Практическое занятие #14. Диагонализация квадратичных форм

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- квадратичная форма;
- канонический вид, нормальный вид квадратичной формы;
- индекс положительной инерции, индекс отрицательной инерции, ранг, сигнатура квадратичной формы;
- положительно определенная квадратичная форма, отрицательно определенная квадратичная форма;
- критерий Сильвестра положительной, отрицательной определенности квадратичной формы;
- приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования;
- присоединенный оператор к квадратичной форме.

Задание 1: сигнатура

Пусть квадратичная форма $q(x)$ определена в евклидовом пространстве относительно ортонормированного базиса.

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_3$$
$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Определите сигнатуру квадратичной формы. Сделайте вывод о знакоопределенности квадратичной формы.

Задание 2: критерий Сильвестра

При каких значениях λ квадратичная форма является положительно определенной, отрицательно определенной?

- $$q(x) = \lambda x_1^2 + (\lambda+3)x_2^2 - 4x_1x_3$$
- $$q(x) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_3 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$
- $$q(x) = (4-\lambda)x_1^2 + (4-\lambda)x_2^2 - (2+\lambda)x_3^2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Задание 3: присоединенный оператор

В ортонормированном базисе евклидова пространства с матрицей Грама G задана квадратичная форма. Найдите в этом же базисе матрицу присоединенного к ней оператора:

- $$q(x) = 4x_1^2 + 6x_1^2 + 16x_1x_3; \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
- $$q(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3; \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание 4: приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду:

- $$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$
- $$q(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$
- $$q(x) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$$

Постройте преобразование, которое приводит квадратичную форму из канонического вида в нормальный. Убедитесь в том, что полученное преобразование не обязательно будет являться ортогональным.