

Двухсеместровый курс

Теоретический минимум. Раздел 3 (весна).

Список вопросов.

1. Дайте определение метрическому пространству.
2. Линейна ли метрическая форма по обоим аргументам? Объясните ответ.
3. Дайте определение нормированному пространству.
4. Как можно метризовать нормированное пространство?
5. Что называется (комплексным) евклидовым пространством?
6. Что такое метрический тензор в евклидовом пространстве?
7. Как записать скалярное произведение в координатной форме, используя метрический тензор?
8. Что называется матрицей Грама?
9. Запишите свойства матрицы Грама.
10. Запишите неравенство Шварца.
11. При каком условии неравенство Шварца становится равенством?
12. Как вводится норма, порожденная скалярным произведением?
13. Какие векторы называются ортогональными?
14. Как связана ортогональность векторов и линейная (не)зависимость.
15. Запишите теорему Пифагора для набора попарно ортогональных векторов.
16. Как определяется ортогональность вектора подпространству?
17. Что такое ортогональное дополнение пространства?
18. В чем цель процесса ортогонализации?
19. Можно ли ортогонализировать линейно зависимый набор векторов? Ответ поясните.
20. Опишите [кратко] процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
21. Как соотносятся нормы начального и ортогонализированного (с помощью ортогонализации Грама-Шмидта) наборов?
22. Какой набор векторов называется ортонормированным?
23. Как осуществляется нормировка ортогонального набора?
24. Какой вид имеет матрица Грама для ортогонального набора? Ортонормированного?
25. Что такое ортогональная сумма подпространств?
26. Как представить евклидово пространство в виде прямой суммы с помощью ортогонального дополнения?

27. Что такое ортогональный проектор?
28. Является ли ортогональный проектор линейным оператором? Почему?
29. В чем суть задачи о перпендикуляре?
30. Запишите алгоритм отыскания компонент вектора при разложении $E = L \oplus L^\perp$.
31. Что такое коэффициенты Фурье?
32. Запишите соотношение, связывающее норму ортогональной проекции вектора и коэффициенты Фурье.
33. Запишите неравенство Бесселя.
34. В чем заключается геометрический смысл неравенства Бесселя?
35. В каком случае система ортонормированных векторов является полной?
36. Дайте определение эрмитово сопряженному оператору.
37. Запишите свойство аддитивности и контравариантности операции эрмитового сопряжения.
38. Запишите свойства сопряженной однородности и инволютивности эрмитового сопряжения. Обозначения поясните.
39. Как найти матрицу эрмитово сопряженного оператора?
40. Какой оператор называется самосопряженным?
41. В чем разница между самосопряженным и эрмитовым операторами?
42. Запишите свойства матриц самосопряженного и эрмитова операторов.
43. Что можно сказать про свойства собственных векторов эрмитова оператора относительно скалярного произведения?
44. Запишите спектральную теорему для эрмитова оператора.
45. Запишите определение унитарного оператора.
46. Запишите три свойства, которые определяют унитарный оператор.
47. Чему может быть равен определитель унитарного оператора?
48. Запишите свойства матрицы унитарного оператора.
49. Что такое ортогональная матрица?
50. Что можно сказать про собственные числа унитарного оператора?
51. Запишите спектральную теорему для унитарного оператора.
52. Почему эрмитов оператор диагонализуем?
53. Дайте определение векторам, ортогональным относительно билинейной формы. Какой должна быть билинейная форма?
54. Что такое базис ортогональный, относительно билинейной формы?
55. Как выглядит билинейная форма в ортогональном относительно нее базисе?

56. Запишите вид нормальный вид квадратичной формы в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.
57. Что такое сигнатура квадратичной формы и из чего она состоит?
58. Дайте определение положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы.
59. Дайте определение положительно (отрицательно) полуопределенной квадратичной формы.
60. В чем геометрический смысл индексов инерции квадратичной формы?
61. Сформулируйте критерий Сильвестра и для чего он применяется.
62. Что такое оператор, присоединенный к квадратичной форме?
63. Каким свойством обладает присоединенный к квадратичной форме оператор?
64. Как связана матрица квадратичной формы, матрица Грама и матрица присоединенного оператора?
65. Как диагонализировать квадратичную форму, используя ее связь с присоединенным оператором?
66. В чем заключается основная идея метода Лагранжа? Опишите кратко метод.
67. Как применить метод Лагранжа, если отсутствуют квадраты координат, но при этом существует их произведение?
68. Запишите общий вид верхнетреугольного преобразования базиса.
69. Запишите канонический вид квадратичной формы в результате применения метода Якоби. Поясните обозначения.
70. При каком условии может применяться метод Якоби? Поясните обозначения.
71. Опишите алгоритм одновременной диагонализации двух квадратичных форм.
72. Какие преобразования необходимо использовать при одновременной диагонализации двух квадратичных форм?