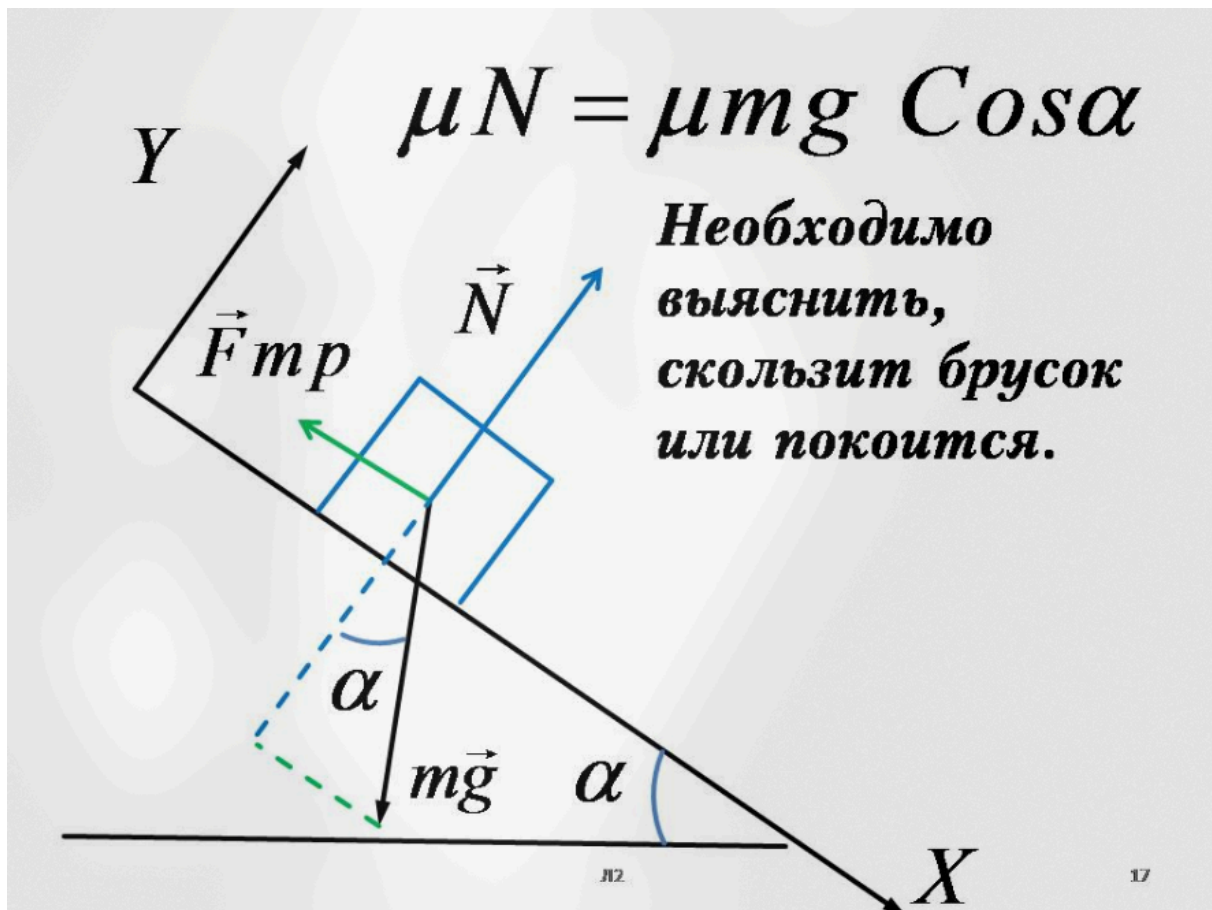
$$F = 1\text{ Н} < \mu mg$$

$$F_{\text{тр. покоя}} = F = 1\text{ Н}.$$

л2

15

Пример. Брусок массой m находится на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ . Вычислите силу трения, действующую на брусок.



Если составляющая силы тяжести, направленная вдоль плоскости,

$$mg \sin \alpha$$

больше максимально возможного значения силы трения покоя, брусок скользит вдоль наклонной плоскости

$$F_{\text{тр. ск.}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

Если

$$mg \sin \alpha < \mu mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр. покоя}} = mg \sin \alpha$$

Сила сопротивления

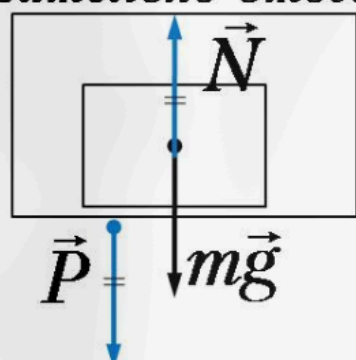
$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}$$

При больших скоростях

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -kv\vec{v}$$

Вес тела. Невесомость.

Вес тела – сила, с которой тело действует на опору или подвес, неподвижные относительно этого тела.



$$|\vec{P}| = |\vec{N}| = 0$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

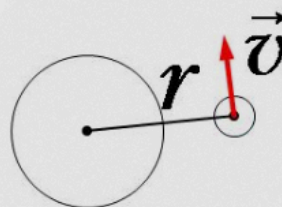
$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

1). Прямолинейное движение:

2). Движение по окружности:

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{r} = G \frac{M_{\text{земли}}}{r^2}$$



21

Второй закон Ньютона — уравнение движения материальной точки.

Основная задача динамики материальной точки

ТОЧКИ		
Известна зависимость	Известны	
$\vec{r}(t), m$	1) m	
	2) Зависимость	$\vec{F}(t)$
	3) Начальные условия	$\vec{r}_0, \vec{v}_0$
Найти	Найти закон движения	$\vec{r}(t), \vec{v}(t)$
$\vec{F}(t)$		

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{суммарн}}}{m}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

Преобразования Галилея.

Начало отсчёта
времени
в
времени,
когда O и O'
совпадают.

$\vec{V}$ - скорость системы отсчёта K' относительно системы отсчёта K .

$t = t'$
 $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$
 $\vec{a}' = \vec{a}$

$$x' = x - V_x t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Покажем, что законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

1. Масса не зависит от скорости, т.е. одинакова во всех инерциальных системах отсчета:

$$m = m'$$

- 2.

$$t = t'; \quad \vec{a} = \vec{a}' \quad \left(\text{т.к.} \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} \right)$$

3. Сила может зависеть от масс взаимодействующих тел, от взаимного расположения тел и от их относительной скорости.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 &= \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 \\ m &= m' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}'$$

Принцип относительности Галилея.

Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Силы инерции

При переходе из инерциальной системы отсчета в неинерциальную ускорения приобретают, в худшем случае, три математические добавки

$$m\vec{a}_{\text{нсо}} = m(\vec{a}_{\text{исо}} + \vec{a}')$$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{взаимодействия}}$$

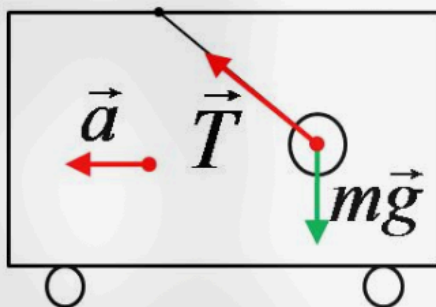
В неинерциальных системах отсчета можно формально сохранить вид II закона Ньютона, если добавить к силам взаимодействия силы инерции.

$$m\vec{a}_{\text{нсо}} = \Sigma \vec{F}_{\text{взаимодействия}} + \Sigma \vec{F}_{\text{инерции}}$$

Поступательная сила инерции:

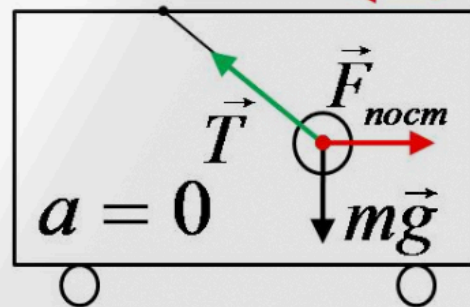
$$\vec{F}_{\text{пост}} = -m \vec{a}_{\text{со}}$$

ИСО – земля



$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

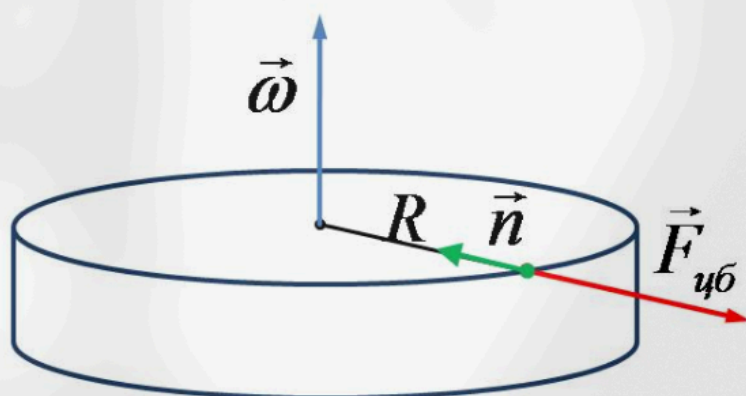
НСО – вагон $\vec{a}_{\text{со}}$



$$0 = \vec{F}_{\text{пост}} + \vec{T} + m\vec{g}$$

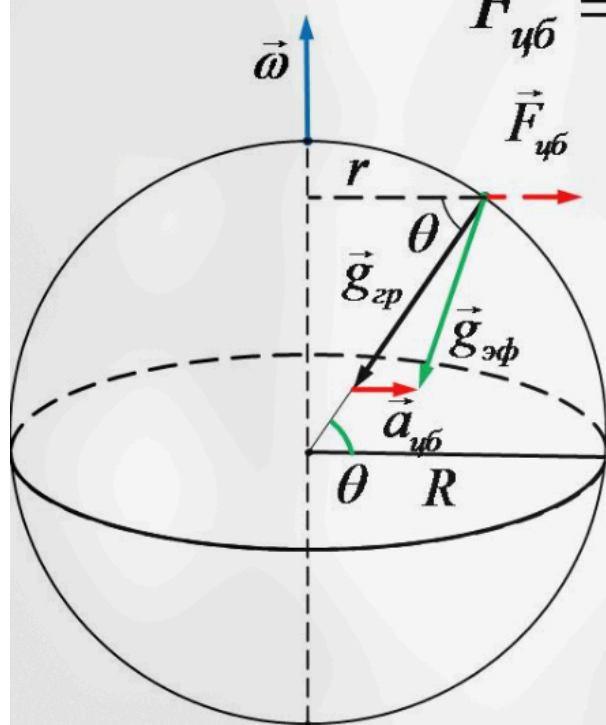
Центробежная сила инерции

$$\vec{F}_{цб} = m \left[[\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{\omega} \right] = -m\omega^2 R \vec{n}$$



Эффективное ускорение свободного падения

$$F_{цб} = m\omega^2 R \cos \theta = m\omega^2 r$$



g гравитационное:

на полюсе - 9,83 м/с²

на экваторе - 9,81

м/с²

g эффективное:

на полюсе - 9,83 м/с²

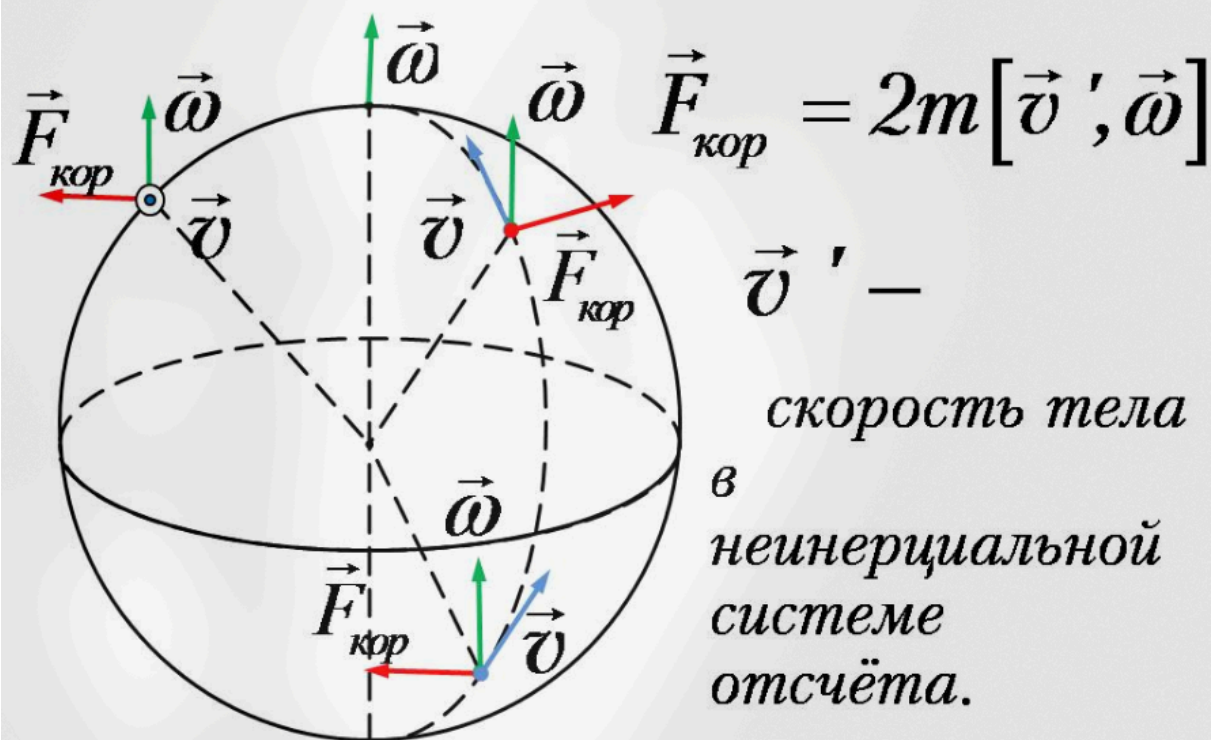
на экваторе - 9,78

м/с²

Среднее значение:

$g_{ср} = 9,81$ м/с²

Кориолисова сила инерции





Лекция 4. Второй закон Ньютона в импульсной форме. Закон сохранения импульса.

