Практическое занятие #7. Введение в спектральный анализ

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- собственные векторы;
- собственные числа;
- диагонализуемые операторы;
- спектральное разложение оператора;

Задание 1: собственные числа и векторы

Найдите собственные числа и собственные векторы операторов, заданных матрицами

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
2. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
3. $$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
4. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Определите алгебраические кратности всех собственных чисел. Найдите их геометрические кратности. Убедитесь в том, что данные операторы удовлетворяют критерию диаголизуемости.

Задание 2: Спектральные проекторы

Постройте проекторы на спектральные подпространства операторов из предыдущего задания.

Чтобы это сделать, можно воспользоваться следующим алгоритмом. Для примера рассмотрим 3-мерное линейное пространство V.

Пусть $v \in V$ — произвольный вектор, а $\{x_1, x_2, x_3\}$ — собственный базис, составленный из векторов, отвечающий различным собственным числам (оператор с простым спектром). Существование базиса обеспечивает возможность нахождения сопряженного ему базиса $\{f^1, f^2, f^3\}$. Тогда

$$v = v^1 x_1 + v^2 x_2 + v^3 x_3 = f^1(v) x_1 + f^2(v) x_2 + f^3(v) x_3$$

Каждое из этих слагаемых является проекцией v на направление собственного вектора x_i, т.е. определяет проектор на подпространство, которое им образовано.

$$P_i(v) = f^i(v) x_i$$

Существует достаточно простой способ нахождения матрицы этого проектора. Действительно, для поиска столбцов матрицы оператора мы должны последовательно подставить базисные векторы (стандартного базиса) в этот оператор и полученный образ будет являться одним из столбцов матрицы оператора. В матричном виде это эквивалентно

$$P_i = f^i \cdot E \cdot x_i,$$

где f^i — вектор-строка базисной линейной формы, E — единичная матрица, соответствующая стандартному базису, а x_i — собственный вектор, на направление которого ищется проекция.

Если же геометрические кратности собственных чисел больше единицы, т.е. одному собственному числу соответствует несколько собственных векторов, то для поиска проектора на такое собственное подпространство достаточно сложить матрицы проектирования на каждый из собственных векторов.

Задание 3: свойства проектирования

Выберите любой из операторов. Для полной системы проекторов проверьте, что

1. $P_1 + P_2 + P_3 = E$ (сумма проекций дает исходный вектор)
2. $P_i^2 = P_i$ (идемпотентность проектирования)
3. $P_i P_j = \Theta$, если $i \neq j$.

А также убедитесь в том, что справедливо спектральное разложение оператора:

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$