

Линейные операторы

Последняя лекция предыдущего раздела была посвящена рассмотрению линейных отображений общего вида. Начиная с текущей, первой лекции второго раздела мы в большей степени будем рассматривать отображения, которые линейно преобразуют элементы из одного пространства.

Большая часть раздела будет посвящена так называемому *спектральному анализу* линейных отображений, который позволяет получить наиболее простое матричное представление отображения.

§1. Ядро и образ отображения

Прежде чем перейдем к рассмотрению линейных отображений, действующих как $\varphi : V \rightarrow V$ (эндоморфизмы), обсудим важные определения и утверждений, справедливые для отображений в общем виде, но наиболее ценные именно для эндоморфизмов.

Определение 1.1. Ядром линейного отображения $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ будем называть подмножество V , определенное как

$$\ker \varphi = \{x \in V : \varphi(x) = 0_W\}$$

Лемма 1.1. *Нейтральный элемент $0_V \in V(\mathbb{K})$ принадлежит ядру отображения φ .*

Доказательство.

$$\varphi(0_V) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0_W$$

□

Можно показать, что ядро линейного отображения образует не просто подмножество в V , но также обладает структурой линейного подпространства.

Лемма 1.2. *Ядро линейного отображения $\ker \varphi$ является линейным подпространством $V(\mathbb{K})$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $x_1, x_2 \in \ker \varphi$, принадлежащие ядру отображения φ . Их принадлежность ядру означает, что

$$\varphi(x_1) = 0 \quad \varphi(x_2) = 0$$

Рассмотрим линейную комбинацию элементов x_1 и x_2 с коэффициентами α_1 и α_2 после действия на нее отображением:

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2) = \alpha_1 \cdot 0_W + \alpha_2 \cdot 0_W = 0_W$$

Таким образом показано, что ядро замкнуто относительно линейных операций, а следовательно ядро является линейным подпространством. □

Результатом произвольного линейного отображения является элемент из $W(\mathbb{K})$, которое само обладает структурой линейного пространства.

Определение 1.2. Образом $\text{Im } \varphi$ линейного отображения $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ называется подмножество W , определяемое как

$$\text{Im } \varphi = \{y \in W : \exists x \in V, \varphi(x) = y\} = \varphi(V)$$

Лемма 1.3. Образ линейного отображения $\text{Im } \varphi$ является линейным подпространством $W(\mathbb{K})$.

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2 \in V$ произвольные элементы пространства V , которым соответствуют образы

$$y = \varphi(x) \quad y_1 = \varphi(x_1) \quad y_2 = \varphi(x_2)$$

Чтобы показать замкнутость образа отображения необходимо показать, что сумма двух образов также является образом:

$$y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \in W$$

Аналогично для умножения на скаляр:

$$\alpha y = \alpha \varphi(x) = \varphi(\alpha x) \in W$$

Следовательно образ замкнут относительно линейных операций, индуцированных из W , а значит является линейным подпространством. $\square$

Пример 1.1. (а) Рассмотрим пространство векторов на плоскости, а также отображение проектирования на направление, заданное вектором $\mathbf{a}$. Образом данного отображения будут являться все вектора, коллинеарные с вектором $\mathbf{a}$ (прямая на плоскости), а ядром — все векторы, которые перпендикулярны данному (включая нулевой вектор).

(б) Образом отображения, заданного как дифференцирование в пространстве полиномов степени не выше n , являются все полиномы степени не выше $n - 1$, а ядром — полиномы нулевой степени, т.е. просто скаляры.

(в) Рассмотрим также пространство квадратных матриц, на которых можно ввести отображение симметризации (антисимметризации). Образом симметризации будут, очевидно, симметричные матрицы того же порядка, а ядром — антисимметричные матрицы.

Теорема 1.1. Сумма размерностей ядра и образа линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ равна размерности пространства $V(\mathbb{K})$.

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$$

Доказательство. Для начала введем базис ядра отображения:

$$\ker \varphi: \quad \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

Дополним его до базиса пространства V :

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$$

Тогда для произвольного элемента $x \in V$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad \varphi(x) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=k+1}^n \xi^i \varphi(e_i),$$

учитывая, что отображение переводит базисные векторы ядра в нулевой элемент.

Набор векторов

$$\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$$

является полным, так как любой образ может быть представлен линейной комбинацией как было показано выше.

Покажем линейную зависимость от противного.

Пусть набор векторов $\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$ является линейно зависимым. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов, что

$$\alpha^{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha^n \varphi(e_n) = 0$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$z = \alpha^{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha^n e_n$$

и применим к ней отображение

$$\varphi(z) = \alpha^{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha^n \varphi(e_n) = 0$$

Это означает, что z принадлежит ядру отображения, но в то же время имеет нетривиальное разложение по базисным векторам, которые не принадлежат этому ядру — противоречие. Следовательно, набор $\{\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\}$ является линейно независимым. Из данных рассуждений также следует, что единственный вектор z , который можно представить в виде разложения как по базису $\ker \varphi$, так и по базису $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ — это нулевой вектор.