Второй закон Ньютона в импульсной форме. Основное уравнение динамики.

Импульс тела:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

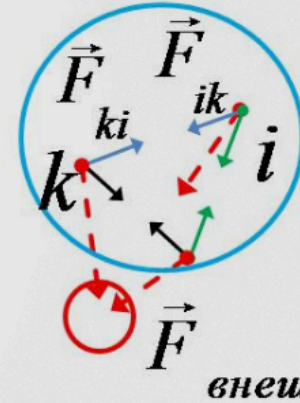
Приращение импульса тела равно импульсу действовавшей на него силы.

$$[\vec{p}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \quad [\vec{F}\Delta t] = \text{Н} \cdot \text{с}$$

Импульс системы частиц

$$\vec{P}_{сист} = \sum_i \vec{p}_i \quad \vec{F}_{ki} \text{ и } \vec{F}_{ik} - \text{внутренние силы}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_k \underbrace{\vec{F}_{ik}}_{\text{внутренние силы}} + \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{внешние силы}}$$



$$\frac{d\vec{P}_{системы}}{dt} = \underbrace{\sum_i \sum_k \vec{F}_{ik}}_{\text{внутр.}} + \sum_i \vec{F}_i \text{ внешн.}$$

III закон Ньютона
 $(\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki})$

**Импульс системы частиц может изменяться
под действием только внешних сил**

Центр масс системы частиц. Закон движения центра масс.

1. Радиус-вектор центра масс: $\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

2. Скорость центра масс:

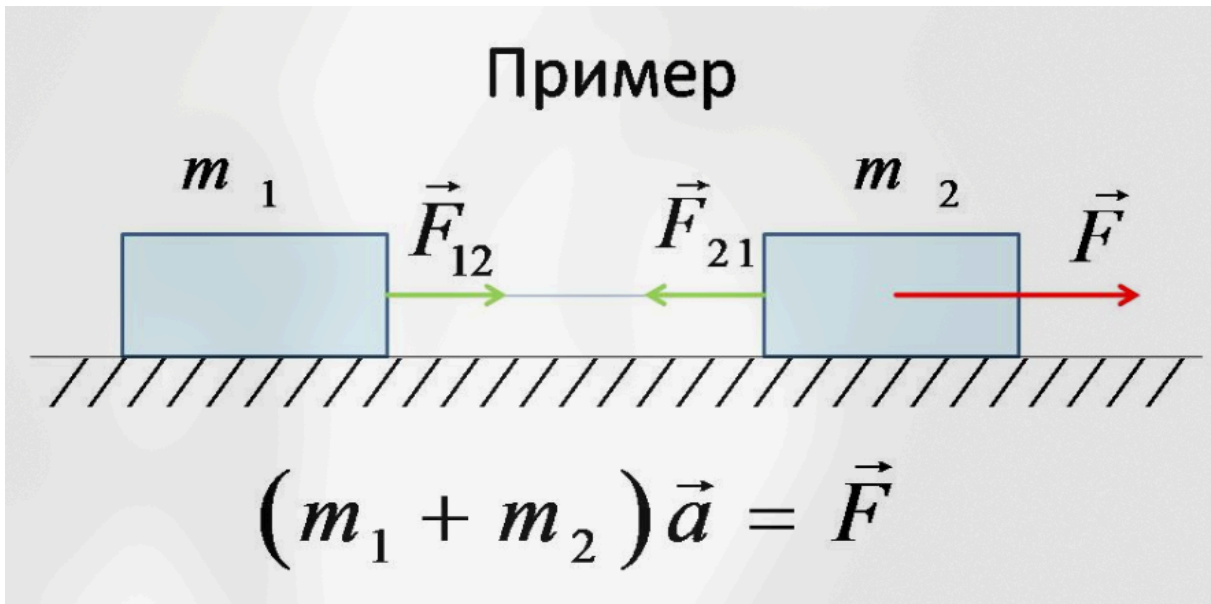
$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}_{системы}}{m_{системы}}$$

3. Закон движения центра масс системы частиц:

$$m_{системы} \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}_{системы}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \text{ внешн.}$$

Центр масс любой системы частиц, движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней была бы приложены все внешние силы.

Пример



Ц – система.

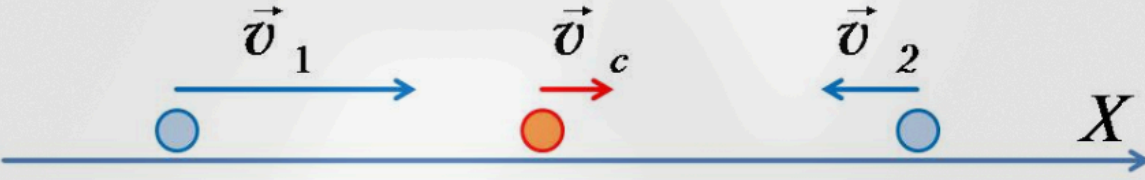
Систему отсчета, жестко связанную с центром масс, называют системой отсчета центра масс или Ц-системой.

Отличительной особенностью Ц-системы является то, что полный импульс системы частиц в ней всегда равен нулю.

$$\vec{v}_c = 0 = \frac{\vec{P}_{\text{системы}}}{m_{\text{системы}}}$$

Для замкнутой системы частиц Ц-система является инерциальной.

Пример. Два электрона сближаются, двигаясь вдоль одной прямой. На какое минимальное расстояние они сближаются, если на очень большом расстоянии друг от друга они имеют скорости $v_1 = 50$ м/с и $v_2 = 20$ м/с.



$$2m\vec{v}_c = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

В Ц - системе $\tilde{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c$ $\tilde{\vec{v}}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c$

$$v_{cx} = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{50 - 20}{2} = 15 \text{ м / с}$$

$$\tilde{v}_{1x} = v_{1x} - v_{cx} = 50 - 15 = 35 \text{ м / с}$$

$$\tilde{v}_{2x} = v_{2x} - v_{cx} = -20 - 15 = -35 \text{ м / с}$$

$$m\frac{\tilde{v}_1^2}{2} + m\frac{\tilde{v}_2^2}{2} + U_\infty = k\frac{e^2}{r_{\min}} + 0$$

В момент максимального сближения электронов их кинетическая энергия в Ц-системе равна нулю.

$$r_{\min} = \frac{ke^2}{m\tilde{v}^2}$$

Закон сохранения импульса

Импульс замкнутой системы частиц не изменяется с течением времени

1. В классической механике закон сохранения импульса является следствием из законов Ньютона:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внешн.}}$$

В замкнутой системе частиц

$$\vec{F}_i^{\text{внешн.}} = 0$$

$$\vec{P}_{\text{системы}} = \text{const}$$

2. Закон сохранения импульса – фундаментальный закон природы.

Закон сохранения импульса можно применять

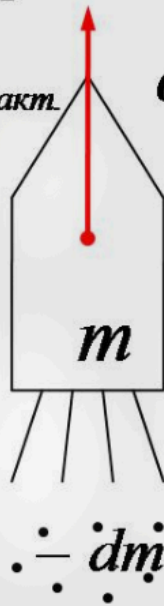
1. Если система частиц замкнута ($\vec{F}_{\text{внешн}} = 0$)

2. Если $\sum_i \vec{F}_i^{\text{внешн}} = 0$
3. Если $\sum_i F_{ix} = 0$, то $p_x = \text{const}$
4. Если кратковременные силы взаимодействия в системе во много раз превосходят по величине внешние силы

Реактивное движение

Скорость системы отсчёта равна скорости ракеты в момент времени $t=0$:

$$\vec{F}_{\text{реакт.}} \quad d\vec{p} = 0 = m d\vec{v} + \underbrace{m_{\text{газ}}}_{-dm} \cdot \vec{v}_{\text{отн}} : dt$$

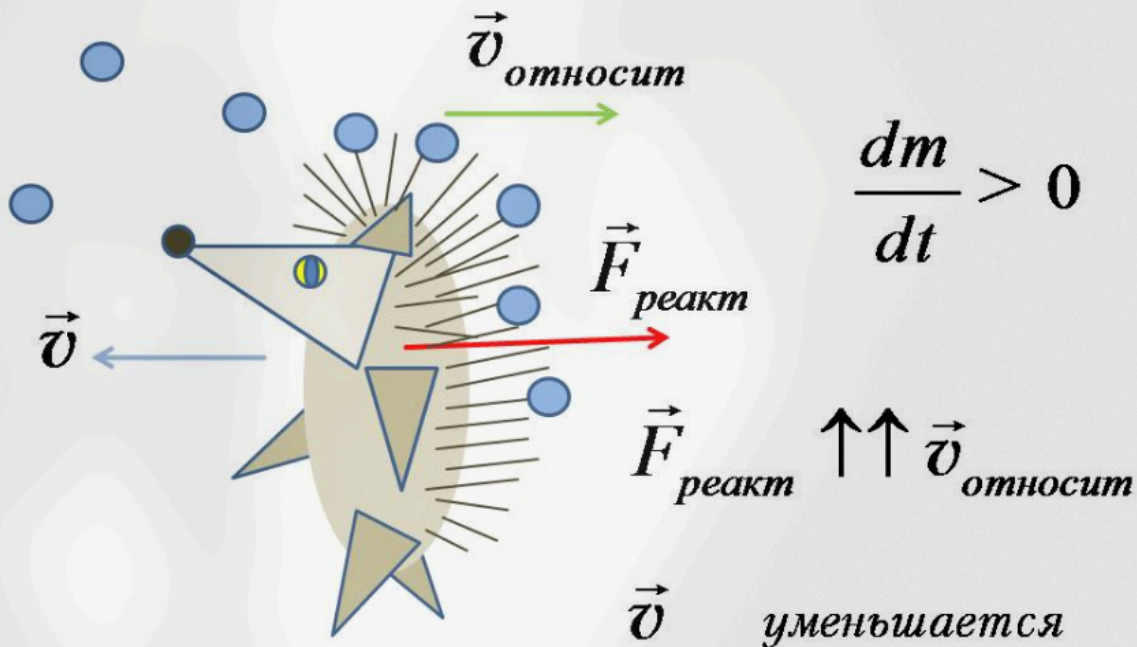


m - масса ракеты

$\vec{v}_{\text{отн}}$ - скорость газа относительно ракеты

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{F}_{\text{реактивная}}$$

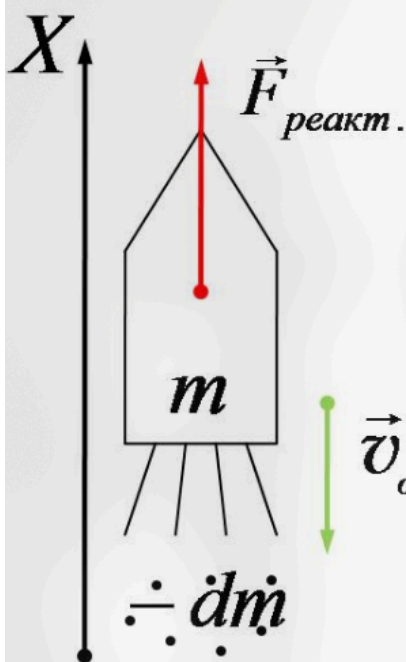
Пример. Ёжик в тумане.



Л2

14

Формула Циолковского



$$m d\vec{v} = dm \cdot \vec{v}_{\text{отн}}$$

$$Ox : dv = -v_{\text{отн}} \left(\frac{dm}{m} \right)$$

$$v = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + \text{const}$$

Начальные условия:

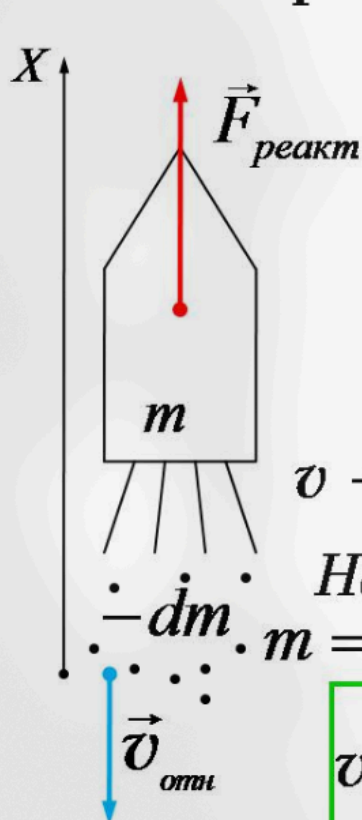
при $m = m_0$; $v = 0$

$$0 = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + v_{\text{отн}} \cdot \ln m_0$$

$$v = v_{\text{отн}} \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}$$

Уравнение Мещерского



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{реакт}} + \vec{F}_{\text{внешн}}$$

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} - mg$$

$$m \cdot d(v + gt) = -v_{\text{отн}} \cdot dm$$

$$v + gt = -v_{\text{отн}} \cdot \ln m + \text{const}$$

Начальные условия:

$$m = m_0; v = 0 \Rightarrow \text{const} = v_{\text{отн}} \ln m_0$$

$$v = v_{\text{отн}} \cdot \ln \frac{m_0}{m} - gt$$

Лекция 5. Работа. Мощность. Энергия.

