Введение в спектральный анализ

Ранее было отмечено, что любому линейному оператору соответствует его матрица в фиксированном базисе. Однако матрицы могут быть различны по своей структуре и тогда может ставиться вопрос о поиске такого базиса, в котором матрица оператора принимает наиболее простой вид. Чтобы шаг за шагом прийти к способу нахождения такого базиса, сначала проведем предварительные рассуждения.

§1. Инвариантные подпространства

Определение 1.1. Подпространство $U \leqslant V$ называется ***инвариантным*** относительно оператора φ (φ-инвариантным), если $\varphi U \leqslant U$, то есть для любого $x \in U$ его образ $\varphi x \in U$.

Замечание 1.1. Нулевое подпространство и всё пространство V инвариантны для любого оператора. Любое подпространство, содержащееся в ядре оператора φ, и любое подпространство, содержащее его образ, φ-инвариантны. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами.

Пример 1.1. Пусть оператор — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Тогда $U_1 = \langle \mathbf{i} \rangle$ и $U_2 = \langle \mathbf{j} \rangle$ инвариантны, а $U_3 = \langle \mathbf{i} + \mathbf{j} \rangle$ — нет.

Пример 1.2. Инвариантные подпространства оператора дифференцирования в $\mathbb{R}^{\leqslant n}[x]$ имеют вид $\mathbb{R}^{\leqslant k}[x]$, $k \leqslant n$.

Ограничение (***сужение***) $\varphi|_U$ линейного оператора φ на инвариантное подпространство U является линейным оператором в U.

Если выбрать базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V так, чтобы инвариантное подпространство U было линейной облочкой первых k базисных векторов, то матрица оператора в этом базисе будет иметь вид $\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где B — матрица оператора $\varphi|_U$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Обратно, если матрица оператора φ имеет такой блочный вид (где B — квадратная матрица размера $k \times k$, а под ней матрица из нулей), то $U = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Если удаётся разложить V в прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ инвариантных подпространств V_i, то в базисе пространства V, составленном из базисов этих подпространств, матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & A_k \end{pmatrix},$$

где A_i — матрица оператора $\varphi|_{V_i}$. Из этого ясно, что поиск инвариантных подпространств является важным шагом в решении задачи поиска «наиболее простого» вида матрицы линейного оператора.

Пример 1.3. Для оператора дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_n$ инвариантные подпространства вложены друг в друга, поэтому ни у какого нетривиального инвариантного подпространства нет инвариантного прямого дополнения. Поэтому ни в каком базисе матрица этого оператора не может иметь блочно-диагональный вид.

Пример 1.4. Рассмотрим поворот на угол α вокруг какой-либо оси в пространстве E^3. В ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если вектор e_3 направлен по оси поворота, матрица оператора поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

который согласуется с разложением E^3 в прямую сумму $E^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства, которые приводят к понятию собственного вектора.

§2. Собственные векторы и собственные значения

Определение 2.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором*** оператора φ, если $\varphi x = \lambda x$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом ***собственным значением*** (***собственным числом***) оператора φ, отвечающим собственному вектору x.

Собственный вектор порождает одномерное инвариантное подпространство. В базисе, составленном из собственных векторов (если он существует) матрица оператора имеет диагональный вид, что является «наиболее простым» видом.

Пример 2.1. а) Для нулевой оператора $\mathcal{O}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 0;

б) Для тождественного оператора $\mathcal{I}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 1;

в) Для оператора «растяжения» $\lambda\mathcal{I}$ каждый вектор является собственным с собственным значением λ;

г) Собственные векторы оператора поворот на угол α в пространстве E^3: если $\alpha \neq \pi k$, то это векторы, лежащие на оси поворота, собственное значение 1; если же $\alpha = \pi k$, то к ним добавляются векторы, перпендикулярные оси поворота, собственные значения $(-1)^k$;

д) $V = U \oplus W$, $\mathcal{P}$ — проектор на U параллельно W является линейным оператором в V. Известно, что $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Тогда если x — собственный вектор, то

$\lambda x = \mathcal{P}x = \mathcal{P}^2 x = \mathcal{P}(\mathcal{P}x) = \mathcal{P}(\lambda x) = \lambda\mathcal{P}x = \lambda^2 x$, значит λ равно 0 или 1. Любой вектор из U — собственный с собственным значением 1, из W — собственный с собственным значением 0.

