Практическое занятие #12. Ортогональность

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- ортогональность;
- ортогонализация;
- ортогональные базисы;
- ортонормированные базисы;
- ортогональное подпространство.

Задание 1: ортогонализация

Пусть X_E — евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Ортогонализуйте следующие системы векторов:

- $$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$
- $$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Из полученных ортогональных систем векторов постройте ортонормированные.

Дополнительно: убедитесь в том, что матрица Грама системы векторов, полученной после ортогонализации, будет диагональной (или единичной в случае ОНБ).

Задание 2: ортогонализация

Пусть X_E — евклидово пространство со скалярным произведением, заданным матрицей Грама. Ортогонализуйте следующие системы векторов:

- $$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- $$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Из полученных ортогональных систем векторов постройте ортонормированные.

Примечание: норма, порожденная данным скалярным произведением должна также находиться при помощи матрицы Грама!

Задание 3: ортогонализация полиномов

Ортогонализуйте стандартный базис $\{1, x, x^2, x^3\}$ пространства полиномов со скалярными произведениями:

- $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$
- $\langle p, q \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)dx$

Убедитесь в том, что результат ортогонализации зависит от способа введения скалярного произведения.

Дополнительно: введение различных скалярных произведений позволяет получать ортогональные системы полиномов такие как полиномы Эрмита, полиномы Лежандра, полиномы Лаггера, которые используются во многих других разделах математики и их приложений.

Задание 4: вектор, ортогональный подпространству

Найдите вектор h, который будет ортогонален подпространству, заданному как линейная оболочка над векторами:

- $$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$
  Базис предполагаетсся ортонормированным;
- $$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  Базис предполагаетсся ортонормированным;
- $$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  Базис с матрицей Грама $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

Задание 5: ортогональное подпространство

Пусть подпространство задано как линейная оболочка векторов, имеющих в ортонормированном базисе координатные столбцы:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Базис предполагаетсся ортонормированным. С учетом этого найдите:

- матрицу системы уравнений, определяющей ортогональное дополнение к L;
- базис ортогонального дополнения к L.

Задание 6: ортогональное дополнение

Пусть подпространство задано системой уравнений:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Базис определяет матрицу Грама:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдите базис ортогонального дополнения к этому подпространству.