

Группа _____ К3121

К работе допущен

Студент _____ Доценников Никита

Работа выполнена

Преподаватель _____ Курашова С. А.

Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №4

1. Цель работы.

Проверка основного закона динамики вращательного движения: экспериментально установить линейную зависимость момента силы натяжения нити M от углового ускорения ε и по ней определить момент инерции системы I и момент сил трения $M_{\text{тр}}$.

Проверка зависимости момента инерции от положения утяжелителей на крестовине (теорема Штейнера): подтвердить, что $I = I_0 + 4m_{\text{ут}}R^2$ при изменении расстояния R грузов от оси вращения.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы:

- Провести измерения времени падения груза при разных массах подвеса и при разных положениях утяжелителей на крестовине.
- Рассчитать по результатам эксперимента:
 - линейное ускорение груза a ,
 - угловое ускорение крестовины ε ,
 - момент силы натяжения нити M .
- Определить момент инерции крестовины с утяжелителями и момент силы трения, действующий на систему.
- Построить зависимость $M(\varepsilon)$ для разных положений утяжелителей, проверить основной закон динамики вращательного движения.
- Исследовать зависимость момента инерции от расстояния утяжелителей до оси вращения и проверить выполнение теоремы Штейнера.

3. Объект исследования.

Объектом исследования является система маятника Обербека, состоящая из:

- подвешенного груза (каретка с шайбами),

- нити, перекинутой через неподвижный блок и намотанной на ступицу крестовины,
- крестовины с четырьмя утяжелителями, закреплёнными на равных расстояниях от оси вращения.

При падении груза крестовина раскручивается под действием момента силы натяжения нити. Изучается вращательное движение системы, её момент инерции и влияние положения утяжелителей на динамику вращения.

4. Метод экспериментального исследования.

1. Подвешенный груз (каретка с заданным числом шайб) отпускается из состояния покоя и проходит путь $h = 0.7\text{м}$ до упора.
2. Для каждой массы груза и каждого положения утяжелителей на крестовине измеряется время падения t (трижды для повышения точности).
3. По усреднённому времени рассчитывается линейное ускорение груза:

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

4. Угловое ускорение крестовины вычисляется через диаметр ступицы d :

$$\varepsilon = \frac{2a}{d}.$$

5. По ускорению находится сила натяжения нити:

$$T = m(g - a),$$

а затем момент силы:

$$M = \frac{md}{2}(g - a).$$

6. Для каждого положения утяжелителей строится зависимость $M(\varepsilon)$. По методу наименьших квадратов (МНК) из линейной аппроксимации

$$M = M_{\text{тр}} + I\varepsilon$$

определяются момент инерции I и момент сил трения $M_{\text{тр}}$.

7. Сравнивается экспериментальная зависимость момента инерции от положения утяжелителей с теоретическим законом Штейнера:

$$I = I_0 + 4m_{\text{ут}}R^2.$$

Такой метод позволяет проверить как закон динамики вращательного движения, так и теорему Штейнера.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

Рабочие формулы:

1. Линейное ускорение груза:

$$a = \frac{2h}{t^2},$$

где h — высота падения груза, t — время падения.

2. Угловое ускорение крестовины:

$$\varepsilon = \frac{2a}{d},$$

где d — диаметр ступицы.

3. Сила натяжения нити:

$$T = m(g - a),$$

где m — масса подвеса, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$.

4. Момент силы натяжения нити:

$$M = \frac{md}{2}(g - a).$$

5. Основное уравнение вращательной динамики:

$$I\varepsilon = M - M_{\text{тр}},$$

где I — момент инерции системы, $M_{\text{тр}}$ — момент силы трения.

6. Теорема Штейнера для крестовины с утяжелителями:

$$I = I_0 + 4m_{\text{ут}}R^2,$$

где $m_{\text{ут}}$ — масса одного утяжелителя, R — расстояние его центра от оси вращения.

