

Операторы в евклидовых пространствах

Содержание

§1 Эрмитово сопряженный оператор	1
§2 Самосопряженный и эрмитов операторы	2
§3 Спектральные свойства эрмитова оператора	2
§4 Унитарный оператор	3
§5 Матрица унитарного оператора	4
§6 Спектральные свойства унитарного оператора	5

§1. Эрмитово сопряженный оператор

Пусть дано евклидово пространство $X_E(\mathbb{K})$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 1.1. Оператор $\varphi^\dagger$ называется **эрмитово сопряженным** к оператору φ , если он обладает следующим свойством:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

Замечание 1.1. Операция эрмитового сопряжения обладает следующими свойствами:

- аддитивность: $(\varphi + \psi)^\dagger = \varphi^\dagger + \psi^\dagger$;
- сопряженная однородность: $(\lambda\varphi)^\dagger = \bar{\lambda}\varphi^\dagger$;
- контравариантность: $(\psi \circ \varphi)^\dagger = \varphi^* \circ \psi^\dagger$;
- инволютивность: $(\varphi^*)^\dagger = \varphi$.

Лемма 1.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис евклидова пространства $X_E(\mathbb{K})$ и G — его матрица Грама. Тогда если A_φ — матрица оператора φ в этом базисе, то матрица $\varphi^\dagger$ будет иметь вид

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1} A^\dagger G, \quad A^\dagger = \overline{A}^T.$$

Доказательство. По определению скалярного произведения:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \xi^\dagger G (A_\varphi \eta) = (\xi^\dagger G A_\varphi G^{-1}) G \eta = (G^{-1} A_\varphi^\dagger G \xi)^\dagger G \eta = \langle \varphi^\dagger x, y \rangle.$$

□

§2. Самосопряженный и эрмитов операторы

Определение 2.1. Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Замечание 2.1. Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

Пример 2.1. Примеры матрицы A самосопряженного оператора и матрицы B эрмитовского оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.2. В случае вещественного поля $\mathbb{R}$ операции $\dagger$ и T совпадают.

§3. Спектральные свойства эрмитова оператора

Лемма 3.1. Все собственные значения эрмитова оператора φ вещественны.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение φ и x — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle \varphi x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle, \quad \langle x, \varphi x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda$$

□

Лемма 3.2. Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\varphi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \varphi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \varphi x_1, x_2 \rangle &= \langle x_1, \varphi x_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle &= \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle &= 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.3. Если $L \leq X$ — инвариантное подпространство эрмитова оператора φ , тогда $L^\perp$ — также инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть $x \in L$ и $y \in L^\perp$, тогда

$$0 = \langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi y \in L^\perp.$$

□

Теорема 3.1. Эрмитов оператор φ является оператором скалярного типа.

Доказательство. Покажем, что собственные векторы φ образуют базис $X_E(\mathbb{C})$. Проведем доказательство от противного: пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ — максимальный ЛНЗ набор:

$$\varphi x_j = \lambda_j x_j, \quad j = 1 \dots m \quad m < n = \dim_{\mathbb{C}} X_E.$$

Пусть далее подпространство L образовано как линейная оболочка над этими векторами:

$$L = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle_{\mathbb{C}}, \quad M = L^{\perp}, \quad \varphi_M : M \rightarrow M$$

Так как M — инвариантное подпространство φ , существует по крайней мере один вектор $\tilde{x} \in M$, такой что

$$\varphi_M \tilde{x} = \tilde{\lambda} \tilde{x}.$$

Но $\tilde{x} \perp L$ и значит $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \tilde{x}\}$ — ЛНЗ. Противоречие. □

Теорема 3.2. (Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \rightarrow X_E$ — эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E , состоящий из собственных векторов φ , тогда:

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle *, e_i \rangle e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Теорему доказывает два обсуждаемых ранее факта:

- Эрмитов оператор диагонализуем.
- Проектор на любое подпространство имеет вид

$$\mathcal{P}_L(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i,$$

где e_i — ортонормированный базис подпространства L . □

§4. Унитарный оператор

Лемма 4.1. Пусть ψ — оператор в евклидовом пространстве $X_E(\mathbb{K})$, тогда следующие свойства эквивалентны:

- (а) изометрия: $\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, y \rangle$;
- (б) сохранение нормы: $\|\psi x\| = \|x\|$;
- (в) свойство сопряженного: $\psi^{\dagger} = \psi^{-1}$

Доказательство. Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(2):

$$\|\psi x\|^2 = \langle \psi x, \psi x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2;$$

- Опр.(2) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\begin{aligned} \|\psi(x+y)\|^2 &= \|\psi x\|^2 + \|\psi y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle \psi x, \psi y \rangle, \\ \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle \psi x, \psi y \rangle \end{aligned}$$

Для Im аналогично рассматриваем $\|\psi(x+i \cdot y)\|^2$

- Опр.(1) $\Rightarrow$ Опр.(3):

$$\langle \psi x, \psi y \rangle = \langle x, \psi^\dagger \psi y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{Rightarrow} \quad \psi^\dagger \psi = \mathcal{I}.$$

- Опр.(3) $\Rightarrow$ Опр.(1):

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \mathcal{I}y \rangle = \langle x, \psi^\dagger \psi y \rangle = \langle \psi x, \psi y \rangle.$$

□

Определение 4.1. Унитарным называется оператор ψ , обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 4.2. Определитель оператора ψ имеет следующее свойство:

$$|\det \psi| = 1.$$

Доказательство. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det \mathcal{I} = \det (\psi^\dagger \psi) = \det \psi^\dagger \det \psi = \overline{\det \psi} \cdot \det \psi = |\det \psi|^2 = 1.$$

□

Замечание 4.1. Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

§5. Матрица унитарного оператора

Замечание 5.1. Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойства:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} : \quad \psi &\leftrightarrow U_\psi, \quad \overline{U^T} = U^{-1}; \\ \mathbb{R} : \quad \psi &\leftrightarrow U_\psi, \quad U^T = U^{-1}. \end{aligned}$$

Замечание 5.2. В вещественном случае

$$\det \psi = \det U_\psi = \pm 1$$

Лемма 5.1. Пусть $U_\psi = \|u_{ik}\|$ — матрица унитарного оператора, тогда:

$$\sum_{j=1}^n \bar{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

Замечание 5.3. Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

Пример 5.1. Матрица Эйлера — пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

§6. Спектральные свойства унитарного оператора

Лемма 6.1. Все собственные значения оператора ψ по модулю равны единице:

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

Доказательство. Пусть $\psi x = \lambda x$, тогда

$$\langle \psi x, \psi x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle. \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

□

Лемма 6.2. Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:

$$\psi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \psi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Доказательство. Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \psi x_1, \psi x_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2 \rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1 \right) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

□

Лемма 6.3. Ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантного относительно унитарного оператора ψ подпространства L также является инвариантным.

Доказательство. Для любых $x \in L$ и $y \in L^\perp$ имеем:

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle \psi x, \psi y \rangle \Rightarrow \psi x \perp \psi y \Rightarrow \psi y \in M.$$

□

Теорема 6.1. Унитарный оператор является оператором скалярного типа.

Доказательство. Доказательство как для случая эрмитова оператора. □

Пример 6.1. Ортогональный оператор, вообще говоря, не является скалярным.

Теорема 6.2. (Спектральная теорема для унитарного оператора)

Пусть $\psi : X_E \rightarrow X_E$ — унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис X_E , состоящий из собственных векторов ψ , тогда:

$$\psi(*) = \sum_{j=1}^n e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$