Элементарная механическая работа



$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F_\tau dl$$

F_τ - проекция силы на направление
перемещения точки её приложения

$$[A] = \text{Дж}$$

Элементарной работой δA силы $\vec{F}$ на малом перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение $\vec{F}$ на $d\vec{r}$.

Работой A , совершаемой силой $\vec{F}$ на конечном участке траектории точки ее приложения, называется алгебраическая сумма элементарных работ этой силы на всех малых частях этого участка.

Полная механическая работа

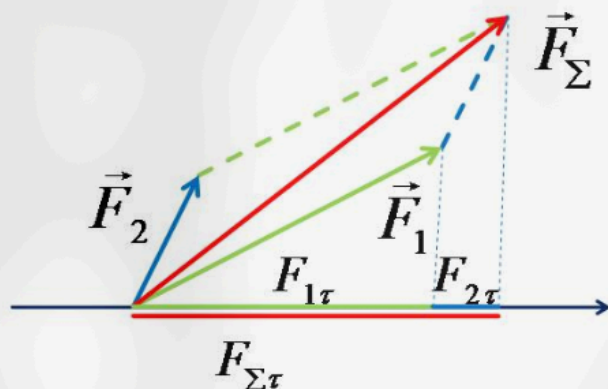
$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_\tau dl$$

Материальная точка движется вдоль оси Ox . Вычислим работу действующей на неё силы по графику зависимости $F_x(x)$.



$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Сумма работ всех сил,
приложенных к телу, равна
работе равнодействующей.



$$\delta A = F_{\Sigma\tau} dl = (F_{1\tau} + F_{2\tau}) dl = \delta A_1 + \delta A_2$$

Мгновенная мощность силы

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = F_{\tau} \cdot v$$

$$[N] = \text{Вт}$$

Мощностью (мгновенной мощностью) силы называется скалярная физическая величина N , равная отношению элементарной работы этой силы δA к малому промежутку времени dt , в течение которого эта работа совершается.

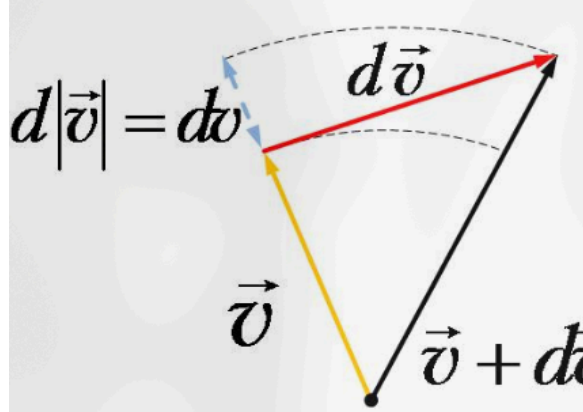
Средняя мощность силы

Средней мощностью силы в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется физическая величина $N_{\text{ср}}$, равная отношению работы A , совершаемой этой силой за промежуток времени Δt к его продолжительности.

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t}$$

Кинетической энергией тела называется энергия его механического движения.

Теорема о кинетической энергии



$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}$$

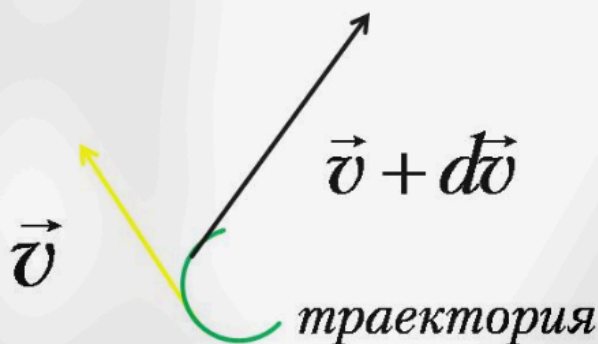
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m d\vec{v}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\delta A = m d\vec{v} \vec{v}$$

$$d\vec{v} \vec{v} = d|\vec{v}| v = dv \cdot v$$

Рисунок для тех, кто не понял, как движется точка.



$$\delta A = mv dv$$

$$A = \int_I^{\mathbb{I}} mv \, dv = \frac{mv_{\mathbb{I}}^2}{2} - \frac{mv_I^2}{2} = \Delta E_K$$

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

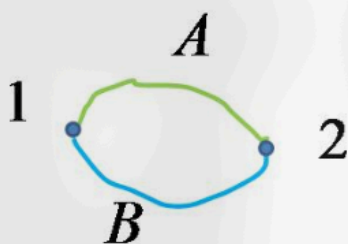
Сумма работ всех сил, приложенных к телу, равна приращению кинетической энергии тела.

Консервативные силы.

Стационарным называют поле, остающееся постоянным во времени.

Консервативными называют силы, работа которых при перемещении частицы из одной точки в другую не зависит от пути между этими точками.

Силы поля являются консервативными, если в стационарном случае их работа на любом замкнутом пути равна нулю.



$$A_{1A2} = A_{1B2}$$

$$A_{2B1} = -A_{1B2}$$

$$A_{\text{замкн}} = A_{1A2} + A_{2B1} = 0$$

Диссипативными называются силы, суммарная работа которых при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна.

Гироскопическими называются силы, зависящие от скорости материальной точки, на которую они действуют, и направленные перпендикулярно к этой скорости. (Эти силы не могут совершать работы.)

Центральные силы

Центральными называют силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами, и направленные по прямой, проходящей через эти частицы.

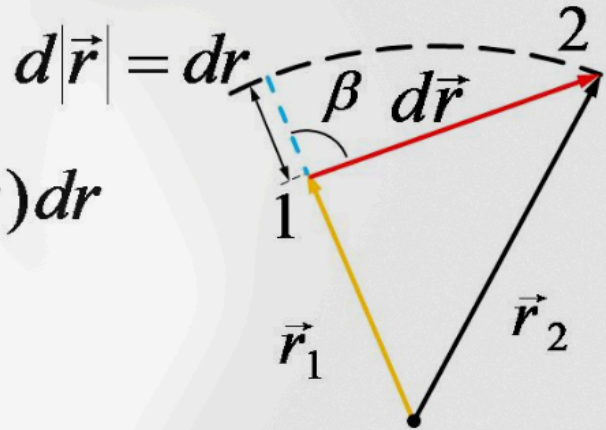
$$\vec{F} = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Все центральные силы являются консервативными

$$\vec{F} = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \pm F(r) dr$$

$$A = \pm \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$

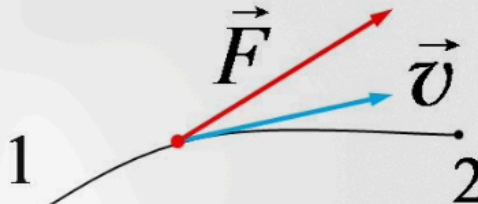


Полученное выражение зависит только от вида функции $F(r)$ (характер взаимодействия) и от начального r_1 и конечного r_2 расстояния от частицы до силового центра и не зависит от пути.

Потенциальной энергией частицы называется энергия зависящая от ее положения в потенциальном поле.

Потенциальной энергией системы частиц называется часть энергии механической системы, зависящая только от ее конфигурации, т.е. от взаимного расположения всех частиц системы и от их положения во внешнем потенциальном поле.

Потенциальная энергия частицы в поле

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r}$$


Поскольку работа консервативной силы не зависит от пути, а зависит только от начальных и конечных координат частицы, существует скалярная функция координат, такая, что работа равна разности значений этой функции.

Потенциальная энергия. $U = U(\vec{r})$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Работа сил поля на пути 1-2 равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле. Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной (не зависящей от $\vec{r}$) постоянной.

Потенциальная энергия и сила поля.

$$-dU = \delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_{\tau} dl$$

$F_{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial l}$ Знак частной производной указывает на то, что производная берется по определенному направлению

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } U = -\nabla U$$

Векторный дифференциальный оператор набла

$$\nabla C = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)C = \text{grad } C$$

Напряженность и потенциал силового поля.

Выделим величину, характеризующую частицу, находящуюся в силовом поле (q, m) . Останутся величины, характеризующие само поле – напряженность и потенциал.

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad U = q\varphi$$

$\vec{E}$ – силовая характеристика поля

φ – энергетическая характеристика поля

Связь напряженности и потенциала

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } \varphi$$

Напряженность поля направлена в сторону наибо́льшего убывания его потенциала.

$$E_\tau = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0$$

Линии напряженности направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

Силовое поле можно задать двумя способами:

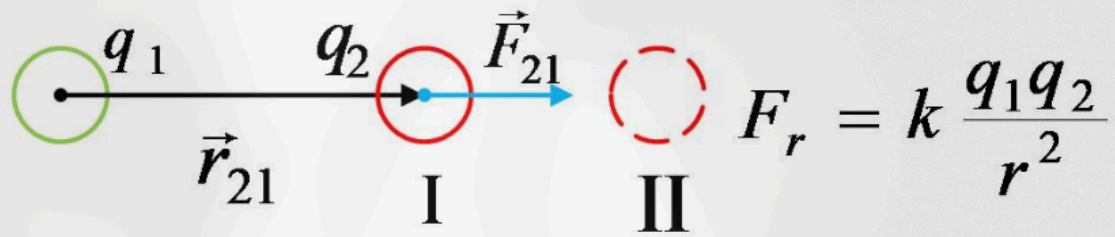
1. Указать значение потенциала в каждой точке

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } \varphi$$

2. Указать значение напряженности в каждой точке

$$\varphi = - \int E_r dr$$

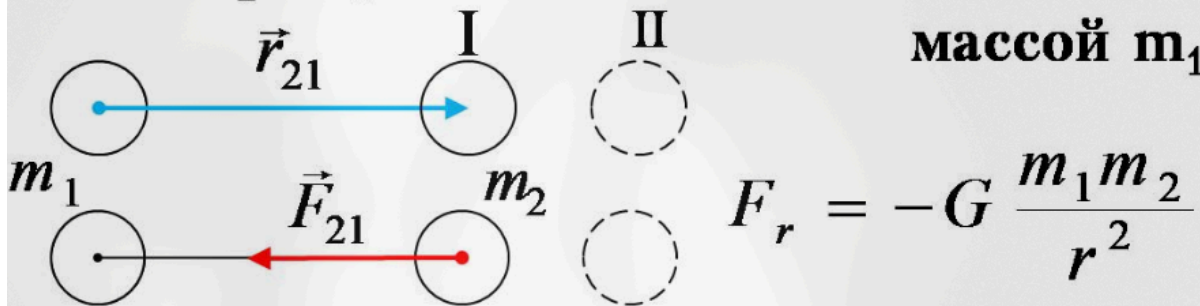
Потенциальная энергия заряда q_2 в электрическом поле заряда q_1



$$A = \int_{r_I}^{r_{II}} k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k \frac{q_1 q_2}{r_I} - k \frac{q_1 q_2}{r_{II}} = U_I - U_{II}$$

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r} + const \quad \varphi_1 = k \frac{q_1}{r} + const$$

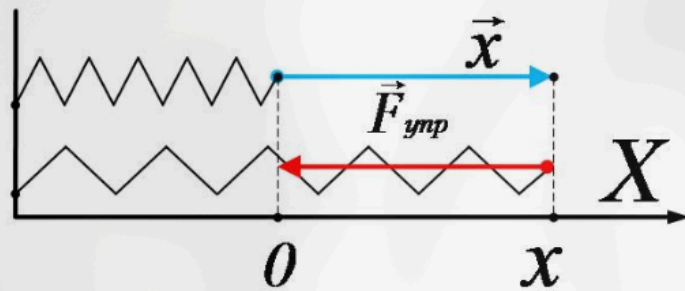
Потенциальная энергия частицы массой m_2 в гравитационном поле частицы массой m_1



$$A = - \int_{r_I}^{r_{II}} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G \frac{m_1 m_2}{r_I} - (-G \frac{m_1 m_2}{r_{II}}) = U_I - U_{II}$$

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r} + const \quad \varphi_1 = -G \frac{m_1}{r} + const$$

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

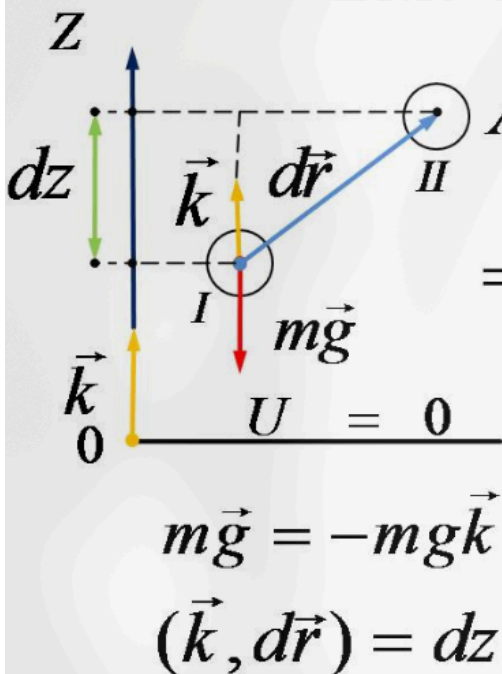


$$F_x = -kx$$

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = k \frac{x_1^2}{2} - k \frac{x_2^2}{2} = U_I - U_{II}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести



$$A = - \int_I^{II} mg \vec{k} d\vec{r} = - \int_{z_I}^{z_{II}} mg dz =$$

$$= mgz_I - mgz_{II} = U_I - U_{II}$$

$$U = mgz + const$$

$$\varphi = gz + const$$

Полная механическая энергия частицы в поле

Полной механической энергией частицы в поле называют сумму ее кинетической и потенциальной энергии.

$$E_{\text{полн. мех.}} = E_K + U$$

$$\Delta E_K = A_{\text{консервативных сил}} + A_{\text{сторонних сил}}$$

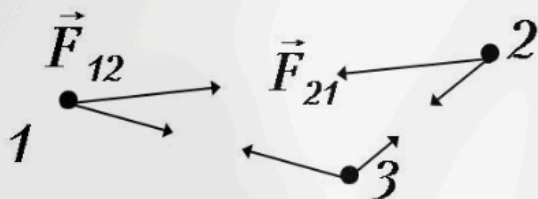
$$A_{\text{конс.}} = -\Delta U$$

$$\Delta E_{\text{полн. мех.}} = \Delta(E_K + U) = A_{\text{сторонних сил}}$$

Приращение **полной механической энергии** частицы на некотором пути равно алгебраической сумме работ всех **сторонних сил**, действующих на частицу на этом пути.



