

✓ Практическое занятие #9. Присоединенные векторы и ЖНФ

Курс: **двухсеместровый**. Семестр: весна.

Ключевые слова:

- спектр оператора;
- жорданова цепочка;
- циклическое подпространство;
- собственные и присоединенные векторы;
- жорданов базис;
- жорданова нормальная форма.

✓ Присоединенные векторы

Рассмотрим еще один способ поиска жорданова базиса. Пусть $\phi \in \text{End}(V)$ – произвольный линейный оператор (не обязательно диагонализуемый), для которого найден спектр $\sigma_\phi = \{\lambda_1, \dots\}$.

Построим нильпотентный оператор $N = \phi - \lambda I$, соответствующий собственному числу λ . Ранее для поиска жорданова базиса, мы искали корневые векторы максимальной высоты $x^{(k)}$, а затем, применяя этот оператор к ним, получали корневые векторы меньшей высоты.

$$N^i x^{(k)} = x^{(k-i)}$$

Второй способ основан на том, что корневой вектор высоты 1 – это собственный вектор. А значит для него справедливо

$$x^{(1)} = Nx^{(2)} = (\phi - \lambda I)x^{(2)}$$

Откуда следует, что для поиска корневого (присоединенного) вектора высоты 2, необходимо найти решения неоднородной СЛАУ

$$(A_\phi - \lambda E)x^{(2)} = x^{(1)},$$

где $x^{(1)}$ – собственный вектор, который предполагается известным.

Таким образом, последовательно решая неоднородные СЛАУ, можно найти все корневые векторы, образующие текущую жорданову цепочку (столбец диаграммы Юнга). Для поиска остальных жордановых цепочек, составляющих жорданов базис, необходимо брать следующий собственный вектор и также по нему "достраивать" столбец.

Геометрический нюанс

Предположим, что V_i — собственное подпространство размерности 2, т.е. в нем может быть найдено два собственных вектора x_1, x_2 . Встает вопрос — к какому из них необходимо искать присоединенные? Алгоритм следующий:

1. Найти присоединенные векторы к x_1 .
2. Найти присоединенные векторы к x_2 .
3. Если ни к одному из них невозможно найти присоединенный вектор, но точно известно, что он должен быть (из сравнения геометрической и алгебраической кратности), то можно предположить, что может быть найден присоединенный вектор y к какой-то линейной комбинации векторов x_1 и x_2 . Для этого необходимо решить систему вида:

$$(A_\phi - \lambda E)y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

где α_1 и α_2 предполагаются произвольными. В процессе сведения расширенной матрицы к упрощенному ступенчатому виду окажется, что данная СЛАУ совместна не при любых α_1, α_2 (см. продолжение нулевой строки). Именно это сигнализирует о том, что присоединенный вектор может быть найден к линейной комбинации исходных собственных векторов. Фиксируя коэффициенты линейной комбинации можно получить явный вид для присоединенного вектора y .

Геометрически (см. рисунок ниже) это означает, что образом корневого вектора относительно нильпотентного оператора не может являться вектор u_1 или u_2 , но может являться вектор $v = 2u_1 + 1.5u_2$. Именно его нам и нужно найти.

Жорданов базис

Еще один нюанс, связанный с записью векторов в жорданов базис:

1. Части жорданова базиса, относящиеся к различным собственным числам, перестановочны — изменение их порядка приведет только к перестановке жордановых блоков.
2. Внутри каждой части жорданова базиса, соответствующей собственному числу, жордановы цепочки также перестановочны — изменение их порядка приведет только к перестановке жордановых клеток внутри блока. НО(!) перемещать в другую часть жорданова базиса не рекомендуется, т.к. это нарушит деление на жордановы блоки.
3. Каждая жорданова цепочка должна записываться, начиная с корневого вектора меньшей высоты (собственного) к корневым векторам большей высоты (присоединенным).
4. Если присоединенный вектор y находился к линейной комбинации собственных x_1 и x_2 (или других корневых меньшей высоты), то сначала записывается любой из

