Практическое занятие #2. Билинейные формы

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- билинейная форма;
- равные билинейные формы, нулевая билинейная форма;
- сумма билинейных форм;
- произведение билинейной формы на число;
- пространство билинейных форм;
- симметричная билинейная форма;
- антисимметричная билинейная форма;
- коэффициенты билинейной формы, матрица билинейной формы;
- преобразование матрицы билинейной формы при преобразовании базиса;
- квадратичная форма, матрица квадратичной формы.

Задание 1: примеры билинейных форм

Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными формами в соответствующих пространствах? Какие из билинейных форм являются симметричными, антисимметричными? В конечномерных пространствах выберите базис и найдите матрицы соответствующих билинейных форм:

- $b(x, y) = x^T \cdot y$, где $x, y \in \mathbb{Q}^n$ (n-мерное арифметическое пространство над полем $\mathbb{Q}$).
- $b(A, B) = \mathrm{tr}(A \cdot B)$, где $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.
- $b(A, B) = \mathrm{tr}(A \cdot B - B \cdot A)$, где $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.
- $b(A, B) = \det(A \cdot B)$, где $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.
- $b(u, v) = \mathrm{Re}(uv)$, где $u, v \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{C}$ рассматривается как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$).
- $b(u, v) = |uv|$, где $u, v \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{C}$ рассматривается как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$).
- $b(x, y) =$ сумма координат вектора, полученного в результате векторного произведения $[x \times y]$ в заданном базисе.
- $b(f, g) = \int_a^b (f(t) + g(t))dt$, где $f, g \in C_{[a,b]}$.
- $b(p, q) = \frac{d}{dt}(pq)(a)$, где $p, q \in \mathbb{R}^{\leqslant}[x]$, $a \in \mathbb{R}$.

Задание 2: разложение билинейной формы

Представьте билинейную форму в виде суммы симметричной и антисимметричной билинейных форм.

$b(x, y) = x^1 y^1 + 3x^2 y^2 + x^2 y^3 + 2x^3 y^1 - 3x^3 y^2$

Найдите матрицы симметричной и антисимметричной компонент билинейной формы.

P.S. также как и ранее, верхние индексы означают не степень, а индексацию компонент вектора.

Задание 3: представление в виде произведения линейных форм

Пусть даны две линейные формы

$$f(x) = 2x^1 + x^2 - x^3$$
$$g(x) = -x^1 - x^2 + 2x^3$$

Запишите билинейную форму $b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, а также $c(x, y) = g(x) \cdot f(y)$.

- Найдите матрицы B и C этих билинейных форм.
- Установите зависимость их со строками коэффициентов линейных форм f и g.
- Как связаны матрицы B и C при таком построении билинейных форм?

Задание 4: преобразование матрицы билинейной формы

Найдите матрицу B билинейной формы $b(x, y)$ в новом базисе, если задана её матрица и координаты векторов нового базиса в старом базисе.

- $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$
- $$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} e'_1 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

Задание 5: значение билинейной формы

Рассмотрите векторы $x = (2, 1, 3)^T$ и $y = (1, -1, -1)^T$.

- Найдите значение билинейной формы, заданной любой из матриц в предыдущем задании, используя
$$b(x, y) = x^T B y$$
- Преобразуйте координатные столбцы векторов x и y в новый базис;

- Найдите значение билинейной формы при помощи матрицы, полученной в новом базисе на векторах, которые также представлены в нем
$$b(x, y) = x'^T B' y'$$
- Сравните полученные значения

Задание 6: квадратичные формы

Запишите квадратичную форму, соответствующую данной билинейной форме. Составьте матрицу квадратичной формы.

- $b(x, y) = 2x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 - 5x^2y^2$, где $x, y \in \mathbb{R}^2$
- $b(x, y) = 2x^1y^1 - x^1y^2 + x^2y^1 - 5x^2y^2$, где $x, y \in \mathbb{R}^2$
- $b(x, y) = 2x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 - 5x^2y^2$, где $x, y \in \mathbb{R}^3$
- $b(x, y) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^1y^3 - 2x^2y^1 + 3x^2y^2 + x^2y^3 + x^3y^1 - 5x^3y^2 - 3x^3$, где $x, y \in \mathbb{R}^3$

В первых двух случаях найдите полярную билинейную форму, используя
$$b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

В третьем случае восстановите полярную билинейную форму, используя ее связь с матрицей квадратичной формы.