Собственная потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц



$$U_{\text{соб}} = \frac{1}{2} \sum_i U_i$$

$$U_{\text{соб}} = \frac{U_{12} + U_{21}}{2} + \frac{U_{13} + U_{31}}{2} + \frac{U_{23} + U_{32}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} [(U_{12} + U_{13}) + (U_{21} + U_{23}) + (U_{31} + U_{32})] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i U_i$$

Здесь U_i — потенциальная энергия взаимодействия i частицы со всеми остальными частицами системы

Собственная механическая энергия системы взаимодействующих частиц

$$E_{\text{собств}} = E_K + U_{\text{собств}}$$

Собственной механической энергией системы взаимодействующих частиц называют сумму ее кинетической и собственной потенциальной энергии.

$$\Delta E_K \text{ системы} = A_{\text{внешних консервативных и неконсервативных сил}} + A_{\text{консервативных внутренних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$

$$A_{\text{консервативных внутренних сил}} = -\Delta U_{\text{соб.}}$$

$$\Delta(E_K + U_{\text{соб}}) = A_{\text{внешних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$

Закон сохранения собственной механической энергии:

Собственная механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой нет диссипативных сил, сохраняется в процессе движения.

Если в замкнутой системе частиц действуют диссипативные силы:

$$\Delta E_{\text{собств}} = A_{\text{диссипативных внутренних сил}} < 0$$

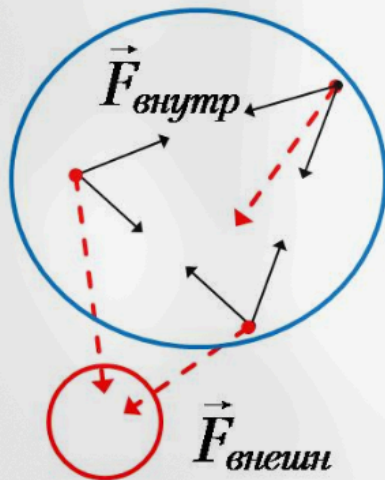
Часть собственной механической энергии переходит во внутреннюю.

Универсальный закон сохранения энергии

Энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи.

**Полная механическая энергия системы
взаимодействующих частиц во внешнем поле
консервативных сил**

$$\Delta(E_{\text{соб}} + U_{\text{внешн}}) = A_{\text{сторонних внешних сил}} + A_{\text{диссипативных внутренних сил}}$$



Закон сохранения полной механической энергии системы, находящейся во внешнем поле консервативных сил: если на систему частиц не действуют внешние сторонние силы и нет внутренних диссипативных сил, то полная механическая энергия системы остаётся постоянной.

Теория соударений.

Ударом называется столкновение тел, при котором за весьма малый промежуток времени происходит значительное изменение скоростей тел.

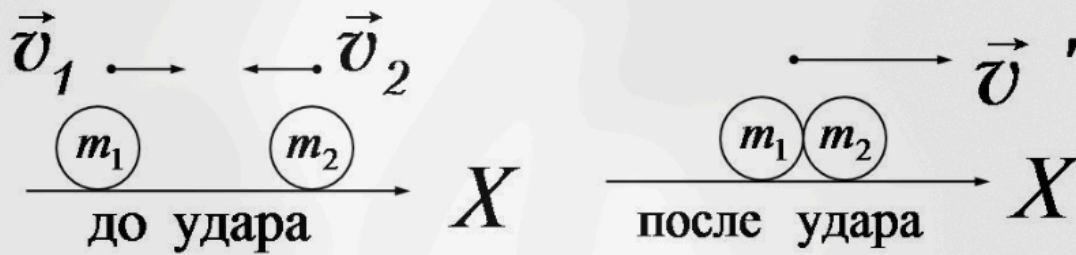
Линией удара называется общая нормаль, проведенная к поверхностям двух соприкасающихся тел в месте их соприкосновения при ударе.

Удар называется **центральный**, если в момент удара центры масс сталкивающихся тел находятся на линии удара.

Удар двух тел называется **абсолютно упругим**, если при этом ударе полная механическая энергия системы не изменяется.

Удар двух тел называется **абсолютно неупругим**, если после удара оба тела движутся как одно целое.

Абсолютно неупругий удар



Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}'$$

Часть полной механической энергии системы переходит во внутреннюю:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} + Q$$

Скорость центра масс системы не изменяется:

$$\vec{v}'_c = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_c$$

В системе отсчета, связанной с центром масс.

$$\tilde{v}_1 = v_1 - v_c = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad \tilde{v}_2 = \frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

До удара $\tilde{p}_1 = -\tilde{p}_2$, после удара $\tilde{p}' = 0$

Закон сохранения импульса: $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = 0$

Суммарная кинетическая энергия частиц целиком переходит во внутреннюю:

$$\frac{m_1 m_2^2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2 = Q$$

Абсолютно упругий удар



Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (1)$$

Закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (2)$$

$$m_1 v_{1x} - m_1 v_{1x}' = m_2 v_{2x}' - m_2 v_{2x} \quad (3)$$

$$m_1 (v_{1x}^2 - v_{1x}'^2) = m_2 (v_{2x}'^2 - v_{2x}^2) \quad (4)$$

$$v_{1x} + v_{1x}' = v_{2x}' + v_{2x} \quad (5)$$

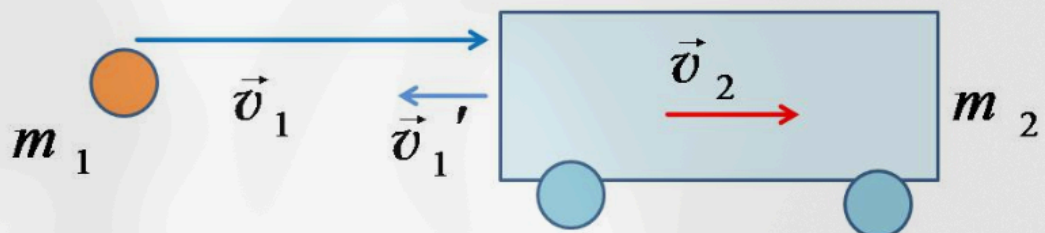
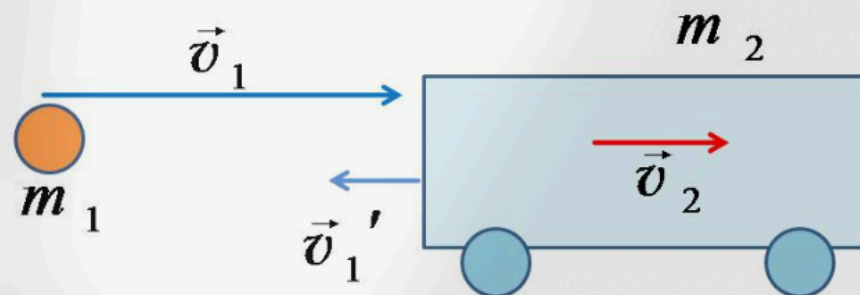
Из уравнений (3) и (5) определяем:

$$v_{1x}' = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2x}' = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

Пример. Мяч, летящий со скоростью $\vec{v}_1$ ударяется о вагон, движущийся в том же направлении со скоростью $\vec{v}_2$. Вычислите скорость мяча относительно земли после удара.

$$v_1 = 8 \text{ м / с}, v_2 = 3 \text{ м / с}.$$



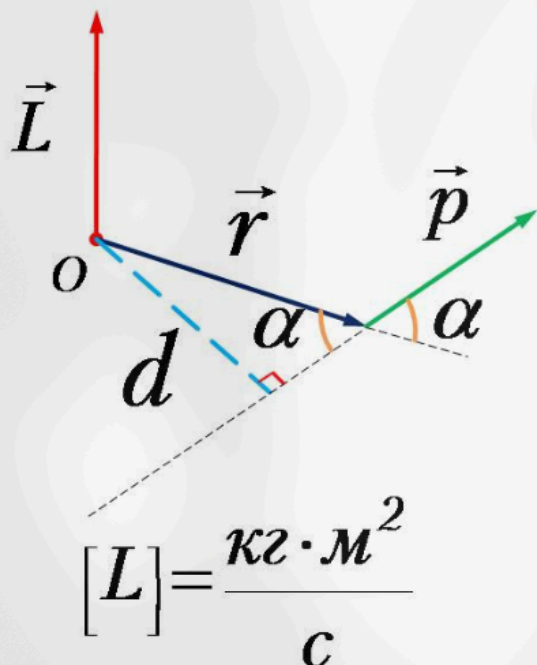
$$v_{1x}' = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2} \approx$$

$$\approx 2v_{2x} - v_{1x} = -2 \text{ м / с}$$

$$v_{1x}' - v_{2x} = -(v_{1x} - v_{2x})$$

Скорость мяча относительно вагона до удара равна по модулю скорости мяча относительно вагона после удара

Момент импульса частицы относительно точки



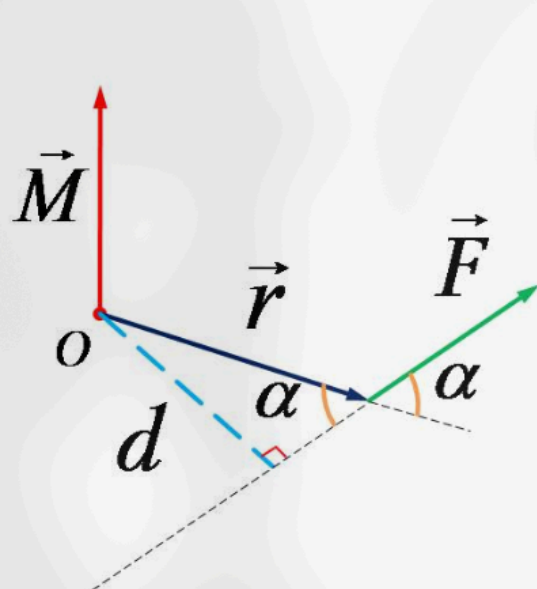
$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$|\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}) = p \cdot d$$

d – плечо импульса $\vec{p}$ относительно точки O .

2

Момент силы относительно точки



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$|\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{F}}) = F \cdot d$$

d – плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O .

$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$$

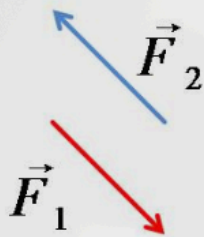
3

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v}, \vec{p}] + [\vec{r}, \vec{F}]$$

Закон динамики вращения частицы вокруг точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Пара сил



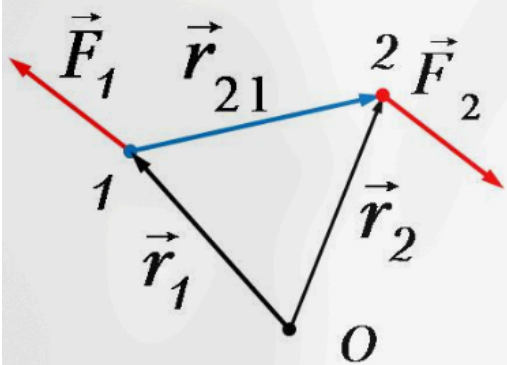
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Две параллельные силы, равные по модулю и противоположные по направлению, образуют **пару сил**.

Это вспомогательное определение, поэтому встречаются разночтения- в учебнике Савельева И.В. силы, образующие пару, **не должны быть направлены вдоль одной прямой**.

