

Двухсеместровый курс

Теоретический минимум. Раздел 2 (весна).

Список вопросов

1. Что называется ядром линейного отображения?
2. Что называется образом линейного отображения?
3. Какой алгебраической структурой обладает ядро линейного отображения? Образ?
4. Запишите теорему о ранге и дефекте: соотношение, связывающее размерности исходного пространства, ядра и образа линейного отображения.
5. Сформулируйте определение линейного оператора. Как обозначается множество линейных операторов?
6. Дайте определение алгебре над полем.
7. Тезисно обоснуйте, почему $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ можно считать алгеброй над полем $\mathbb{K}$.
8. Поясните, как строится изоморфизм $\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$.
9. Что называется определителем линейного оператора?
10. В каком случае линейный оператор считается обратимым?
11. Как определитель линейного оператора связан с его обратимостью?
12. Какое подпространство называется инвариантным относительно оператора? Тривиальные примеры.
13. Что называется ограничением (сужением) оператора на подпространство?
14. Почему представление пространства в виде прямой суммы инвариантных подпространств упрощает изучение оператора?
15. Запишите определение собственного вектора и собственного числа линейного оператора.
16. Какие собственные числа и собственные векторы имеет нуль-оператор?
17. Какие собственные числа и собственные векторы имеет тождественный оператор?
18. Дайте определение собственного подпространства, соответствующего собственному значению λ . Укажите обозначение такого пространства.
19. Что показывает геометрическая кратность собственного числа?
20. Как определяется характеристический многочлен оператора?
21. Почему не всякий корень характеристического многочлена является собственным значением оператора?
22. Дайте определение спектру оператора.
23. Что показывает алгебраическая кратность собственного числа?
24. Как связаны алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа?
25. В каком случае линейные подпространства называются линейно независимыми?
26. Дайте определение диагонализируемому оператору.

27. Как выглядит спектральное разложение оператора? Поясните используемые обозначения.
28. Запишите критерий диагонализруемости.
29. Сформулируйте определение корневого вектора оператора.
30. Что называется высотой корневого вектора?
31. Определите корневое пространство.
32. Запишите свойства корневых пространств.
33. Будут ли линейно независимыми корневые пространства, соответствующие разным собственным значениям?
34. Сформулируйте определение нильпотентного оператора.
35. Что такое циклическое подпространство нильпотентного оператора?
36. Что называется жордановой цепочкой?
37. Покажите нильпотентную жорданову клетку порядка k . За что отвечает порядок k ?
38. Запишите основную теорему о структуре нильпотентного оператора.
39. Как выбрать жорданов базис?
40. Как с помощью диаграммы Юнга сказать о структуре нильпотентного оператора?
41. Что такое жорданова клетка?
42. Что такое жорданов блок?
43. В каком случае жорданов блок будет описываться одной жордановой клеткой?
44. Сформулируйте определение жордановой нормальной формы (ЖНФ) оператора.
45. Когда существует ЖНФ?
46. Почему операторы между пространствами над полем комплексных чисел имеют ЖНФ?
47. Если известен спектр оператора и геометрические кратности собственных значений, как определить число жордановых клеток в блоке для заданного собственного числа?
48. Если известна диаграмма Юнга, как по ней определить геометрическую кратность собственного значения?
49. Если известен спектр оператора и геометрические кратности собственных значений, как определить число жордановых блоков?
50. Запишите два подхода, позволяющих найти жорданов базис.
51. Как построить нильпотентные операторы при известном спектре линейного оператора?
52. Как найти высоту корневого вектора, если известен соответствующий нильпотентный оператор?
53. Как получить жорданову цепочку, если известен спектр оператора и порядок нильпотентности?
54. Что такое операторный полином?
55. Сформулируйте определение аннулирующего полинома оператора.

56. Запишите теорему Гамильтона-Кэли.
57. Что такое спектральный проектор?
58. Если подпространство инвариантно относительно оператора, то будет ли оно инвариантно относительно соответствующего операторного полинома?
59. Запишите операторный полином от диагонализуемого оператора.
60. Запишите матрицу-результат действия функции на диагональную матрицу и на произвольный жорданов **блок**.
61. Зачем осуществляется разложение функции в ряд тейлора при вычислении ее действия на матрицу оператора?
62. Будет ли сохраняться блочно-диагональный вид матрицы оператора при возведении в степень? Почему?
63. Как находится функция от матрицы оператора в произвольном базисе?