Линейные отображения

Предыдущие темы были посвящены рассмотрению отображений, обладающих свойствами линейности по аргументам, результатом которых был скаляр из некоторого поля. Однако вместе с тем, существует еще один важный тип отображений, определяющий сопоставление элементов двух линейных пространств. Как мы увидим далее, линейные формы являются частным случаем этого семейства отображений.

§1. Основные понятия

Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. Отображение $\varphi : V \to W$ линейного пространства V в линейное пространство W называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ выполяются следующие свойства

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$$

Замечание 1.1. Множество линейных отображений действующих их $V(\mathbb{K})$ в $W(\mathbb{K})$ будем обозначать $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Пример 1.1. Примеры линейных отображений:

(а) Нулевое отображение:

$$\mathcal{O}\colon V \to W \qquad \mathcal{O}x = 0_W, \qquad \forall x \in V$$

(б) Тождественное отображение:

$$\mathcal{I}\colon V \to V \qquad \mathcal{I}x = x, \qquad \forall x \in V$$

(в) Растяжение:

$$\varphi\colon V \to V \qquad \varphi x = \lambda x, \qquad \forall x \in V$$

(г) Пусть V разбивается в прямую сумму подпространств $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда проектором будем называть отображение:

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2}\colon V \to V, \qquad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = x_1, \qquad \forall x_1 \in V_1$$

(д) Пусть $\mathbb{R}^{\leqslant n}[t]$ — пространство полиномов степени не выше n, а символом $\mathcal{D}$ будем обозначать дифференцирование

$$\mathcal{D}p = \frac{dp}{dt}, \qquad \forall p \in \mathbb{R}^{\leqslant n}[t]$$

(e) Пусть $M_n(\mathbb{K})$ — пространство квадратных матриц n-го порядка, на котором введены отображения симметризации Sym и антисимметризации Asym

$$\mathrm{Sym}(A) = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \qquad \mathrm{Asym}(A) = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

Замечание 1.2. Нередко при записи символа линейного отображения и его аргумента опускаются скобки как в некоторых примерах выше. Иными словами, записи $\varphi(x)$ и φx считаются эквивалентными.

§2. Матрица отображения

Пусть $\varphi : V \to W$, причем $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $\dim_{\mathbb{K}} W = m$, а также $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно.

Определение 2.1. Матрицей линейного отображения φ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A_\varphi = \{\alpha_i^j\}$, в столбцах которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}$ в базисе $\{g_j\}$

$$\varphi e_i = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j$$

Пример 2.1. (а) Нулевое отображение

$$\mathcal{O} \to \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(б) Тождественное отображение

$$\mathcal{I} \to E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(в) Матрица проектора на V_1, если $V = V_1 \oplus V_2$, найденная в базисе, согласованном с обоими подпространствами

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} \to P_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$$

так как

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = x, \qquad \mathcal{P}_{V_1}^{\parallel V_2} x = 0, \qquad \forall x \in V_1$$

Теорема 2.1. *Задание линейного отображения φ эквивалентно заданию его матрицы A_φ в фиксированной паре базисов.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ — линейное отображение и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ — базисы пространств V и W соответственно. Рассмотрим элементы $x \in V$ и $y \in W$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \qquad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j, \qquad \varphi(x) = y$$

Действие отображения на элемент x можно представить как

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \alpha_i^j$$

Тем самым мы обеспечили однозначность определения образа элемента, используя лишь коэффициенты матрицы оператора при условии, что сами векторы и матрица определены в одной и той же паре базисов. □

§3. Пространство линейных отображений

Рассмотрим два линейных пространства $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ и множество всех линейных отображений, которые действуют между ними. Пусть также φ, ψ — линейные отображения из V в W.