Момент пары сил

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

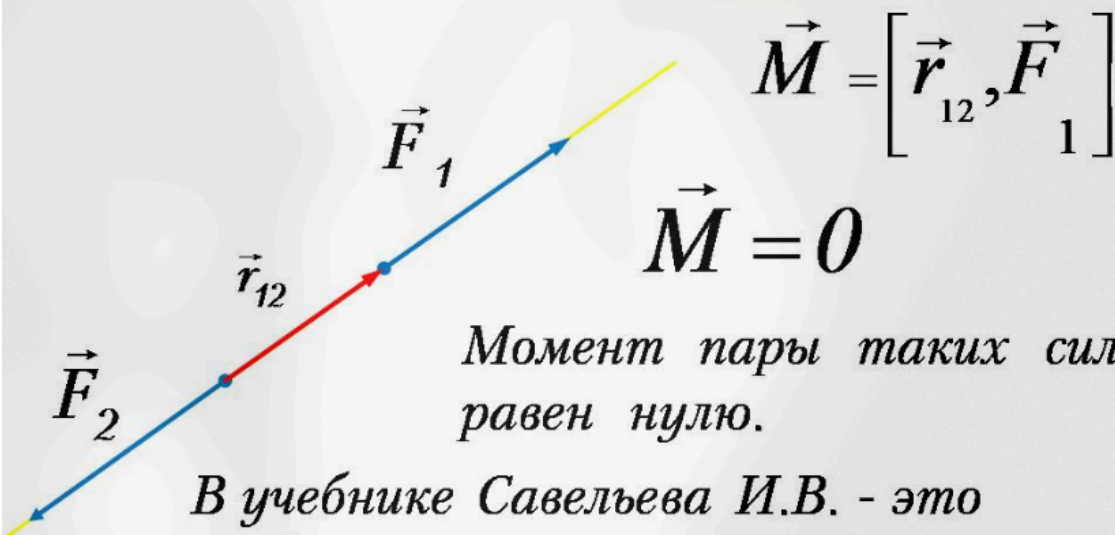


$$\begin{aligned}\vec{M} &= [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = \\ &= [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_1] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \vec{F}_2] = \\ &= [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1] = [\vec{r}_{21}, \vec{F}_2]\end{aligned}$$

1) Момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой.

2) Величина момента пары сил не зависит от положения точки начала отсчёта O . ⁶

Если силы направлены вдоль одной прямой



$$\vec{M} = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1]$$

$$\vec{M} = 0$$

Момент пары таких сил равен нулю.

В учебнике Савельева И.В. - это вообще не пара сил. Но момент равен нулю, а остальное не важно. ⁷

$$\vec{L}_{\text{системы}} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{\text{внутренних сил}} + \sum_i \vec{M}_{\text{внешних сил}} = \sum_i \vec{M}$$

По 3 закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$

Внутренние силы направлены вдоль одной прямой. Их $\vec{M}_{\Sigma} = 0$

Вращение твердого тела вокруг точки

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

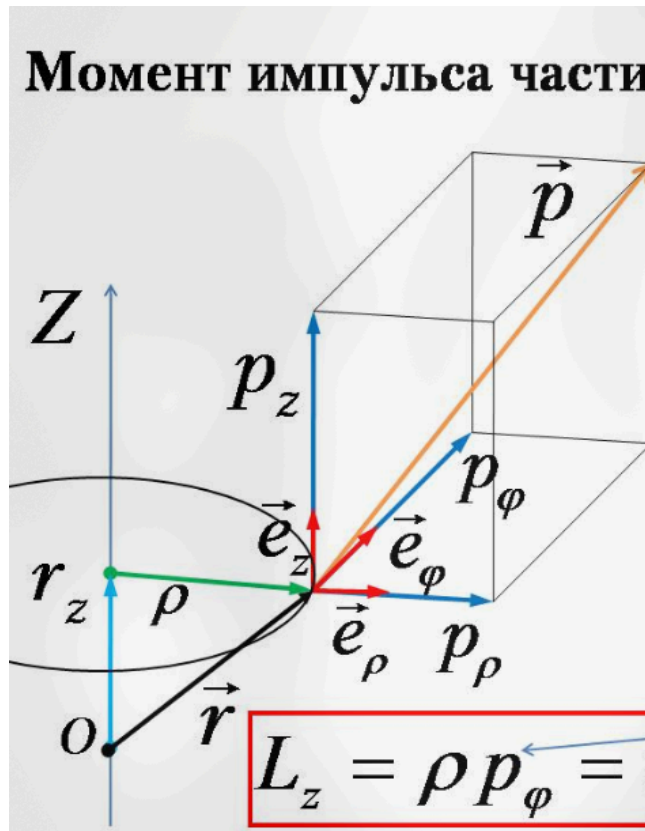
Закон динамики вращательного движения.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{\text{внешних сил}}$$

Момент импульса частицы относительно оси.

Момент импульса частицы относительно оси равен проекции момента импульса частицы относительно любой из точек оси на эту ось.

Момент импульса частицы относительно оси



$$\vec{r} = \rho \vec{e}_{\rho} + r_z \vec{e}_z$$

$$\vec{p} = p_{\rho} \vec{e}_{\rho} + p_{\phi} \vec{e}_{\phi} + p_z \vec{e}_z$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{\rho} & \vec{e}_{\phi} & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & r_z \\ p_{\rho} & p_{\phi} & p_z \end{vmatrix}$$

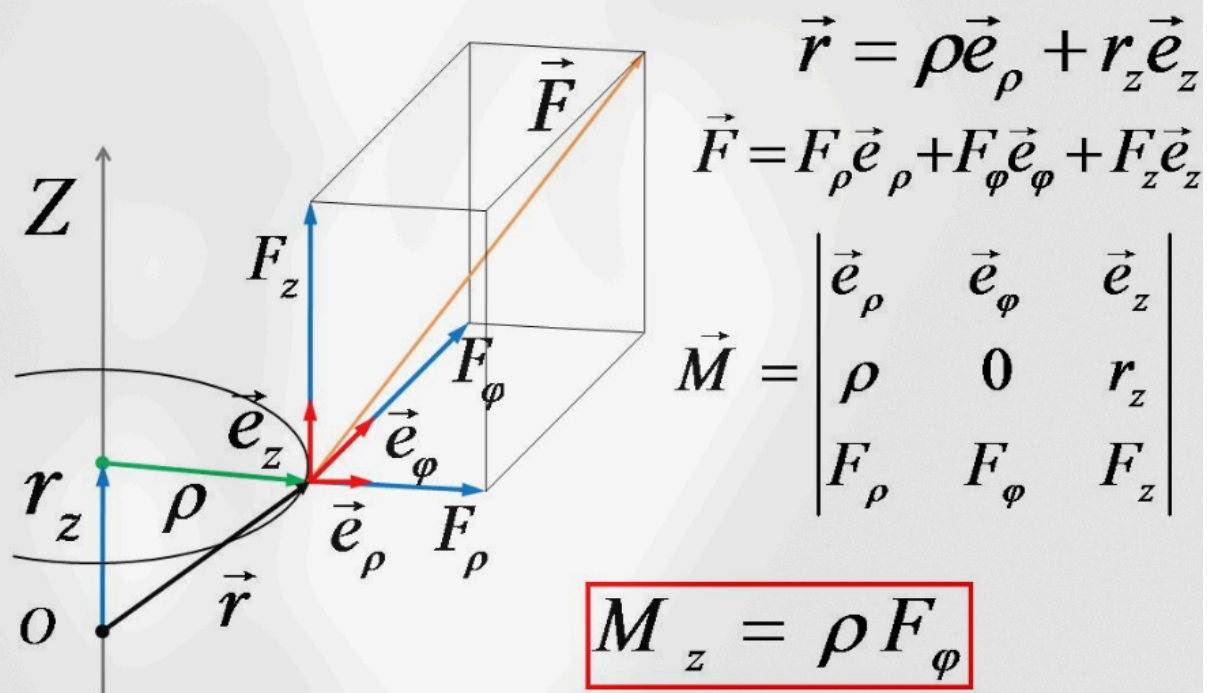
$$L_z = \rho p_{\phi} = m \rho^2 \omega_z$$

$$v_{\phi} = \rho \omega_z$$

Момент силы, действующий на частицу, относительно оси.

Момент силы относительно оси равен проекции момента силы относительно любой из точек оси на эту ось.

Момент силы, действующий на частицу, относительно оси.



При вращении материальной точки вокруг неподвижной оси

$$L_z = \rho p_\phi = m \rho^2 \omega_z \quad M_z = \rho F_\phi$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \rho \frac{dp_\phi}{dt} = \rho F_\phi = M_z$$

2 Закон Ньютона

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= m \rho^2 \frac{d\omega_z}{dt} = \\ &= m \rho^2 \varepsilon_z = M_z \end{aligned}$$

Основной закон динамики вращательного движения.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Полученные выше уравнения справедливы для каждой из точек твердого тела. Но необходимо помнить о том, что внутренние сил (силы

взаимодействия частей тела) образуют пары. Моменты пар внутренних сил равны нулю. Момент импульса твердого тела может изменяться под действием только внешних сил.

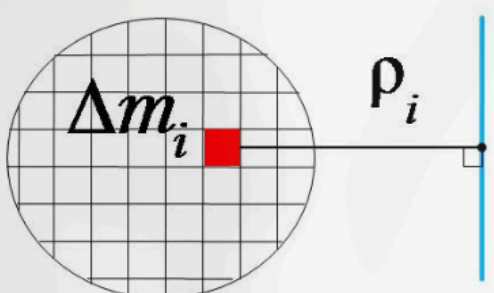
Для каждой из точек твердого тела закон динамики вращательного движения

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad m\rho^2\varepsilon_z = M_z$$

Для всех точек твердого тела значения ω_z и ε_z одинаковы.

Произведения $m\rho^2$ для всех точек различны. Просуммируем эти значения для всех точек твердого тела (получим момент инерции), тогда можно будет записать закон динамики вращательного движения для всего твердого тела.

Момент инерции твёрдого тела



Момент инерции твёрдого тела равен сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояния до оси вращения.

$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot \rho_i^2$$

$$I = \int_M \rho^2 \cdot dm$$

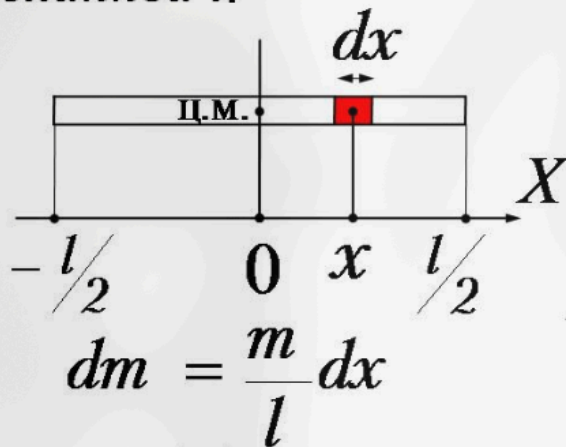
$$I = \int_V \tilde{\rho}_{\text{плотн}} \rho^2 dV$$

17

I_0

Центральный момент инерции момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Пример: Вычислим I_0 стержня массой m и длиной l .



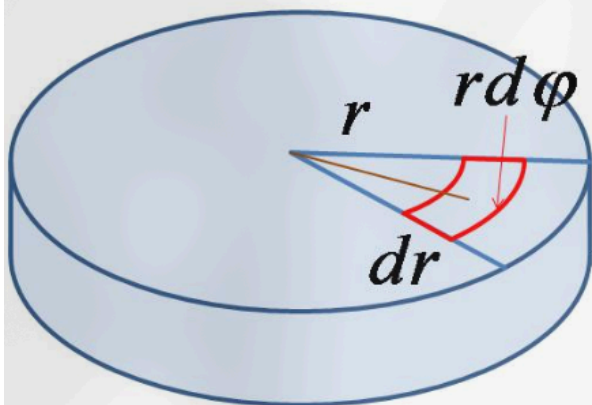
$$I = \int_M \rho^2 \cdot dm$$

$$I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx =$$

$$\frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m l^2}{12}$$

19

Пример: Вычислим I_0 диска массой m и радиусом R .



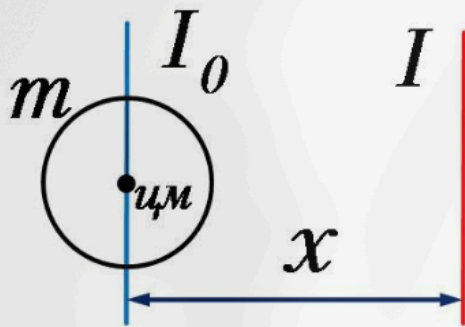
$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r d\phi dr$$

$$I_0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{m}{\pi R^2} r^3 d\phi dr$$

$$I_0 = \frac{2\pi m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{m R^2}{2}$$

20

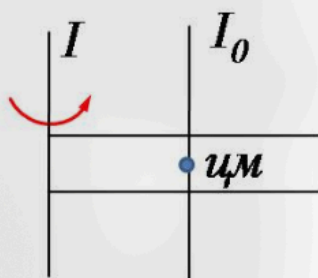
Теорема Штейнера



$$I = I_0 + mx^2$$

Момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме центрального момента инерции относительно параллельной оси и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пример: Вычислим I стержня массой m и длиной l при вращении его относительно оси, проходящей через его конец.



$$I = I_0 + mx^2$$

Центральный
момент
инерции

$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

$$I = I_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Центральные моменты инерции

Стержень массой m и длиной l



$$I_0 = \frac{ml^2}{12}$$

Диск (цилиндр) массой m и радиусом R



$$I_0 = \frac{mR^2}{2}$$

Шар массой m и радиусом R



$$I_0 = \frac{2mR^2}{5}$$

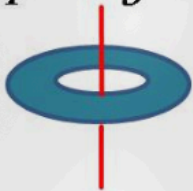
23

Тонкое кольцо массой m и радиусом R



$$I_0 = mR^2$$

Широкое кольцо массой m с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 .