е) Для оператора дифференцирования $\mathcal{D}\colon \mathbb{R}^{\leqslant n}[x] \to \mathbb{R}^{\leqslant n}[x]$ собственными являются константы, соответствующие собственному значению 0.

ж) Оператор транспонирования удовлетворяет условию $\mathcal{P}^2 = \mathcal{I}$. Аналогично д) можно показать, что собственные значения инволюции только ± 1. В данном случае, значение 1 соответствует симметрическим матрицам, -1 — кососимметрическим.

Замечание 2.1. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным для оператора φ тогда и только тогда, когда подпространство $\ker(\varphi - \lambda\mathcal{I}) \leqslant V$ ненулевое, то есть когда оператор $\varphi - \lambda\mathcal{I}$ вырожден, то есть $\det(\varphi - \lambda\mathcal{I}) = 0$.

Определение 2.2. Подпространство $\ker(\varphi - \lambda\mathcal{I})$ называется ***собственным подпространством*** оператора φ, соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ. Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой.

Замечание 2.2. Любое собственное подпространство оператора φ является φ-инвариантным.

Определение 2.3. ***Геометрической кратностью*** $g(\lambda)$ собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: $g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

§3. Характеристический многочлен

Для нахождения собственных подпространств удобнее сначала найти собственные значения из условия $\det(\varphi - \lambda\mathcal{I}) = 0$. Пусть A_φ — матрица оператора φ в каком-либо базисе, тогда

$$\det(\varphi - \lambda\mathcal{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Определение 3.1. Многочлен $\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n \det(\varphi - \lambda\mathcal{I}) = \det(\lambda\mathcal{I} - \varphi)$ называется ***характеристическим многочленом*** оператора φ. Корни характеристического многочлена называются ***характеристическими числами*** φ.

Замечание 3.1. Не каждое характеристическое число является собственным. Действительно, в согласии с основной теоремой алгебры, любой полином с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень, но не обязательно принадлежащий полю $\mathbb{R}$. Если оператор определен в вещественном линейном пространстве, то его характеристическими числами будут как комплексные, так и вещественные, но собственными будут только вещественные корни.

Определение 3.2. ***Спектром*** σ_φ линейного оператора φ называется множество его собственных значений.

Замечание 3.2. Также из основной теоремы алгебры следует, что количество корней полинома не превосходит его степень, а значит спектр линейного оператора состоит не более, чем из $n = \dim V$ собственных чисел.

Если из контекста ясно, о каком операторе идёт речь, индекс φ будем опускать.

Замечание 3.3. В силу того, что характеристический полином задается определителем оператора $\varphi - \lambda\mathcal{I}$, а определитель любого оператора не зависит от выбора базиса (инвариант относительно преобразований базиса), то можно утверждать, что и все его коэффициенты также от выбора базиса не зависят. Откуда следует, что к инвариантам оператора относится не только его определитель, но и след $\operatorname{tr}\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, потому что коэффициент перед λ^n в характеристическом полиноме буквально равен $(-1)^n \operatorname{tr}\varphi$.

Определение 3.3. ***Алгебраической кратностью*** $m(\lambda)$ собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

Замечание 3.4. Если $\lambda \in \sigma$ является собственным числом оператора φ, то $\varphi - \lambda\mathcal{I}$ — является вырожденным оператором в силу равенства нулю его определителя. Следовательно, ядро этого оператора $\ker(\varphi - \lambda\mathcal{I})$ содержит хотя бы один ненулевой вектор.