В силу того, что набор образует линейно независимый и полный набор, можно утверждать

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k$$

а следовательно

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} \varphi = k + (n - k) = n$$

□

Замечание 1.1. Эту теорему также называют **теоремой о ранге и дефекте**, называя рангом отображения размерность образа, а дефектом — размерность его ядра.

§2. Алгебра эндоморфизмов

Определение 2.1. **Линейным оператором (эндоморфизмом)** $\varphi : V \rightarrow W$ в линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется линейное отображение, если $V = W$.

Замечание 2.1. Множество линейных операторов в линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ будем обозначать $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Лемма 2.1. *Множество $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ вместе с операцией композиции образует некоммутативный моноид.*

Доказательство. Как было показано ранее, композиция линейных отображений является линейным отображением. Следовательно при рассмотрении $\varphi, \psi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ имеем, что $\chi = \psi \circ \varphi$ также принадлежит $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ в силу того, что оно является линейным отображением и действует как $\chi : V \rightarrow V$.

Для композиции линейных операторов справедлива ассоциативность, что по определению композиции проверяется тривиально

$$(\varphi \circ (\psi \circ \chi))(x) = \varphi(\psi(\chi(x))) = ((\varphi \circ \psi) \circ \chi)(x)$$

В множестве $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ существует нейтральный элемент — тождественное преобразование. Некоммутативность композиции очевидна. Откуда следует, что $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ действительно обладает структурой некоммутативного моноида. □

Лемма 2.2. *Множество $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ вместе с операциями сложения и композиции образует кольцо.*

Доказательство. Операции сложения и композиции согласованы:

$$\forall \varphi, \psi, \chi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \quad \varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi$$

Следовательно образуется структура кольца. □

Ранее также упоминалось, что любое множество линейных отображений $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ образует линейное пространство, значит и $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ также является линейным пространством. Такое множество, в котором может быть задана как структура кольца, так и структура линейного пространства, не является уникальным в случае множества эндоморфизмов.

Определение 2.2. Алгеброй $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство, снабженное структурой кольца, в котором все операции согласованы.

Теорема 2.1. Множество $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ образует алгебру над полем $\mathbb{K}$.

Теорема 2.2. Доказательство суммирует все предыдущие рассуждения.

В силу того, что любому линейному оператору в фиксированном базисе соответствует матрица, а операторные операции однозначно определяются матричными операциями, можно утверждать, что алгебра линейных операторов изоморфна алгебре квадратных матриц.

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$$

Для матриц была определена численная характеристика — определитель, которую мы связывали с критерием невырожденности матрицы. Аналогичную характеристику можно ввести и для линейных операторов.

Определение 2.3. Определителем линейного оператора называется определитель матрицы линейного оператора в фиксированном базисе.

$$\det \varphi = \det A_{\varphi}$$

Лемма 2.3. Определитель линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Действительно, для матрицы линейного оператора при замене базиса справедливо преобразование

$$A'_{\varphi} = T^{-1} A_{\varphi} T$$

Покажем независимость от выбора базиса пользуясь свойствами определителя

$$\det A'_{\varphi} = \det(T^{-1} A_{\varphi} T) = \det T^{-1} \det A_{\varphi} \det T = \frac{1}{\det T} \det A_{\varphi} \det T = \det A_{\varphi}$$

□

Таким образом имеем, что определение определителя оператора является корректным, т.к. матрица линейного оператора всегда является квадратной и ее определитель не зависит от базиса.

Определение 2.4. Линейный оператор $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ называется обратимым, если существует отображение $\psi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ такое, что

$$\psi \circ \varphi = \mathcal{I}, \quad \varphi \circ \psi = \mathcal{I}$$

Лемма 2.4. Линейный оператор является обратимым тогда и только тогда, когда его определитель не равен нулю.

Доказательство. Из изоморфности алгебр эндоморфизмов и квадратных матриц для обратимых элементов справедливо

$$\psi \circ \varphi = \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad A_\varphi \cdot B_\psi = E$$

Откуда следует, что если оператор φ обратим, то существует оператор ψ , имеющий матрицу такую, что $B_\psi = A_\varphi^{-1}$, а матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. $\square$

Отметим последний факт, который касается рассмотрения эндоморфизмов в контексте текущей лекции.

Замечание 2.2. Для эндоморфизма $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ справедливо, что его ядро и образ являются линейными подпространствами V , а также

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$$

Однако это не означает, что линейное пространство V всегда представимо в виде прямой суммы ядра и образа оператора. Следующий контрпример это демонстрирует.

Пример 2.1. Пусть $V = \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, а оператор определим как $\mathcal{D}^2(p) = \frac{d^2 p}{dx^2}$. Его образ и ядро будут совпадать:

$$\ker \mathcal{D}^2 = \text{Im } \mathcal{D}^2 = \mathbb{R}^{\leq 1}[x]$$

Иными словами, сумма размерностей ядра и образа действительно дает размерность пространства, но при этом в сумме имеем множество линейных полиномов, что очевидно не совпадает со всем пространством полиномов, степень которых не превышает 3.