Исходные данные:

Масса каретки: $(47.0 \pm 0.5)\text{г}$

- Масса шайбы: $(220.0 \pm 0.5)\text{г}$
- Масса грузов на крестовине: $(408.0 \pm 0.5)\text{г}$
- Расстояние первой риски от оси: $(57.0 \pm 0.5)\text{мм}$
- Расстояние между рисками: $(25.0 \pm 0.2)\text{мм}$
- Диаметр ступицы: $(46.0 \pm 0.5)\text{мм}$
- Диаметр груза на крестовине: $(40.0 \pm 0.5)\text{мм}$
- Высота груза на крестовине: $(40.0 \pm 0.5)\text{мм}$

Высота падения груза: $h = 0.70\text{м}$.

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
-------	--------------	-------------	-----------------------	---------------------

1	Секундомер механический	Измеритель времени	до 30 мин	± 0.2 с
2	Линейка металлическая	Измеритель длины	до 500 мм	± 1 мм
3	Штангенциркуль	Измеритель длины	до 170 мм	± 0.1 мм
4	Весы лабораторные	Измеритель массы	до 1 кг	± 0.5 г

7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).

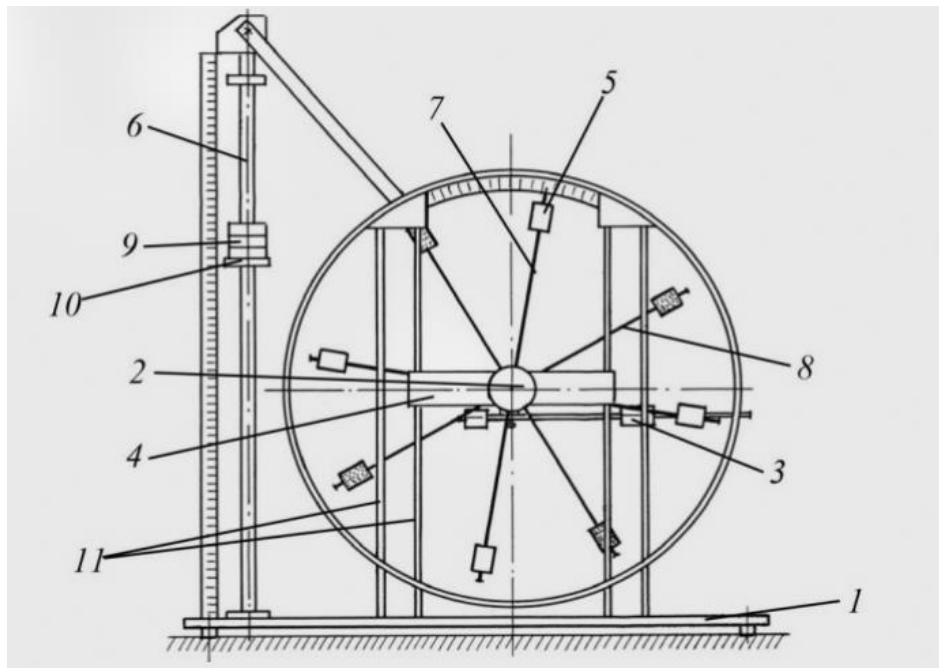


Рис. 1. Принципиальная схема маятника Обербека: m — масса груза, mg — сила тяжести, T — сила натяжения нити, h — высота падения груза, d — диаметр ступицы, R — расстояние утяжелителей $m_{ут}$ от оси, Кр — крестовина, Сп — спицы.

