Евклидово пространство

Содержание

§1. Метрическое и нормированное пространства

Определение. Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

M1. $\rho(x, y) \geqslant 0, \quad \rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y;$

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$

M3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Замечание. Отображение ρ называется **расстоянием** (или метрикой).

Пример 1.1. Приведем несколько примеров:

(а) M - произвольное, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y; \end{cases}$

(б) $M = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$;

(в) $M = \mathbb{R}^n$, $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i - \eta^i\right)^2}$;

(г) $M = C[a, b]$, $\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$;

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

N1. $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$

N3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^p}, \quad \|x\|_m = \max_{i=1\ldots n} \left|\xi^i\right|$$

Лемма 1.1. *Любое нормированное пространство может быть метризовано:*

$$\rho(x,y) = \|x-y\|.$$

Доказательство. Действительно, аксиома **M1** следует из **N1**, точно также **M2** следует из **N2**:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = \rho(y,x).$$

Для доказательства **M3** положим в **N3**

$$x = a-b, \quad y = b-c, \quad \Rightarrow \quad x+y = a-c,$$

которые после подстановки сразу дают необходимое неравенство. □

§2. Евклидово пространство

Определение. Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана *метрическая форма* $g(x,y) = \langle x,y\rangle$ со следующими свойствами:

E1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \alpha\langle x,y_1\rangle + \beta\langle x,y_2\rangle$ - линейность по второму аргументу;

E2. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ - эрмитовость;

E3. $\langle x,x\rangle \geqslant 0, \quad \langle x,x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0.$

Замечание. Из аксиом **E1** и **E2**, в частности, следует

$$\langle\alpha x,y\rangle = \overline{\langle y,\alpha x\rangle} = \overline{\alpha\cdot\langle y,x\rangle} = \overline{\alpha}\cdot\langle x,y\rangle.$$

То есть, из первого аргумента множитель выносится с сопряжением.

Замечание. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис евклидова пространства X. Пусть также $x,y\in X$, так что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\langle x,y\rangle$:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i,j=1}^n \overline{\xi^i}\eta^j\langle e_i,e_j\rangle = \overline{\xi^i}\eta^j g_{ij}.$$

Определение. Совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i,e_j)$ называется **метрическим тензором**, а соответствующая матрица $G = \|g_{ij}\|$ - **матрицей Грама**:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \dots & \langle e_2,e_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n,e_1\rangle & \langle e_n,e_2\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Замечание. Свойства матрицы Грама:

(а) $G_{ji} = \overline{G}_{ij}$;

(б) $G_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$;

(в) $\overline{\xi^i} \xi^j g_{ij} \geqslant 0, \quad \overline{\xi}^i \xi^j g_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^i = 0, \quad \forall i.$

Пример 2.1. Пример нарушения аксиомы **E3** - пространство Минковского. Пусть $X = \mathbb{R}^4, \quad x = \left(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\right)^T$ и

$$\langle x, y \rangle = \xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3.$$

Рассмотрим вектор $x = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^T$, тогда

$$\langle x, x \rangle = 1 - 1/3 - 1/3 - 1/3 = 0,$$

и значит x - нулевой вектор ($x \neq 0$, но $g(x, x) = 0$).

§3. Неравенство Шварца

Лемма 3.1. *Евклидово пространство может быть нормировано:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Доказательство. Проверка первых двух аксиом нормы проводится непосредственно:

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} \geqslant 0,$$
$$\sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Проверка последней аксиомы сводится к проверке утверждения

$$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle,$$

которое составляет утверждение теоремы о *неравенстве Шварца.*

□

Теорема 3.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму, с параметром λ:

$$\begin{gathered}
\|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \\
= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle = \\
= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda \left(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \right) + \|y\|^2 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

(а) Пусть $X = X(\mathbb{R})$, тогда $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ и выражение преобразуется в

$$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Тогда $D = 4 |\langle x, y \rangle|^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$ и теорема доказана.

(б) Пусть $X = X(\mathbb{C})$, тогда $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ и расмотрим

$$\langle x, y \rangle = e^{i\varphi} |\langle x, y \rangle| , \quad \varphi = \arg \langle x, y \rangle .$$

Определим вектор $z = e^{-i\varphi} x$, тогда

$$\langle z, y \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, y \rangle = r = | \langle x, y \rangle | \in \mathbb{R},$$
$$\langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \left\langle x, e^{-i\varphi} x \right\rangle = \langle x, x \rangle .$$

Далее применим результат первого доказательства

□

Лемма 3.2. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство тогда и только тогда, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$|\langle x, \alpha x \rangle| \leqslant \|x\| \|\alpha x\| , \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \|x\|^2 \leqslant |\overline{\alpha}| \|x\|^2 , \quad |\overline{\alpha}| = |\alpha| .$$

Пусть $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, тогда

$$D/4 = |\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \neq 0 : \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda x + y = 0.$$

□

Лемма 3.3. *Для отображения $\|x\| : X \to \mathbb{R}$, порожденного скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, справедлива аксиома **N3**.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку преобразований

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2 \|x\|^2 \|y\|^2 + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Откуда следует, что

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

□

Тем самым мы показали, что скалярное произведение действительно порождает норму, т.к. выполняются все аксиомы.