Жорданова нормальная форма

В этой лекции мы перейдем к рассмотрению вида линейного оператора в жордановом базисе. Как было уже отмечено, если оператор не является диагонализуемым, для него также может быть получен "достаточно простой"вид в некотором базисе. Следовательно вытекает вопрос о структуре этого матричного представления оператора и построения самого базиса, в котором оператор имеет такой вид.

§1. Жорданова нормальная форма

Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ — линейный оператор, для которого найдено собственное значение λ. Для начала рассмотрим сужение нильпотентного оператора $\mathcal{N} = (\varphi - \lambda\mathcal{I})\big|_{U^\lambda}$ на одно из его возможных циклических подпространств U^λ. Оно может быть представлено, по определению, как линейная оболочка над соответствующей жордановой цепочкой $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. При этом

$$x_i = \mathcal{N}^{k-i} x_k$$

В базисе циклического подпространства операторы будут иметь следующее матричное представление

$$\mathcal{N} \leftrightarrow J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\mathcal{I} \leftrightarrow \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Откуда следует, что сужение оператора φ на данное подпространство в этом базисе имеет матрицу $J(\lambda)$

$$\varphi\big|_{U^\lambda} \leftrightarrow J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 1.1. Жордановой клеткой называется верхнетреугольная матрица $J(\lambda) = J(0) + \lambda E$ соответствующая сужению линейного оператора φ на циклическое подпространство, найденная в базисе этого циклического подпространства (жордановой цепочке).

Обратим внимание, что данная матрица в точности согласуется с построением по определению. Для получения матрицы любого оператора в некотором базисе, необходимо подействовать на базисные векторы. Пусть x_k — элемент жордановой цепочки. Подействуем сужением оператора $\varphi\big|_{U^\lambda}$ на это циклическое подпространство.

$$\varphi\big|_{U^\lambda}(x_k) = (\lambda\mathcal{I} + \mathcal{N})(x_k) = \lambda\mathcal{I}x_k + \mathcal{N}x_k = \lambda x_k + x_{k-1}$$

Откуда мы действительно можем получить координатные представление для образов векторов x_k, находящиеся в столбцах жордановой клетки.

Допустим теперь, что корневое подпространство V^λ состоит из нескольких циклических подпространств. Это соответствует случаю, когда диаграмма Юнга содержит более одного столбца. Ранее мы утверждали, что корневое подпространство может быть представлено в виде прямой суммы циклических:

$$V^\lambda = U_1^\lambda \oplus U_2^\lambda \oplus \ldots \oplus U_g^\lambda$$

При этом матрица оператора в базисе, согласованном с каждым из этих подпространств, имеет блочно-диагональный вид. Таким образом имеем следующее определение.

Определение 1.2. Жордановым блоком, соответствующим собственному числу λ оператора φ, называется блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых клеток.

И, наконец, все пространство V, в котором действует оператор φ, имеющий полный набор собственных значений (сумма кратностей собственных чисел равна размерности пространства), представляется в виде прямой суммы корневых подпространств

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_m}$$

Следовательно и в базисе пространства V, согласованном с каждым из этих подпространств, матрица оператора имеет блочно-диагональный вид.

Определение 1.3. Жордановой нормальной формой оператора φ, называется блочно-диагональная матрица, составленная из жордановых блоков, соответствующих всем собственным значениям.

Теорема 1.1. *Если характеристический полином оператора φ может быть представлен в виде произведения линейных множителей, существует базис (жорданов), в котором матрица оператора представляет собой жорданову нормальную форму.*

Доказательство. Пусть характеристический полином оператора представляет собой произведение линейных множителей

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

Тогда каждое собственное число порождает корневое подпространство V^{λ_i}, сумма размерностей которых равна размерности пространства V, а каждое из этих подпространств представляется в виде прямой суммы циклических подпространств соответствующих нильпотентных операторов.

Объединение базисов в силу разложений в прямые суммы позволяет получить базис всего пространства V, при этом матрица оператора в этом базисе согласована с определением жоржановой нормальной формы. □

Следствие 1.1.1. *Любой оператор в комплексном линейном пространстве* $V(\mathbb{C})$ *имеет жорданову нормальную форму.*

Доказательство. В силу основной теоремы алгебры и ее следствий каждый полином имеет разложение в линейные множители над полем комплексных чисел. □

О структуре ЖНФ

Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ — линейный оператор в комплексном линейном пространстве, $\sigma = \{\lambda_1^{(m_1)}, \ldots, \lambda_p^{(m_s)}\}$ — спектр оператора, где в верхнем индексе указана алгебраическая кратность. Пусть также набор чисел $\{g_1, \ldots, g_s\}$ — геометрические кратности этих собственных чисел.