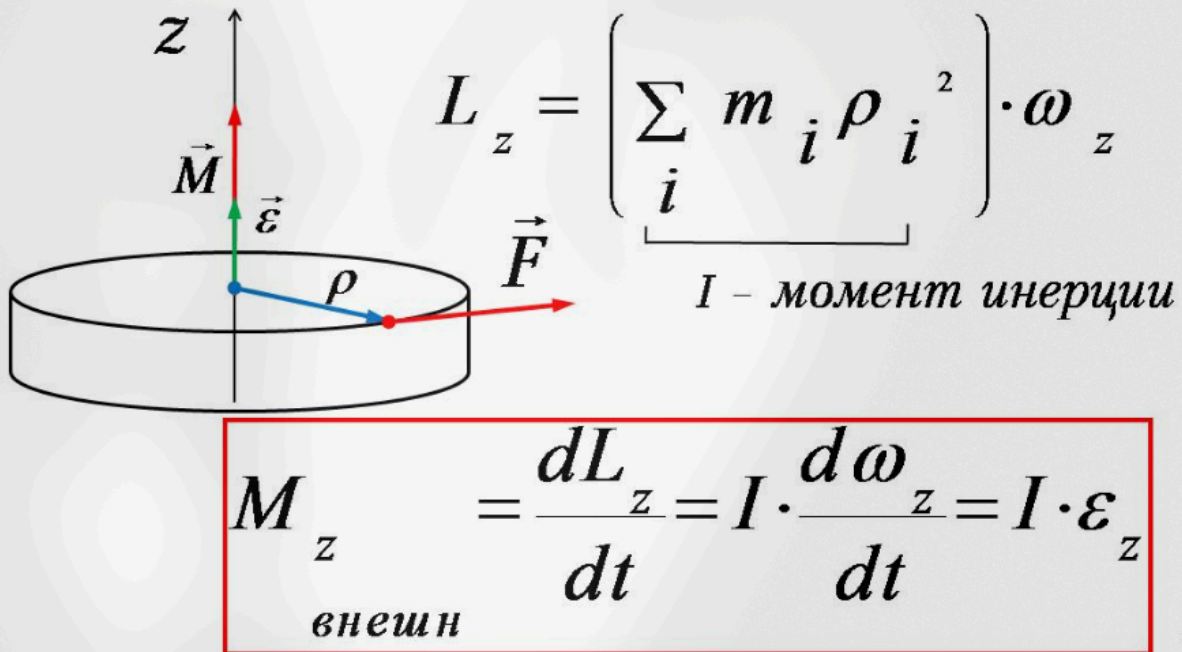


$$I_0 = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr d\varphi$$

$$I_0 = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

24

Закон динамики вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



25

Закон динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси связывает скалярные величины.

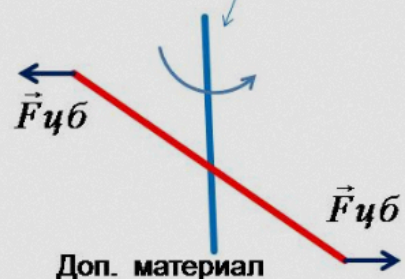
$$M_{z_{\text{внешн}}} = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

Однако, для каждого твердого тела есть особые оси (они называются главными) при вращении относительно которых тот закон можно записывать в векторном виде. (Просто L_z направлен вдоль оси вращения.)

Для любого твёрдого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, направление которых в пространстве остаётся неизменным без действия на них каких-либо внешних сил – главные оси. (Другие оси нужно удерживать) В простейших случаях это оси симметрии тела.

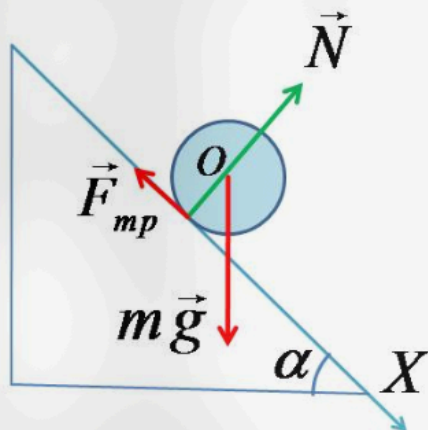
Для главных осей:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad \vec{M}_{\text{внешн}} = I \cdot \vec{\epsilon}$$



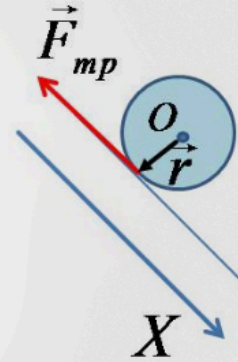
Вы будете решать самые простые задачи только про вращение твердых тел вокруг их главных осей, поэтому не удивляйтесь, если увидите в учебнике этот закон записанным в векторном виде.

Пример. Цилиндр массой m и радиусом R скатывается с горки, составляющей угол α с горизонтом. Вычислите ускорение цилиндра.



Будем рассматривать вращение вокруг оси, проходящей через центр масс O . Отличен от нуля только момент силы трения.

1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z , проходящую через O и направленную за плоскость рисунка.



$$I_0 \varepsilon = R F_{mp} \quad \frac{mR^2}{2} \varepsilon = R F_{mp} \quad (1)$$

2) Закон динамики поступательного движения центра масс. В проекции на ось X .

$$ma = mg \sin \alpha - F_{mp} \quad (2)$$

30

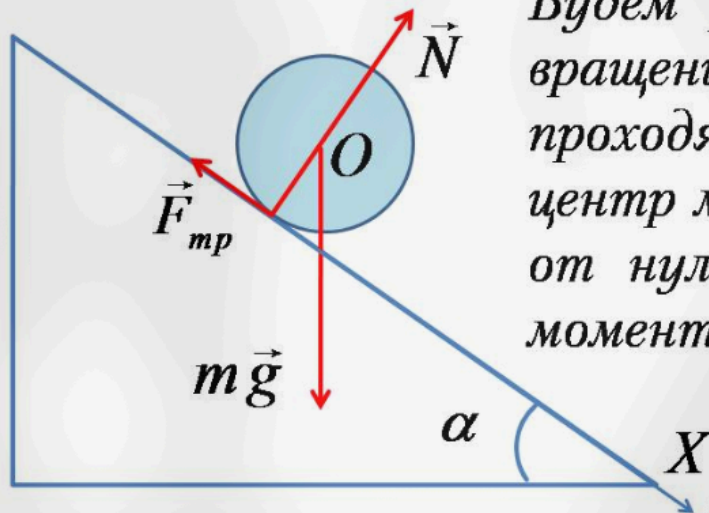
3. Связь линейного и углового ускорений.

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1) и (3) $\frac{ma}{2} = F_{mp} \quad (4)$

Из (2) и (4) $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$

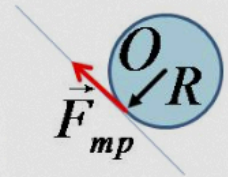
Пример: Цилиндр массой m и моментом инерции I_0 скатывается с горки длиной S , составляющей угол α с горизонтом. Вычислите время скатывания.



Будем рассматривать вращение вокруг оси, проходящей через центр масс O . Отличен от нуля только момент силы трения.

32

1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z , проходящую через точку O и направленную за плоскость рисунка.



$$I_0 \varepsilon = R F_{tr} \quad (1)$$

2) Закон динамики поступательного движения центра масс. В проекции на ось X .

$$m a = m g \sin \alpha - F_{tr} \quad (2)$$

3) Связь линейного и углового ускорений.

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

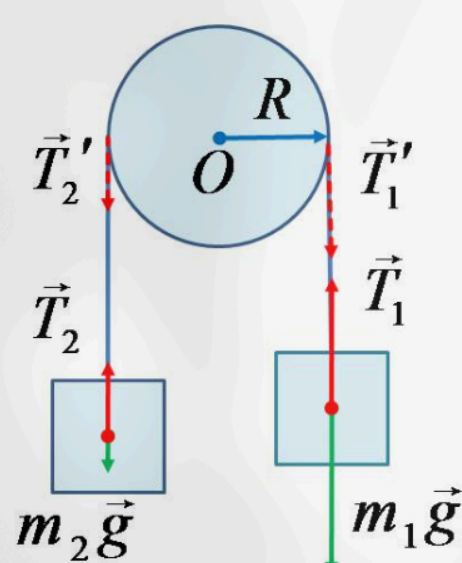
33

Из (1), (2) и (3)

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I_0}{R^2}} \quad t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$$

Чем больше момент инерции цилиндра, тем больше время скатывания.

Пример. Грузы массами m_1 и m_2 связаны нитью, перекинутой через блок массой m и радиусом R . Вычислите ускорение грузов и силы натяжения нитей.



1) Закон динамики вращательного движения. В проекции на ось Z, проходящую через точку O и направленную за плоскость рисунка.

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$(T_1' - T_2')R = I\varepsilon \quad (1)$$

2. Закон динамики поступательного движения грузов. В проекции на ось X.

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = -m_2 g + T_2$$

3. Связь линейного и углового ускорений.

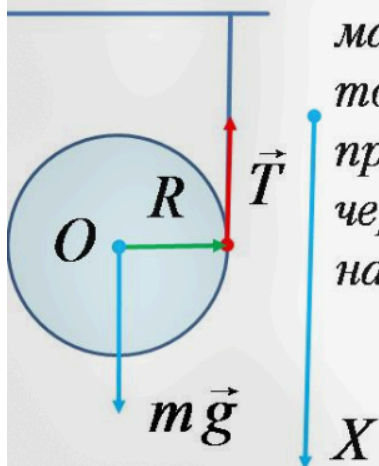
$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3).

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} \quad (4)$$

Из (2) и (4) определяем T_1 и T_2 .

Пример. На цилиндр, массой m и радиусом R намотана нить. Конец нити закреплён на потолке. Определите ускорение, с которым цилиндр будет опускаться.



1) Закон динамики вращательного движения. Относительно центра масс вращающий момент создаёт только сила натяжения нити T проекции на ось Z , проходящую через точку O и направленную к нам.

$$M = I\varepsilon \quad (1)$$

38

$$TR = \frac{mR^2}{2}\varepsilon \quad (1)$$

2. Закон динамики поступательного движения цилиндра. В проекции на ось X .

$$ma = mg - T \quad (2)$$

3. Связь линейного и углового ускорений.

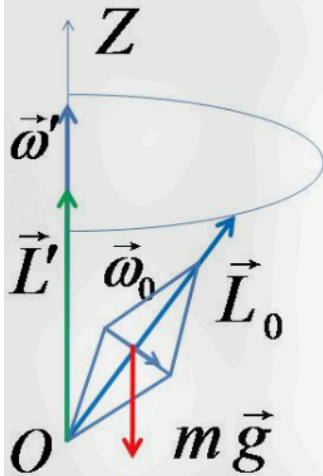
$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

Из (1) и (3). $T = \frac{ma}{2} \quad (4)$

Из (2) и (4). $a = \frac{2}{3}g$

Теория гироскопа.

Гироскопом называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вокруг своей оси симметрии, называемой осью фигуры гироскопа. Обычно одна из точек оси фигуры закреплена. (Точка O)



$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}' \approx \vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}_0$$

$\vec{L}_0$ - момент импульса вращения вокруг оси симметрии

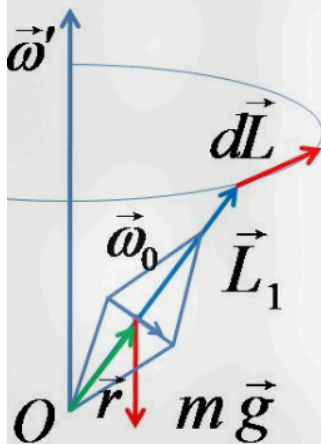
$\vec{L}'$ - момент импульса вращения вокруг оси Z

Доп. материал ⁴¹

Сила тяжести создаёт вращающий момент относительно точки O .

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

$$d\vec{L} \perp \vec{L}$$



Из-за этого ось гироскопа описывает конус- совершает прецессию.

демонстрация

Доп. материал ⁴²

Угловая скорость прецессии.

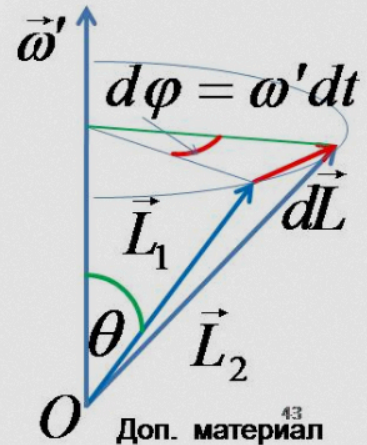
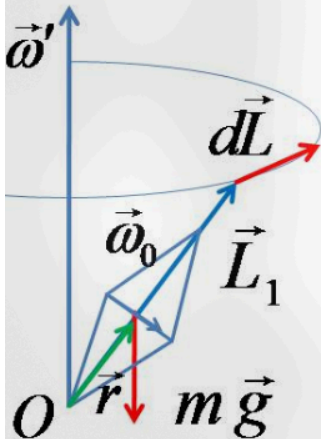
$$d\vec{L} = \vec{M} dt \quad (1)$$

$$dL = L \sin \theta \cdot \omega' dt \quad d\vec{L} = [\vec{\omega}', \vec{L}] dt \quad (2)$$

Из (1) и (2)

$$[\vec{\omega}', \vec{L}] = \vec{M}$$

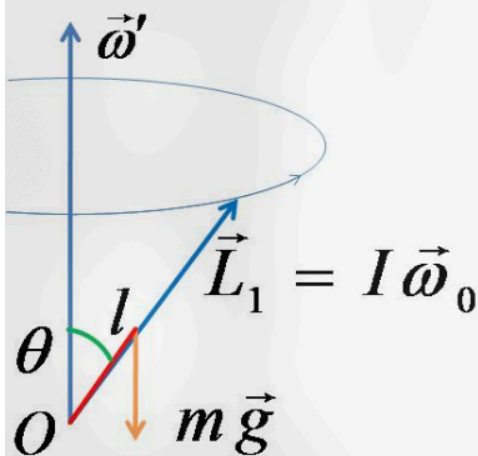
Момент силы
определяет
угловую скорость
прецессии.



$$[\vec{\omega}', \vec{L}] = \vec{M}$$

$$\omega' I \omega_0 \sin \theta = mgl \sin \theta$$

$$\omega' = \frac{mgl}{I \omega_0}$$



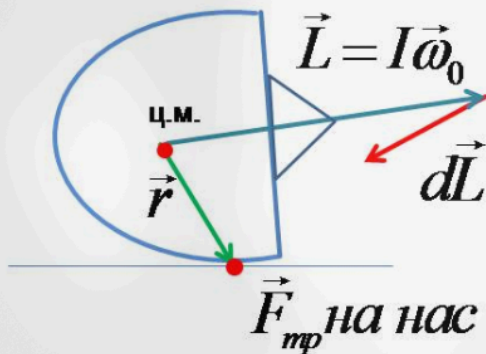
При уменьшении угловой
скорости вращения волчка
вокруг своей оси ω_0
угловая скорость
прецессии ω' возрастает.

