Практическое занятие #4. Операции с тензорами

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- преобразование компонент тензора при замене базиса;
- свертка тензора.

Задание 1: замена базиса

Преобразуйте компоненты тензоров

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b^i_j = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

при замене базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_3 \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

Убедитесь, что данные законы преобразования соответствуют матричным операциям:

$$A' = T^T A T \qquad B' = T^{-1} B T,$$

где T — матрица перехода.

Задание 2: замена базиса

Преобразуйте компоненты тензора

$$c^i_{jk} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

при замене базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 - 3e_2 \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

Задание 3: свертка

Выполните умножение тензоров и последующие свертки:

$$a^i_j \otimes x^k = b^{ij}_k \mapsto b^{ij}_j = c^i,$$
$$a^i_j \otimes x^k = b^{ij}_k \mapsto b^{ij}_i = d^j,$$

если

$$a^i_j = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \qquad x^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Убедитесь, что это соответствует матричным операциям

$$A \cdot x = c \qquad (\mathrm{tr} A) \cdot x = d$$

Задание 4: полная свертка

Выполните умножение тензоров

$$c^{ij}_{kl} = a^i_k \otimes b^j_l$$

и все возможные свертки как по одной паре индексов, так и по двум (полную свертку)

$$a^i_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad b^j_l = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Убедитесь в том, что между полными свертками и матричными операциями существует соответствие

$$\begin{aligned} c^{ij}_{ij} \quad &\leftrightarrow \quad (\mathrm{tr} A) \cdot (\mathrm{tr} B) \\ c^{ij}_{ji} \quad &\leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(A \cdot B) \end{aligned}$$