- Количество жордановых блоков равняется количеству *различных* собственных чисел s, что также равняется количеству диаграмм Юнга, если полагать, что одна диаграмма — одно собственное число.
- Размерность жорданова блока равняется алгебраической кратности m_i собственного числа λ_i и количеству "клеточек"в соответствующей диаграмме Юнга.
- Количество жордановых клеток в блоке равняется геометрической кратности g_i собственного числа λ_i или количеству столбцов в диаграмме Юнга, относящихся к этому собственному числу.
- Размеры жордановых клеток соответствуют высоте столбцов в диаграмме Юнга и не превышают максимальную высоту корневых векторов данного корневого подпространства.

§2. Построение жорданова базиса

Есть два основных подхода для построения самого жорданова базиса. Мы можем их сформулировать исходя из диаграммы Юнга — визуального представления этого базиса.

- Первый подход: искать корневые векторы максимальной высоты и достраивать жордановы цепочки до собственных векторов. **Путь сверху вниз.**
- Второй подход: находить собственные векторы и искать для них все корневые вплоть до корневого вектора максимальной высоты. **Путь снизу вверх.**

Первый подход в большей степени используется в системах компьютерной алгебры. Дело в том, что подходящих «самых высоких» векторов оказывается столь много, что с большой вероятностью подойдут какие-то векторы стандартного базиса или их нехитрые линейные комбинации.

Для этого можно придерживаться следующего алгоритма, полагая, что спектр оператора уже известен:

(а) Строим нильпотентные операторы $\mathcal{N}_i = \varphi - \lambda_i \mathcal{I}$ и соответствующие им матрицы пока что в неком стандартном базисе.

(б) Находим порядок нильпотентности оператора, тем самым находя максимальную высоту корневых векторов k.

(в) Ищем базис $\ker \mathcal{N}^k$, тем самым получая один и более корневых векторов максимальной высоты (верхнюю строчку диаграммы Юнга) таких, что они не переходят в нулевой вектор при действии оператором $\mathcal{N}^{k-1}$.

(г) Действуем на них нильпотентным оператором, чтобы получить корневые векторы меньшей высоты вплоть до нулевого, тем самым получая соответствующие жордановы цепочки (столбцы диаграммы Юнга с максимальной высотой).

(д) При необходимости дополняем векторы высоты i до базиса $\ker \mathcal{N}^i$, что соответствует самым "верхним"векторам диаграммы Юнга в столбцах меньшей высоты, чем максимальная. К ним также применяем предыдущий пункт вплоть до нулевого.

Пример 2.1. Найдём ЖНФ и жорданов базис оператора $\varphi \in \operatorname{End}\left(\mathbb{R}^4\right)$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

Несложно показать, что его спектр будет состоять только из одного собственного значения $\lambda = 1$ кратности $m = 4$. По теореме оператор может быть приведен к ЖНФ, которую мы сейчас попытаемся построить.

Геометрическая кратность этого собственного значения $g = 2$, т.к. этому числу равняется размерность ядра оператора $\varphi - \mathcal{I}$, имеющее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Следовательно жорданова нормальная форма будет состоять из одного блока, а он — из двух клеток. Построим матрицы операторов $\mathcal{N}^k = (\varphi - \mathcal{I})^k$, пока все пространство не станет корневым для него. Эта ситуация достигается при $k = 3$ — убедитесь в этом.

"Самый высокий"вектор должен обнулять матрицу $(A - E)^3$ и не должен обнулять матрицу $(A - E)^2$. Так как

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

то в качестве "самого высокого"вектора e_4 жорданова базиса можно взять первый, второй или четвёртый векторы стандартного базиса, так как их образы не являются нулевыми (именно они записаны в первом, втором и четвёртом столбцах матрицы). Пусть $e_4 = (1, 0, 0, 0)^T$. Тогда $(A - E)e_4 = e_3$, $(A - E)^2 e_4 = (A - E)e_3 = e_2$:

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ровно это мы и ожидали получить ☺

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти e_1. Он дополняет вектор e_2 до базиса $\ker(\varphi - \mathcal{I})$, поэтому можно взять любой вектор из этого ядра, линейно независимый с e_2, например, $e_1 = (0, 0, 1, 0)^T$.

Итак, у нас следующий жорданов базис: $e_1 = (0, 0, 1, 0)^T$, $e_2 = (3, 1, 3, 1)^T$, $e_3 = (0, -2, 0, -1)^T$, $e_4 = (1, 0, 0, 0)$, а ЖНФ в соответствии с этим выглядит следующим образом:

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$