демонстрация

44

Китайский волчок.

Момент силы трения относительно центра масс заставляет волчок переворачиваться на ножку.

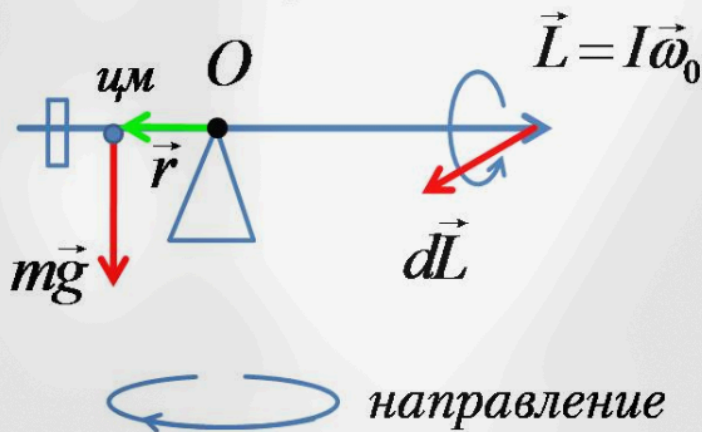


демонстрация

Доп. материал ⁴⁵

Гироскоп, у которого можно изменять положение центра масс.

Направление прецессии изменяется на противоположное при перемещении центра масс за точку O .



Доп. материал ⁴⁶

Закон сохранения момента импульса

1. Классическая механика. Запишем уравнение моментов при вращении материальной точки относительно точки $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Если $\vec{M}$, то $\vec{L} = \text{const}$

При вращении материальной точки вокруг неподвижной оси

Закон динамики вращательного движения

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Если $M_z = 0$, то

$$L_z = \text{const}$$

$$m\rho^2\omega_z = \text{const}$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Закон динамики вращательного движения

$$M_{z \text{ внешних сил}} = \frac{dL_z}{dt} = I \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I \cdot \varepsilon_z$$

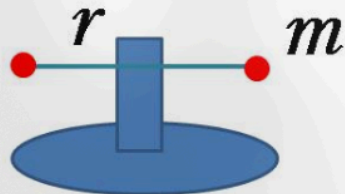
Если $M_{z \text{ внешних сил}} = 0$

$$L_z = I\omega_z = \text{const}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

2. Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы.

Пример. Человек стоит на скамейке Жуковского и держит в вытянутых руках на расстоянии r от оси вращения гири. Момент инерции человека и скамейки I , масса каждой гири равна m , угловая скорость вращения скамейки равна ω_0 . Какой будет угловая скорость вращения скамейки, если человек прижмёт гири к груди?

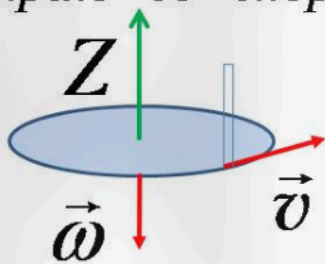


$$L_z = I_{\Sigma} \omega_z = \text{const}$$

$$(I + 2mr^2) \omega_0 = I \omega$$

51

Пример. Человек стоит на краю диска массой M и радиусом r . Момент инерции человека относительно оси диска равен I . С какой угловой скоростью ω будет вращаться диск, если человек пойдёт по его краю со скоростью v относительно диска.



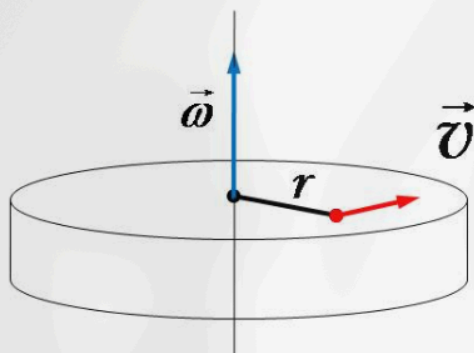
Закон сохранения момента импульса запишем в ис-земля.

$$0 = I \left(\frac{v}{r} - \omega \right) - \frac{Mr^2}{2} \omega$$

Угловая скорость человека относительно земли

52

Кинетическая энергия вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



Угловая скорость всех точек твёрдого тела одинакова.

$$v_i = \omega r_i$$

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\sum_i (m_i r_i^2) \omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}$$

Работа внешней силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

По теореме о кинетической энергии

$$\delta A = d \left(\frac{I \omega^2}{2} \right) = d \left(\frac{I \omega_z^2}{2} \right) = \omega_z \frac{I d \omega_z}{2}$$

$$M_z dt$$

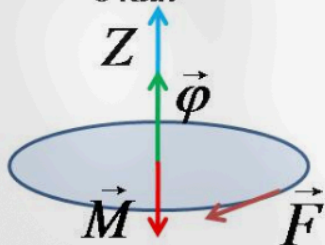
$$\delta A = M_z \omega_z dt = M_z d\varphi$$

$$A = \int_0^{\varphi \text{ конечн}} M_z d\varphi$$

Пример. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна E . Под действием постоянного тормозящего момента маховик останавливается, сделав n оборотов. Определить момент силы торможения.

$$A = \int_0^{\varphi_{\text{конечн}}} M_z d\varphi$$

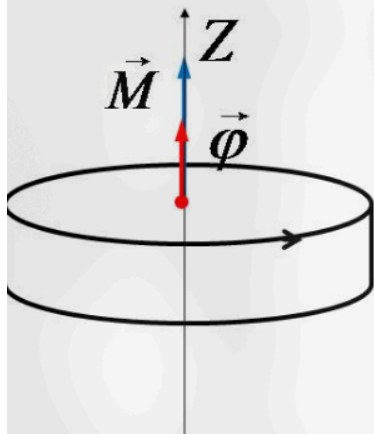
$$-E_{0\text{ кин}} = \Delta E_{\text{кин}} = A = M_z \varphi_{\text{конечн}} = -M \varphi_{\text{конечн}}$$



$$M = \frac{E_{0\text{ кин}}}{\varphi_{\text{конечн}}} = \frac{E_{0\text{ кин}}}{2\pi n}$$

55

Пример. Якорь мотора делает n оборотов в секунду. Определить вращающий момент, если мощность мотора равна N .



$$\partial A = M_z d\varphi$$

$$\underline{N} = \frac{\partial A}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = \underline{M_z \omega}$$

$$\omega = 2\pi n$$

$$M_z = \frac{N}{2\pi n}$$

Пример. Человек стоит на краю неподвижной карусели радиусом r и ловит мяч, летящий по касательной к карусели со скоростью v . Момент инерции человека $I_{\text{ч}}$, момент инерции карусели $I_{\text{к}}$. С какой угловой

скоростью начнет вращаться карусель? Как уменьшится кинетическая энергия карусели?

$$mvr = (mr^2 + I_{\kappa} + I_{\text{ч}})\omega$$

$$E_{\kappa_1} - E_{\kappa_2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(mr^2 + I_{\kappa} + I_{\text{ч}})\omega^2}{2} > 0$$

Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела

$$E_{\kappa} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$$

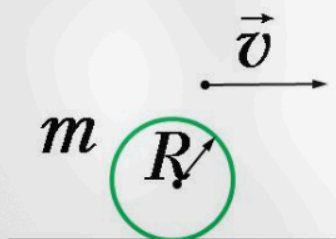
v_c – скорость движения центра масс

ω – угловая скорость вращения твердого тела, вокруг оси, проходящей через центр масс.

I_0 – центральный момент инерции твердого тела

Пример: Однородный шар массой m и радиусом R катится со скоростью v . Вычислите его кинетическую энергию.

$$E_{\kappa} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10}mv^2$$



Задание. Вычислите центральный момент инерции шара

Лекция 7. Специальная теория относительности.

Постулаты Эйнштейна

I. Принцип относительности:

Все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета; все законы природы и уравнения, их

описывающие, инвариантны, т. е. не меняются, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Другими словами, все инерциальные системы отсчета эквивалентны (неразличимы) по своим физическим свойствам; никакими опытами нельзя выделить одну из них как предпочтительную.

II. Принцип инвариантности скорости света:

Скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях. Это значит, что скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Равенство поперечных размеров тел

The diagram shows two Cartesian coordinate systems, K and K' , with origins O and O' respectively. The X and X' axes are horizontal and collinear, while the Y and Y' axes are vertical and parallel. A horizontal arrow labeled $\vec{V}$ indicates the relative velocity of frame K' with respect to frame K . Two vertical gray bars, representing objects, are shown. One bar is in frame K with its base at O and height labeled y . The other bar is in frame K' with its base at O' and height labeled y' . The bars are positioned such that their bases coincide at the moment when the Ox and Ox' axes overlap. Below the bars, the text $y = y'$ is written.

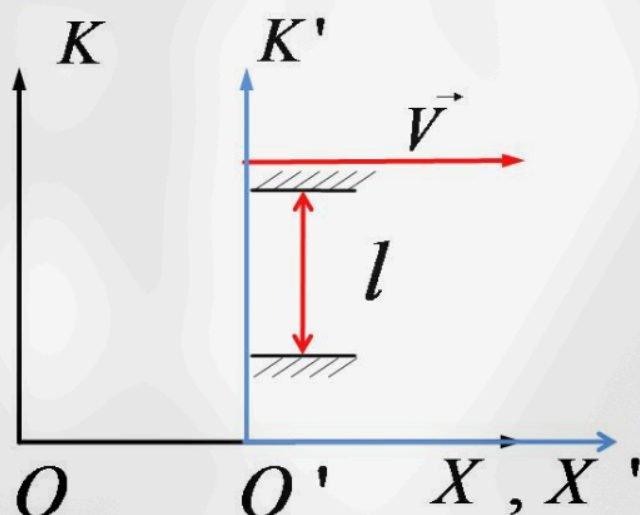
В системе K и K' вдоль осей Oy и Oy' установлены стержни, являющиеся эталонами метра.

В момент совпадения осей Ox и Ox'

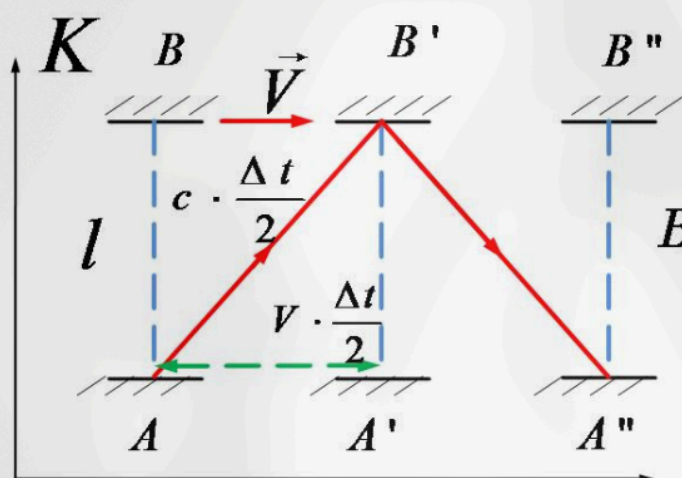
$y = y'$ в соответствии с принципом относительности (нельзя отличить одну систему от другой).