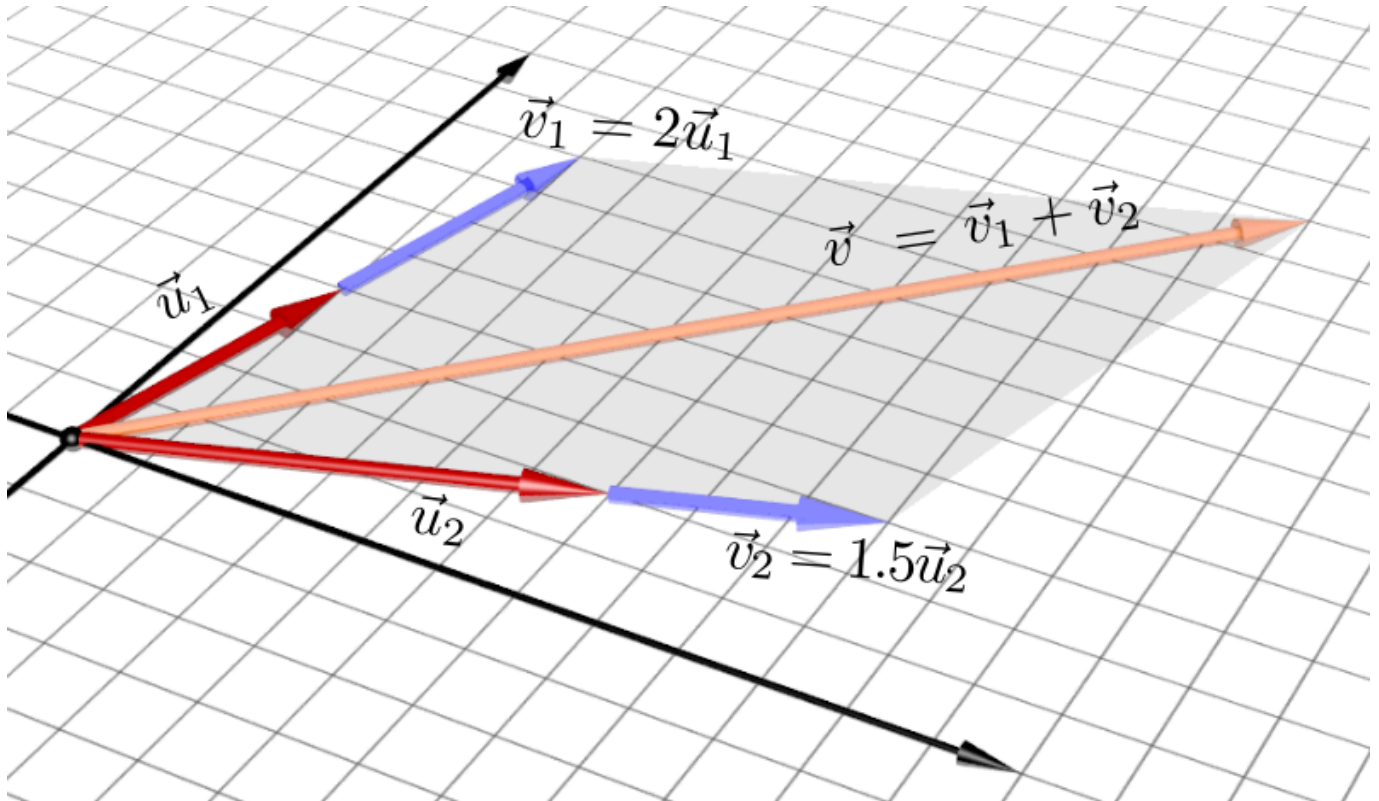
собственных, затем их линейная комбинация, а только затем присоединенный, т.е.

$$\{x_1, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\}$$

или

$$\{x_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\}$$

Только при выполнении этих условий матрица оператора в базисе примет вид жордановой нормальной формы. В ином случае, могут появиться внедиагональные блоки.



Примеры операторов

В качестве примера поиска присоединенных векторов, воспользуемся теми же самыми операторами, что и на предыдущем практическом занятии:

1.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$
2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
3.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание: построение цепочек присоединенных векторов

Для каждого из операторов:

1. Определите спектр;
2. Постройте нильпотентные операторы в соответствующих подпространствах
 $N_i = A - \lambda_i E$;
3. Найдите собственные векторы как базисные в $\ker N_i$
4. К каждому собственному (или их линейной комбинации) найдите присоединенные векторы в необходимом количестве.
5. Постройте диаграмму Юнга.
6. Постройте ЖНФ.