Ортогональность

Содержание

§1 Ортогональные векторы **1**

§2 Процесс ортогонализации **2**

§3 Ортогональный базис **3**

§4 Ортогональная сумма подпространств **4**

§5 Ортогональный проектор **4**

§6 Дополнительно: соотношения о проекциях **5**

§1. Ортогональные векторы

Определение 1.1. Пусть $x, y \in E$. Говорят, что x **ортогонален** y (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

Лемма 1.1. *Пусть $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_k$, тогда $x \perp \mathcal{L}\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.*

Доказательство.

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x, y_i \rangle .$$

□

Теорема 1.1. *(Об ортогональности и линейной независимости)*
Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - линейно независимый набор.

Доказательство. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0, \quad \|x_j\| \neq 0,$$

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0.$$

□

Теорема 1.2. *(Пифагора) Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

Доказательство.

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} x_i, \sum_{j=1}^{k} x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

□

Определение 1.2. Говорят, что x **ортогонален подпространству** $L \leqslant X_E$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Замечание. Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

Определение 1.3. **Ортогональным дополнением** пространства L называется множество

$$M = \{x \in X : \quad x \perp L\} .$$

Лемма 1.2. *Ортогональное дополнение является подпространством X_E.*

Доказательство. В этом легко убедиться прямой проверкой.

□

§2. Процесс ортогонализации

Теорема 2.1. *Пусть $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ - линейно-независимый набор в евклидовом пространстве X_E, тогда $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ можно преобразовать в ортогональный набор $\{e_j\}_{j=1}^{k}$.*

Доказательство. Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

1. $e_1 = x_1$,
2. $e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle e_1, x_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$,
3. $e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1, e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle e_1, x_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}, \alpha_3^2 = -\frac{\langle e_2, x_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle}$,

... $\ldots$

m. $e_m = x_3 + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle e_j, x_m \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle}$.

□

Замечание. Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.

Доказательство. От противного. Пусть

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1 = 0,$$

тогда

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m-1}^i x_i + \ldots + \alpha_m^2 \sum_{i=1}^{2} \alpha_2^i x_i + \alpha_m^1 x_1 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = 0,$$

но это означает, что $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно зависимый набор. Противоречие.

$\square$

Замечание. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

Замечание. Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leqslant \|x_m\|$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m \rangle = \langle e_m, x_m \rangle + 0 + \ldots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m \rangle \leqslant \|x_m\| \cdot \|e_m\|.$$

$\square$

§3. Ортогональный базис

Определение 3.1. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства X_E называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j\neq i} \rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Теорема 3.1. *Любой базис евклидова пространства X_E может быть преобразован к ортонормированному базису.*

Доказательство. Ортогонализация Грама-Шмидта и нормировка. $\square$

Лемма 3.1. *Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ в X_E ортонормирован тогда и только тогда, когда*

$$\forall x, y \in X_E: \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

Доказательство. Действительно, прямой проверкой можем убедиться, что

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\xi^i} \eta^j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\xi^i} \eta^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

$\square$

Замечание. Матрица Грама скалярного произведения в ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы:

$$G_{\text{ОБ}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad G_{\text{ОНБ}} = \|\delta^i_j\|.$$

§4. Ортогональная сумма подпространств

Теорема 4.1. *Пусть L - подпространство евклидова пространства X_E и*

$$M = L^{\perp} = \{x \in X_E : \quad x \perp L\},$$

тогда

$$E = L\dot{+}M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X_E \quad \exists! z \in L,\ h \in L^{\perp} : \quad x = z + h.$$

Доказательство. Выполним по пунктам:

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^k$ - ортонормированный базис в L,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^k$ до базиса X_E : $\quad \{e_1, e_2, \ldots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n\},$$

4. $\forall x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i e_i = z + h \quad \Rightarrow \quad X_E = L + M.$
5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и

$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1\rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = 0.$$

□

Замечание. В данном случае прямая сумма $X_E = L\dot{+}M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M.

Замечание 4.1. В более общем случае, сумма попрано ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j\neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{s} L_i.$$

§5. Ортогональный проектор

Определение 5.1. **Ортогональным проектром** на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^{\perp}(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^{\perp}.$$

Замечание 5.1. Тогда вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L.

Теорема 5.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ортонормированный базис в X_E. Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:*

$$\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$x = z + h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_L^{\perp} z = z, \quad \mathcal{P}_L^{\perp} h = 0.$$

Действительно, пусть e_j - элемент базиса, лежащий в L, тогда

$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_j = \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, e_i \rangle e_i = e_j.$$

Если e_l - элемент базиса, лежащий в M $(k < l \leq n)$, тогда

$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_l = \sum_{i=1}^{k} \langle e_l, e_i \rangle e_i = 0.$$

□

Определение 5.2. **Задачей о перпендикуляре** называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M.

Замечание 5.2. Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ подпространства L;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^{\perp} = x - \mathcal{P}_L^{\perp}$.

Определение 5.3. Коэффициенты $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

§6. Дополнительно: соотношения о проекциях

Лемма 6.1. *Имеет место следующее сравнение:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\| \leqslant \|x\|$$

Доказательство. Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\|^2 + \left\|\mathcal{P}_M^{\perp} x\right\|^2 = \|x\|^2 .$$

$\square$

Замечание. При $x \in L$ данное неравенство обращается в равенство.

Лемма 6.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left|\alpha_i\right|^2$$

Доказательство. Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\|^2 = \left\langle \mathcal{P}_L^{\perp} x, \mathcal{P}_L^{\perp} x \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} \left\langle \langle x, e_i \rangle e_i, \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left|\alpha_i\right|^2$$

$\square$

Лемма 6.3. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} \left|\alpha_i\right|^2 , \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left|\alpha_i\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

Теорема 6.1. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ является полной в X_E тогда и только тогда, когда для любого $x \in X_E$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left|\alpha_i\right|^2 , \quad \alpha_i = \langle e_i, x \rangle \quad \forall x \in X_E.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно.
$\Leftarrow$ Пусть для любого x выполняется равенство Парсеваля. Предположим, что

$$x = z + h, \quad z = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad h \perp z,$$

тогда по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2, \quad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 + \|h\|^2,$$

откуда следует, что $h = 0$ и система $\{e_i\}_{i=1}^k$ - полная в X_E.

$\square$