Лоренцево замедление времени

В K' системе отсчёта световые часы неподвижны. Их период:



$$\Delta t_0 = \frac{2l}{c}$$



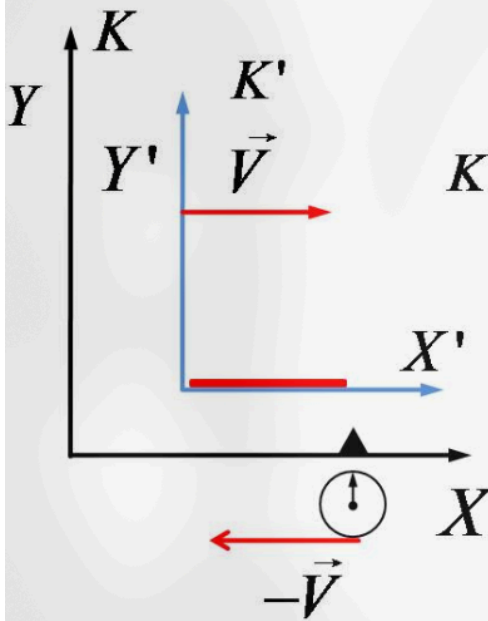
$$\Delta t_0 = \frac{2l}{c}$$

В K системе отсчёта:

$$l^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2} \right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2} \right)^2$$

$$\Delta t = \frac{2l}{c \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}}$$

Лоренцево сокращение длины



В K -системе отсчёта длина стержня: $l = V \Delta t_0$

Для наблюдателя в K' системе часы движутся со скоростью $-\vec{V}$ $l_0 = V \Delta t$

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

Интервал между событиями 1 и 2

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \text{inv}$$

I. Пространственноподобный интервал $l_{12} > ct_{12}$

Можно найти такую K' систему отсчета, в которой оба события происходят одновременно

$$(t'_{12} = 0)c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l'^2_{12}$$

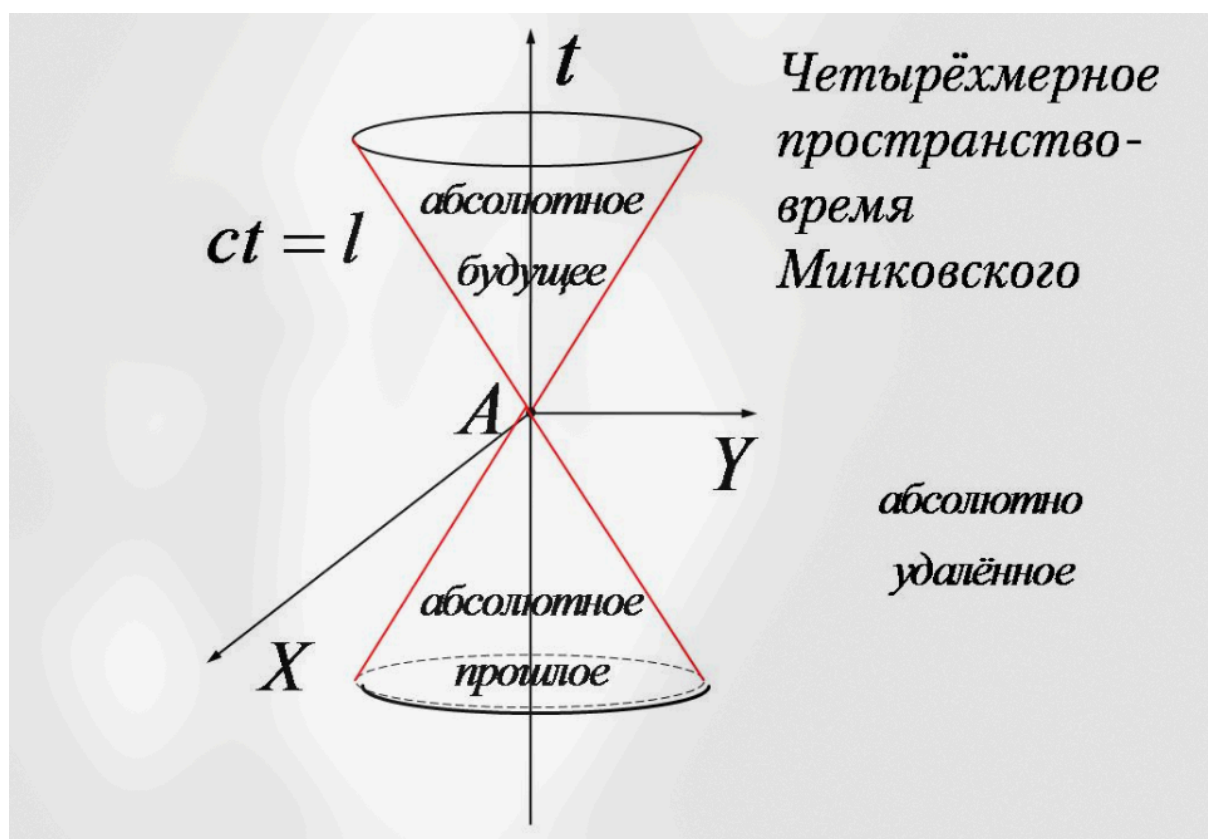
II. Времениподобный интервал $ct_{12} > l_{12}$

Можно найти такую K' систему отсчета, в которой оба события происходят в одной точке

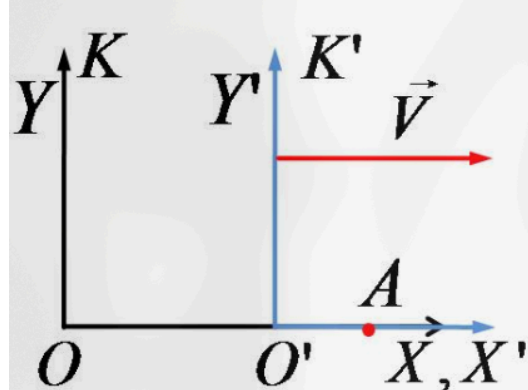
$$(l'_{12} = 0)c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12}$$

III. Светоподобный интервал $ct_{12} = l_{12}$

События, разделенные времениподобными и светоподобными интервалами $l_{12} \leq ct_{12}$ могут быть причинно-связаны друг с другом.



Преобразования Лоренца



Система отсчёта K' движется относительно системы отсчёта K со скоростью V . За начало отсчёта времени в обеих системах отсчёта выбран момент, когда O и O' совпадают.

В K системе отсчёта длина отрезка $O'A$:

$$x - Vt = x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

В K' системе отсчёта длина отрезка OA :

$$x' + Vt' = x \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$y = y'$$

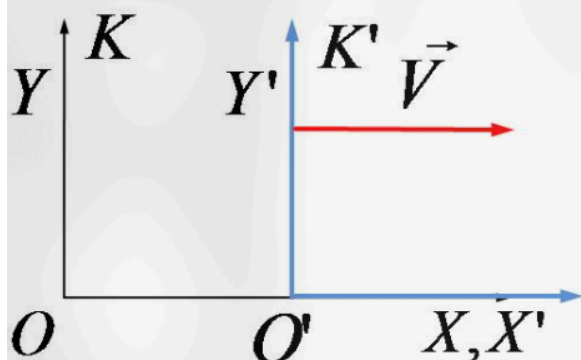
$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Из преобразований Лоренца видно, что в теории относительности можно говорить об “определенном моменте времени” лишь применительно к какой-либо инерциальной системе отсчета. Так, например, одному моменту времени в системе отсчета K (одному определенному значению времени t в этой системе) соответствует множество значений времени t' в системе отсчета K' в зависимости от значений координаты x .

Преобразование скорости при переходе из К в К'

Вычислим $v'_{x'}$



$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Вычислим $v'_{y'}$

$$v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}$$

$$y' = y$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$v'_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

аналогично получаем выражение для $v'_{z'}$

$$v'_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Модуль скорости

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z}$$

Преобразование скорости при переходе из K' в K .

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}}$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 + \frac{v'_{x'}V}{c^2}}$$

Действуя аналогично, получаем выражение для

$$v_y = \frac{v'_{y'} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_{x'}V}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_{z'} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v'_{x'}V}{c^2}}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Формулы преобразования идентичны. K' – система отсчета движется относительно K -системы со скоростью V , K -система относительно K' со скоростью $-V$.

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

$$v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 + \frac{v'_{x'} V}{c^2}}$$

Это подтверждает тот факт, что системы отсчета равноправны.

Преобразование ускорения при переходе из K в K'

Формулы преобразования идентичны. K' -система отсчета движется относительно K -системы со скоростью V , K -система относительно K' со скоростью $-V$.

$$a'_{x'} = \frac{dv'(x')}{dt'} = a_x \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \right)^3$$

$$a'_{y'} = \frac{dv'_{y'}}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) a_y + \frac{v_y V}{c^2} a_x \right] \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)^3}$$

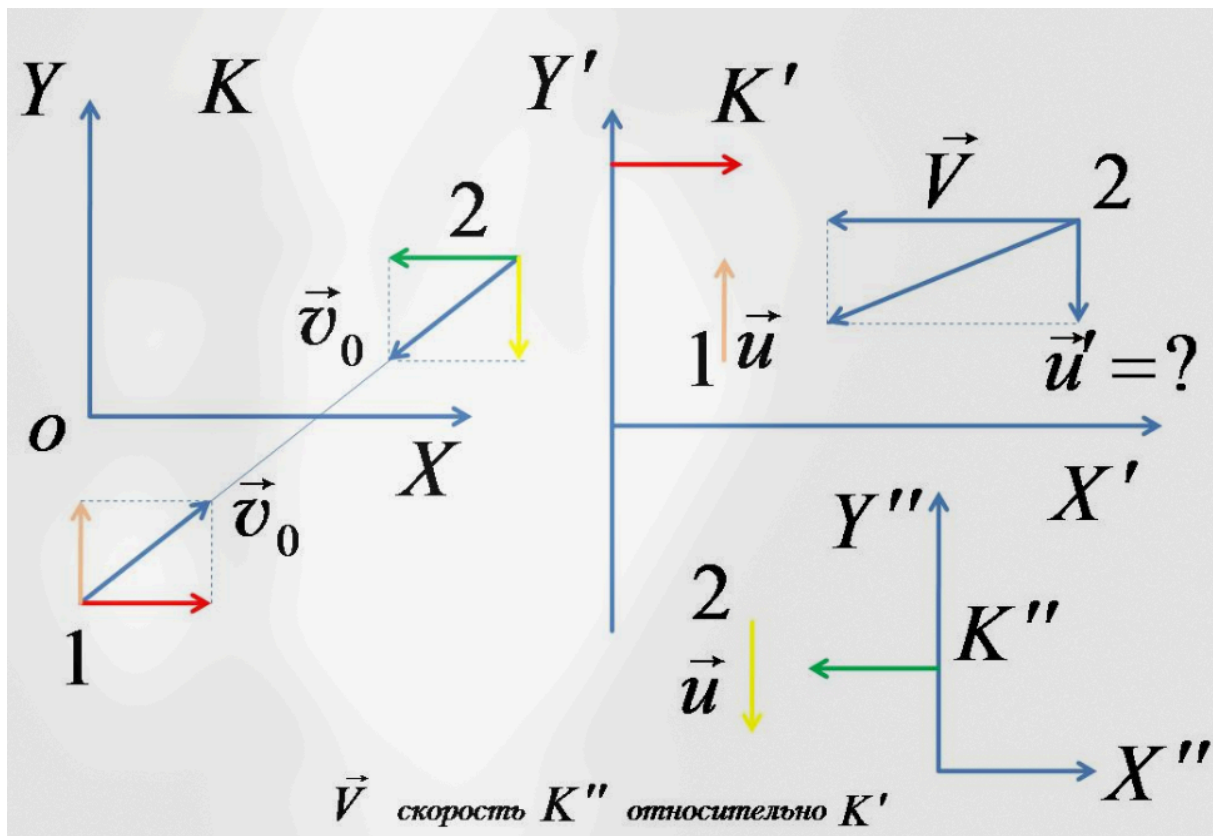
$$a'_{z'} = \frac{dv'_{z'}}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) a_z + \frac{v_z V}{c^2} a_x \right] \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)^3}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a'_{x'} \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v'_{x'} V}{c^2}} \right)^3$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \left[\left(1 - \frac{v'_{x'} V}{c^2} \right) a'_{z'} - \frac{v'_{z'} V}{c^2} a'_{x'} \right] \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v'_{x'} V}{c^2} \right)^3}$$

Получим выражение для релятивистского импульса частицы.

Будем исходить из того, что закон сохранения импульса должен выполняться во всех инерциальных системах отсчета. Рассмотрим две одинаковые частицы, которые в системе отсчета K движутся навстречу друг другу с равными по модулю скоростями v_0 . Выберем систему K' , которая движется вдоль оси X со скоростью равной проекции скорости первой частицы на X . В этой системе первая частица движется со скоростью $\vec{u}$ вверх.



Рассмотрим также вторую систему отсчета K'' , которая движется навстречу оси X со скоростью, равной проекции скорости второй частицы на ось X . В этой системе отсчета вторая частица движется навстречу оси Y'' со скоростью u . необходимо, чтобы в любой системе отсчета получалось, что при столкновении частицы останавливаются, так как выполнялся ЗСИ.

Вычислим скорость второй частицы в системе K' . Подставим в формулу преобразования скоростей значения проекций в K'' и вычислим результат.

это в K''

$$v_{x''}'' = 0 \quad v_{y''}'' = -u$$

Также учтём, что K' движется относительно K'' со скоростью $-\vec{V}$

$$u_{y'}' = \frac{v_{y''}'' \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_{x''}'' V}{c^2}}$$

$$u' = -u \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

Проекции импульсов первой и второй частиц в K' оказались неравными. Это неправильно, при столкновении должен быть справедлив ЗСИ. Для того, чтобы исправить противоречие, необходимо добавить множитель

$$m_1 u = -m_2 u \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Основное уравнение релятивистской динамики

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

Энергия покоя $E_0 = mc^2$

$m(m_0)$ Масса (Ранее говорили “масса покоя”)

Полная энергия релятивистской частицы

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} + E_0$$

$$E_{\text{полн}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Полная энергия частицы и ее импульс связаны соотношением.

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

При переходе от одной системы отсчета к другой не изменяется масса частицы, следовательно, релятивистским инвариантом является

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{E_0^2}{c^2}$$

Фотон.

Фотон – квант света. Скорость фотона равна c .

Поскольку знаменатель в формуле для импульса обращается в нуль,

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

масса фотона равна нулю.

Энергия фотона.

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

ν – частота света

λ – длина волны света

Вычислим **импульс фотона**. Для этого воспользуемся формулой, связывающей энергию и импульс частицы.

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 = 0$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$