Лемма 3.1. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство $V_\mu \leqslant V$, оно инвариантно, следовательно, в согласованном базисе матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \mu E & D \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

матрица μE квадратная размера $g(\mu)$. Тогда характеристический многочлен имеет вид $\chi(\lambda) = (\mu - \lambda)^{g(\mu)} \cdot f(\lambda)$, $f(\lambda) = \det(C - \lambda E)$. Так как у многочлена f может быть корень μ, то $m(\mu) \geqslant g(\mu)$.

§4. Собственный базис и диагонализируемость

Определение 4.1. Подпространства $V_1, \ldots, V_k$ называются ***линейной независимыми***, если равенства $v_1 + \ldots + v_k = 0$, $v_k \in V_k$ следует, что $v_1 = \ldots = v_k = 0$.

Замечание 4.1. Можно сказать, что разложение пространства V в прямую сумму подпространств $V_1, \ldots, V_k$ — это разложение в сумму линейной независимых подпространств $V_1, \ldots, V_k$.

Теорема 4.1. *Собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ оператора φ линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по k. При $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и $x_1 + \ldots + x_k = 0$. Применим к обеим частям оператор φ:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_k x_k = 0.$$

Вычтем из этого равенства равенство $x_1 + \ldots + x_k = 0$, умноженное на λ_k, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

Каждое из слагаемых лежит в соответствующем подпространстве. Так как по предположению индукции они линейно независимы и рассматриваются разные собственные значения, то $x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0$. Но тогда и $x_k = 0$.

Следствие 4.1.1. *Если характеристический многочлен оператора имеет $n = \dim V$ различных корней (оператор с **простым спектром**), то существует базис из собственных векторов этого оператора.*

Замечание 4.2. Данное условие не является необходимым для существования собственного базиса. Например, любой базис состоит из собственных векторов тождественного оператора, однако его характеристический многочлен имеет единственный корень 1 (кратности n).

Определение 4.2. Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется ***диагонализируемым***, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид.

Другими словами, диагонализируемость оператора эквивалентна существованию собственного базиса.

Пусть оператор φ диагонализируем и $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$. Рассмотрим проектор $\mathcal{P}_i$ на подпространство V_{λ_i} параллельно прямой сумме оставшихся подпространств. Тогда $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i = \mathcal{I}$. Легко проверяется, что оператор φ действует на любой вектор так же, как оператор $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$. Выражение $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$ называется ***спектральным разложением*** оператора φ.

Теорема 4.2. ***(критерий диагонализируемости)***
Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- *Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то есть все его корни лежат в поле $\mathbb{K}$;*

- *Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.*

Доказательство. Диагонализируемость эквивалента наличию собственного базиса, откуда следует, что $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$ (объединение базисов собственных подпространств — собственный базис V), но тогда $n = \dim V = g(\lambda_1) + \ldots + g(\lambda_k)$. Но $m(\lambda_i) \geqslant g(\lambda_i)$, а $m(\lambda_1) + \ldots + m(\lambda_k) \leqslant \deg \chi_\varphi = n$. Отсюда следует, что $n = g(\lambda_1) + \ldots + g(\lambda_k)$ тогда и только тогда, когда $m(\lambda_i) = g(\lambda_i)$.

Пример 4.1. Пусть φ — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат декартовой плоскости. В ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\chi_\varphi(t) = t^2 + 1$. Его корни не лежат в поле $\mathbb{R}$. Поэтому, оператор φ не диагонализируем над $\mathbb{R}$. Если же рассмотреть ту же матрицу над полем $\mathbb{C}$, то она оказывается подобной матрице

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Пример 4.2. Пусть $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_1$. В базисе $x, 1$ его матрица оператора вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\chi_{\mathcal{D}}(t) = t^2$. Его корень 0 кратности 2 лежит в поле $\mathbb{R}$. $\operatorname{Ker}(\mathcal{D} - 0\mathcal{I}) = \mathbb{R}[x]_0$, $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{D} - 0\mathcal{I}) = 1$. Оператор $\mathcal{D}$ не диагонализируем.