Диагонализация квадратичных форм II

Содержание

§1. Методы Лагранжа и Якоби

Рассмотрим ряд методов, которые могут использоваться для нахождения диагональных представлений квадратичных форм. Пусть $V(\mathbb{K})$ — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ размерность которого $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Теорема 1.1. *Любая квадратичная форма $q(v)$, заданная в линейном пространстве V, с помощью невырожденного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство. Доказательство произведем при помощи **метода Лагранжа**, основная идея которого заключается в последовательно приведении квадратного трехчлена до полного квадрата.

Если $q(v) = 0$ для $\forall v \in V$, то квадратичная (нулевая) форма уже представлена в каноническом виде по определению. Поэтому все дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении, что она ненулевая, то есть $\exists v \in V, q(v) \neq 0$. В частности, из этого следует, что существуют ненулевые коэффициенты квадратичной формы в некотором базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Здесь возможно два случая. Первый заключается в том, что существует коэффициент $a_{ii} \neq 0$. Тогда, не теряя общности можем предположить, что это коэффициент a_{11} для удобства. Этого всегда можно достичь простой перестановкой базисных элементов. Основная часть метода будет применяться именно в этом случае, но сначала рассмотрим второй случай — когда все $a_{ii} \neq 0$. Этому соответствует самый простой случай, когда

$$q(v) = v^1 v^2,$$

где верхний индекс означает нумерацию координаты, а не степень. Тогда мы можем совершить преобразование вида

$$v^1 = \widetilde{v}^1 - \widetilde{v}^2, \qquad v^2 = \widetilde{v}^1 + \widetilde{v}^2, \qquad v^i = \widetilde{v}^i, \quad i = 3, .., n$$

которое очевидно является невырожденным и приводит квадратичную форму к виду

$$q(x) = (\widetilde{v}^1 - \widetilde{v}^2)(\widetilde{v}^1 + \widetilde{v}^2) = (\widetilde{v}^1)^2 - (\widetilde{v}^2)^2,$$

к которой мы можем применять уже дальнейшие преобразования. Далее будем считать, что до исчерпания координат и завершения метода, всегда найдется слагаемое, содержащее квадрат следующей по номеру координаты.

Пусть квадратичная форма в заданном базисе имеет вид

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i v^j, \qquad a_{11} \neq 0$$

Сгруппируем слагаемые таким образом, что в первой выделенной группе будут все слагаемые, содержащие **ведущую координату** v^1, а под знаком суммы соберем все остальные слагаемые:

$$q(v) = a_{11}(v^1)^2 + 2a_{12}v^1v^2 + \ldots + 2a_{1n}v^1v^n + \sum a_{ij}v^iv^j \Longrightarrow$$

и преобразуем выделенную группу, вычленяя полный квадрат данного выражения.

$$\rightarrow = a_{11}\left(v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}(v^2)^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}(v^n)^2 -$$
$$-2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}(v^2)(v^3) - \ldots - 2\frac{a_{1,n-1}a_{1n}}{a_1 1}v^{n-1}v^n + \sum a_{ij}v^iv^j =$$
$$= a_{11}\left(v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n\right)^2 + \sum{}' \widetilde{a}_{ij}v^iv^j$$

В этом выражении все появившиеся слагаемые были "свернуты"под знак суммы. Теперь, рассматривая часть квадратичной формы, которая оказалась под этим знаком суммы $\sum'$, мы можем снова применить выделения полного квадрата, но уже относительно координаты v^2. Последовательно выполняя эти действия к каждой из координат, имеем возможность получить диагональный вид квадратичной формы, полученный при помощи преобразования

$$\begin{cases} \widetilde{v}^1 = v^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}v^2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}v^n \\ \widetilde{v}^2 = v^2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}v^3 + \ldots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}v^n \\ \widetilde{v}^k = v^k + \sum_{i=k}^{n} \frac{a_{ki}}{a_{kk}}v^i \\ \widetilde{v}^n = v^n \end{cases}$$

□

§2. Метод Якоби диагонализации квадратичных форм

Теорема 2.1. *Пусть квадратичная форма $q(v)$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ имеет матрицу $A_q = (a_{ij})$, и все её **главные миноры**:*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-1} \neq 0.$$

Тогда существует ***единственное*** *верхнетреугольное преобразование базиса* $\{e_i\} \to \{g_i\}$*, приводящее* $q(v)$ *к каноническому виду:*

$$q(v) = \Delta_1 (v^1)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}(v^2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}(v^n)^2.$$

Доказательство. Пусть новые векторы g_j задаются верхнетреугольным преобразованием:

$$\begin{cases} g_1 = e_1, \\ g_2 = s_{21}e_1 + e_2, \\ g_3 = s_{31}e_1 + s_{32}e_2 + e_3, \\ \vdots \\ g_n = s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2 + \ldots + e_n, \end{cases}$$

Очевидно, что данное преобразование будет невырожденным. Следовательно набор векторов $\{g_j\}_{j=1}^n$ является базисом. Для связи этого преобразования с квадратичной формой, предположим, что коэффициенты s_{ji} $(j > i)$ находятся из условия диагональности $q(v)$.