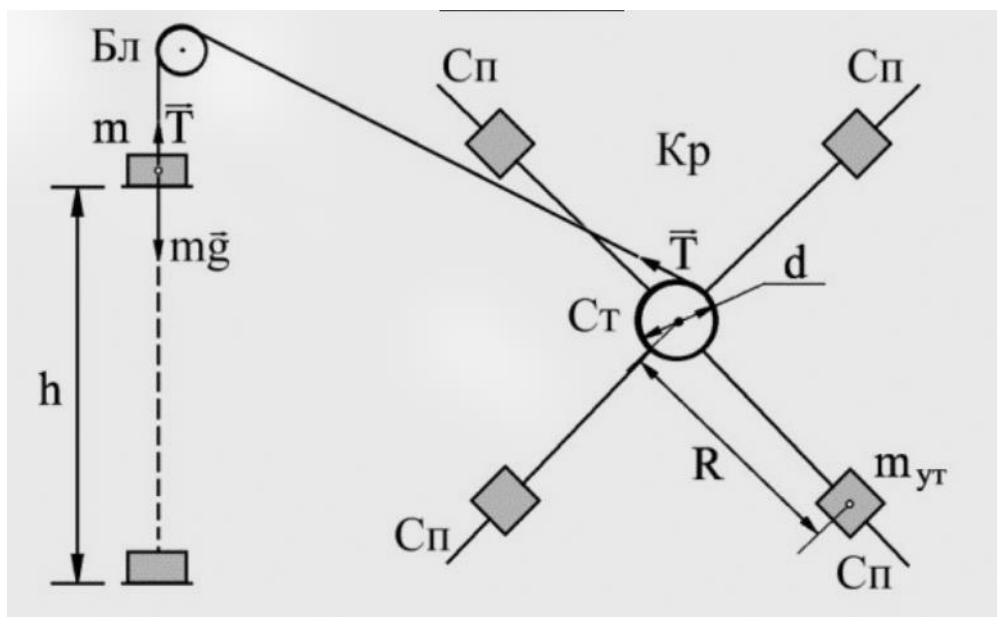


Рис. 2. Экспериментальный стенд для исследования вращательного движения:

- 1 — основание;
- 2 — рукоятка сцепления крестовин;
- 3 — устройство принудительного трения;
- 4 — поперечина;
- 5 — груз крестовины;
- 6 — трубчатая направляющая;
- 7 — передняя крестовина;
- 8 — задняя крестовина;
- 9 — шайбы каретки;
- 10 — каретка;
- 11 — система передних стоек.

8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы, примеры расчетов).

Пуска 1:

Масса	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	t_{cp} (с)
m ₁	4.45	4.55	4.51	4.50
m ₂	3.23	3.18	3.32	3.24
m ₃	2.78	2.83	2.64	2.75
m ₄	2.33	2.42	2.36	2.37

Пуска 2:

Масса	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	t_{cp} (с)
m ₁	5.32	5.39	5.24	5.32
m ₂	3.92	4.03	3.99	3.98
m ₃	3.42	3.35	3.38	3.38
m ₄	2.70	2.94	3.10	2.91

Пуска 3:

Масса	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	t_{cp} (с)
m ₁	6.41	6.15	6.37	6.31
m ₂	4.61	4.66	4.56	4.61
m ₃	3.68	3.99	3.72	3.80
m ₄	3.41	3.54	3.49	3.48

Пуска 4:

Масса	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	t_{cp} (с)
m ₁	7.41	6.76	7.22	7.13
m ₂	5.28	5.23	5.13	5.21
m ₃	4.25	4.36	4.41	4.34
m ₄	3.70	3.83	3.75	3.76

Пуска 5:

Масса	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	t_{cp} (с)
m ₁	8.49	8.41	7.81	8.24
m ₂	6.08	5.79	6.04	5.97
m ₃	4.85	4.98	4.72	4.85
m ₄	4.46	4.41	4.49	4.45

Пуска 6:

Масса	t_1 (с)	t_2 (с)	t_3 (с)	t_{cp} (с)
m_1	9.11	8.65	9.07	8.94
m_2	6.76	6.78	6.82	6.79
m_3	5.73	5.49	5.58	5.60
m_4	5.30	4.92	5.09	5.10

1. Среднее время вычисляется как:

$$t_{cp} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}.$$

2. Случайная погрешность времени рассчитывается по формуле:

$$\Delta t_{сл} = t_{\alpha, n} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

где S — среднеквадратичное отклонение, $n = 3$, $t_{\alpha, n}$ — коэффициент Стьюдента (для $n = 3$, $\alpha = 0.95$, $t = 4.30$).

3. Инструментальная погрешность секундомера: $\Delta t_{инстр} = 0.2$ с.

4. Полная погрешность времени:

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta t_{сл})^2 + \left(\frac{\Delta t_{инстр}}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

5. Относительная погрешность времени:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t_{cp}} \cdot 100\%.$$

9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

Используем рабочие формулы из задания: $a = \frac{2h}{t^2}$, $\varepsilon = \frac{2a}{d}$, $M = md2(g - a)$ при $h = 0.70$ м, $d = (46.0 \pm 0.5)$ мм, $g = 9.81$ м/с²; массы подвеса:
 $m_1 = 0.267$ кг, $m_2 = 0.487$ кг, $m_3 = 0.707$ кг, $m_4 = 0.927$ кг (касетка 47г + пшайбы по 220г).