Определение 3.1. Линейные отображения φ и ψ будем считать равными, если

$$\forall x \in V \qquad \varphi(x) = \psi(x)$$

Определение 3.2. Отображение $\chi : V \to W$ называется суммой линейных отображений $\varphi, \psi : V \to W$, если

$$\forall x \in V \qquad \chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Лемма 3.1. *Сумма $\chi = \varphi + \psi$ линейных отображений является линейным отображением.*

Доказательство. Для доказательства необходимо рассмотреть линейные свойства суммы линейных отображений:

$$\chi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1 + x_2) + \psi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \psi(x_1) + \psi(x_2) =$$
$$= (\varphi + \psi)(x_1) + (\varphi + \psi)(x_2) = \chi(x_1) + \chi(x_2)$$

$$\chi(\alpha x) = \varphi(\alpha x) + \alpha\psi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) + \alpha\psi(x) = \alpha(\varphi + \psi)(x) = \alpha\chi(x)$$

□

Следствие 3.0.1. *Матрица C_χ линейного отображения $\chi = \varphi + \psi$ определяется суммой матриц A_φ и B_ψ.*

$$C_\chi = A_\varphi + B_\psi$$

Определение 3.3. Отображение ω называется произведением линейного отображения φ на число $\lambda \in \mathbb{K}$, если

$$\forall x \in V \qquad \omega(x) = \lambda\varphi(x)$$

Лемма 3.2. *Произведение $\omega = \lambda\varphi$ линейного отображения на скаляр является линейным отображением.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству суммы. □

Следствие 3.0.2. *Матрица D_ω линейного отображения $\omega = \lambda\varphi$ определяется умножением матрицы A_φ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$.*

$$D_\omega = \lambda A_\varphi$$

Учитывая рассмотренные понятия равенства, определенных операций над отображениями, а также существования нулевого элемента, на множестве линейных отображений можно ввести структуру линейного пространства.

Теорема 3.1. *Множество всех линейных отображений из пространства V в пространство W является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства. □

Замечание 3.1. В силу того, что между отображением и его матрицей в фиксированной паре базисов пространств V и W устанавливается соответствие, которое к тому же сохраняет свойства линейности, можно утверждать, что пространство $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(X, Y)$ изоморфно матричному пространству $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(X, Y) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Композиция линейных отображений

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V, U)$ и $\psi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(U, W)$ — линейные отображения между соответствующими пространствами.

Определение 3.4. Отображение $\chi : V \to W$ называется композицией линейных отображений ψ и φ, если

$$\forall x \in V : \qquad \chi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \varphi(\varphi(x))$$

Лемма 3.3. *Композиция $\chi = \psi \circ \varphi$ линейных отображений является линейным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим образ линейной комбинации векторов из V

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha^i x_i\right) = (\psi\circ\varphi)\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha^i x_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha^i \varphi(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{k}\alpha^i \psi(\varphi(x_i)) = \sum_{i=1}^{k}\alpha^i \chi(x_i)$$

□

Следствие 3.1.1. *Матрица композиции линейных отображений $\chi = \psi \circ \varphi$ определяется произведением матриц B_ψ и A_φ.*

$$C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$$

§4. Преобразование базиса

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, W)$, а в пространствах заданы базисы:

$$\begin{array}{ll} V: & \{e_i\}_{i=1}^{n}, \quad \{e'_j\}_{j=1}^{n} \\ W: & \{g_k\}_{k=1}^{m}, \quad \{g'_l\}_{l=1}^{m} \end{array}$$

Причем известно, что $T = \{\tau^i_j\}$ — матрица перехода из базиса $\{e\}$ в базис $\{e'\}$, а матрица $S = \{\sigma^k_l\}$ — матрица перехода из базиса $\{g\}$ в базис $\{g'\}$.

Теорема 4.1. *Матрица оператора при замене базисов преобразуется как*

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi T$$

Доказательство. Пусть $x \in V$ произвольный элемент пространства V, а y — образ этого элемента. Тогда в паре базисов $\{e\}$ и $\{g\}$

$$\varphi(x) = y \qquad \leftrightarrow \qquad A_\varphi x = y$$

В то же время можно утверждать, что в паре базисов $\{e'\}$ и $\{g'\}$ справедливо

$$\varphi(x) = y \qquad \leftrightarrow \qquad A'_\varphi x' = y'$$

Однако известно, что при изменении базиса соответствующим образом преобразуются координаты векторов x и y

$$x' = T^{-1}x, \qquad y' = S^{-1}y$$

Подставляя данные преобразования в матричное выражение, получаем

$$A'_\varphi T^{-1} x = S^{-1} y$$

Матрицы перехода всегда обратимы, следовательно можно утверждать, что

$$S A'_\varphi T^{-1} = A_\varphi$$

Или, что тоже самое

$$S^{-1} A_\varphi T = A'_\varphi$$

□