Это условие обеспечивается следующими рассуждениями. Пусть $b(u, v)$ — билинейная форма, которая является полярной к данной билинейной форме. Очевидно, что для диагонального вида квадратичной формы $q(v)$ необходимо, чтобы и полярная билинейная форма была диагональной. Для канонического вида необходимо:

$$b(g_j, e_i) = 0 \quad \text{при } i < j,$$

тогда будет выполняться и $b(g_j, g_i) = 0$ для $i < j$, т.к. каждый из g_k выражается через векторы из $\{e_i\}_{i=1}^k$.

Для каждого $j \geqslant 2$, подставляя $g_j = \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk}e_k + e_j$, получаем систему уравнений.

$$\sum_{k=1}^{j-1} s_{jk}a_{ki} + a_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, j-1),$$

где $a_{ki} = b(e_k, e_i)$.

Проанализируем полученную систему относительно неизвестных $\{s_{jk}\}$. Матрица системы совпадает с главным минором Δ_{j-1}. Из условия $\Delta_{j-1} \neq 0$ и теоремы Крамера следует единственность решения:

$$s_{jk} = (-1)^{k+j}\frac{\Delta_k^{(j)}}{\Delta_{j-1}},$$

где $\Delta_k^{(j)}$ — минор с заменой k-го столбца на $(a_{j1}, \ldots, a_{j,j-1})^T$, а множитель (-1) возникает из-за того, что в "классических" формулах Крамера столбец свободных членов находится в правой части системы.

Перейдем к вычислению диагональных коэффициентов. Из условий ортогональности $q(g_j, g_i) = 0$ при $i < j$ следует:

$$\lambda_j = q(g_j) = b(g_j, g_j) = b(e_j, g_j) = b\left(e_j, \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk} e_k + e_j\right) = \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk} a_{jk} + a_{jj}.$$

Подставляя выражение для s_{jk}:

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{j-1} \left[(-1)^{k+j} \frac{\Delta_k^{(j)}}{\Delta_{j-1}} \right] a_{jk} + a_{jj}.$$

Числитель этого выражения совпадает с разложением определителя Δ_j по j-й строке (теорема Лапласа):

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{j+k} a_{jk} \Delta_k^{(j)}.$$

Следовательно:

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}.$$

Ненулевые миноры Δ_j гарантируют единственность s_{ji}. Следовательно, преобразование $\{e_i\} \to \{g_i\}$ единственно. $\square$

Замечание 2.1. Если $\Delta_j = 0$ для некоторого j, метод Якоби неприменим. В этом случае используется метод Лагранжа.

§3. Одновременная диагонализация двух квадратичных форм

Теорема 3.1. *Пусть $q_1(v)$ и $q_2(v)$ – две квадратичные формы в линейном пространстве V размерности n, причём $q_1(v)$* ***невырождена*** *(т.е. $\det A \neq 0$, где A – матрица $q_1(v)$). Тогда существует базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, в котором обе формы диагональны:*

$$\begin{cases} q_1(v) = \lambda_1 (v^1)^2 + \lambda_2 (v^2)^2 + \ldots + \lambda_n (v^n)^2, \\ q_2(v) = \mu_1 (v^1)^2 + \mu_2 (v^2)^2 + \ldots + \mu_n (v^n)^2, \end{cases}$$

где $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Построим доказательство конструктивно, приведя алгоритм нахождения нужного преобразования.

(а) **Диагонализация $q_1(v)$:**
Приведем квадратичную форму $q_1(v)$ к диагональному виду с помощью ортогональных преобразований, например при помощи спектрального анализа присоединенного оператора к этой квадратичной форме. Получим базис $\{f_i\}$, в котором форма имеет матрицу

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

(б) **Преобразование $q_2(v)$:**
Вычислим матрицу B формы $q_2(v)$ в базисе $\{f_i\}$:

$$B = T_1^T B' T_1,$$

где T_1 — матрица перехода из $\{e_i\}$ в $\{f_i\}$, B' — исходная матрица $q_2(v)$. Еще раз обратим внимание, что преобразование T является ортогональным, т.к. основано на собственных векторах присоединенного оператора.

(в) **Диагонализация $q_2(v)$:**
Вновь применим спектральную теорию для диагонализации второй квадратичной формы, находя ортогональное преобразование из $\{f_i\}$ в $\{g_i\}$, которое позволит преобразовать квадратичную форму $q_2(v)$ в диагональный вид

$$B \quad \mapsto \quad \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

При этом, в связи с тем, что преобразование T_2 является ортогональным, оно не изменит диагональный вид матрицы квадратичной формы $q_1(v)$, а следовательно композиция ортогональных преобразований $T_2 \circ T_1$ и есть искомое преобразование.

□

Замечание 3.1. Если невырожденная квадратичная форма является положительно определенной, то тогда можно интерпретиировать полярную к ней билинейную форму как матрицу Грама скалярного произведения. В этом случае, исходный базис может быть ортогонализован процессом Грама-Шмидта, а для поиска диагонального представления второй квадратичной формы также использовать полученный базис и имеющееся "скалярное произведение".