

✓ Практическое занятие #15. Диагонализация квадратичных форм

Курс: двухсеместровый. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- квадратичная форма;
- канонический вид, нормальный вид квадратичной формы;
- индекс положительной инерции, индекс отрицательной инерции, ранг, сигнатура квадратичной формы;
- положительно определенная квадратичная форма, отрицательно определенная квадратичная форма;
- критерий Сильвестра положительной, отрицательной определенности квадратичной формы;
- приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования;
- присоединенный оператор к квадратичной форме.
- метод Лагранжа;
- метод Якоби;
- одновременная диагонализация двух квадратичных форм;

Задание 1: метод Лагранжа

Пусть квадратичная форма $q(x)$ определена в евклидовом пространстве относительно ортонормированного базиса.

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$$

При помощи метода Лагранжа приведите квадратичную форму к каноническому виду. Определите сигнатуру и знакоопределенность квадратичной формы.

Задание 2: метод Якоби

Убедиться в том, что квадратичная форма может быть диагонализирована методом Якоби, записать верхнетреугольное преобразование и канонический вид квадратичной формы.

$$q(x) = -4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$$

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

Задание 3: одновременная диагонализация

Проверить, что хотя бы одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду, и записать этот диагональный вид обеих форм.

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \\ & g(x) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2 \end{aligned}$$

2&

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 \\ g(x) &= 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 \end{aligned}$$

Задание 4: приведение кривых второго порядка к каноническому виду

Приведите уравнения кривых к каноническому виду, постройте кривые в канонической и изначальной системе координат. Проведите связь между сигнатурой формы и типом кривой.

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 &= 0 \\ 4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y - 4 &= 0 \end{aligned}$$