Образец полного расчета:

Дано: $t_{cp} = 4.50$ с, $\Delta t = 0.17$ с, $d = 0.046 \pm 0.0005$ м, $m_1 = 0.267$ кг, $\Delta m_1 \approx \sqrt{(0.0005)^2 + (0.0005)^2} 0.00071$ кг.

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{1.4}{(4.5)^2} = 0.06914 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Относительная } \varepsilon_a \approx 2 \frac{\Delta t}{t} = 2 \cdot \frac{0.17}{4.50} = 0.0756 \Rightarrow \Delta a = 0.00522 \text{ м/с}^2.$$

$$\varepsilon = \frac{2a}{d} = \frac{2 \cdot 0.06914}{0.046} = 3.006 \text{ рад/с}^2. \varepsilon_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_d^2}, \text{ где } \varepsilon_d = \frac{0.0005}{0.046} = 0.01087. \text{ Тогда } \varepsilon_\varepsilon = 0.0763 \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0.229 \text{ рад/с}^2$$

$$M = \frac{md}{2}(g - a) = \frac{0.267 \cdot 0.046}{2}(9.81 - 0.06914) = 0.05982 \text{ Н/м.}$$

$$\text{Относительная } \varepsilon_M = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{(g-a)}\right)^2} \\ \sqrt{(0.00265^2 + 0.01087^2 + 0.00054^2)} \cdot 0.0112 \Rightarrow \Delta M = 0.00067 \text{ Н/м.}$$

$$a = (0.069 \pm 0.005) \text{ м/с}^2, \varepsilon = (3.01 \pm 0.23) \text{ рад/с}^2, M = (0.0598 \pm 0.0007) \text{ Н/м.}$$

10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Время падения t :

$$\text{Среднее: } t_{\text{ср}} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

$$\text{СКО серии: } S = \sqrt{\left(\frac{\sum((t_i - t_{\text{ср}})^2)}{n-1}\right)}, n = 3$$

$$\text{Случайная погрешность среднего: } \Delta t_{\text{сл}} = t_{\alpha, n} \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ при } \alpha = 0.95 \text{ и } n = 3: t_{\alpha, n} = 4.30$$

$$\text{Инструментальная погрешность секундомера: } \Delta t_{\text{инстр}} = 0.20 \text{ с}$$

$$\text{Полная погрешность времени: } \Delta t = \sqrt{(\Delta t_{\text{сл}})^2 + \left(\frac{\Delta t_{\text{инстр}}}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\text{Относительная: } \varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t_{\text{ср}}} 100\%$$

10.1.2. Геометрические размеры и массы

$$\text{Диаметр ступицы: } d = (46.0 \pm 0.5) \text{ мм} \rightarrow \Delta d = 0.5 \text{ мм}$$

$$\text{Масса каретки } (47.0 \pm 0.5) \text{ г, шайбы } (220.0 \pm 0.5) \text{ г}$$

$$\text{Погрешность массы } m_n = \sqrt{(\Delta m_{\text{кар}}^2 + n \cdot \Delta m_{\text{ш}}^2)}$$

$$\text{Пример: } m_1 = 0.267 \text{ кг, } \Delta m_1 \approx 0.00071 \text{ кг}$$

10.2. Косвенные размеры

$$\text{Рабочие формулы: } a = \frac{2h}{t^2}, \varepsilon = \frac{2a}{d}, T = m(g - a), M = \frac{md}{2}(g - a)$$

10.2.1. Общие формулы переноса погрешностей

$$\varepsilon_f = \sqrt{\sum((\alpha_k \cdot \varepsilon x_k)^2)}, \varepsilon x_k = \frac{\Delta x_k}{x_k} \text{ Для сумм/разностей — через абсолютные погрешности (метод частных производных)}$$

10.2.2. Конкретные выражения для данной работы

$$1) \text{ Для } a = \frac{2h}{t^2} \text{ (без } \Delta h): \varepsilon a \approx 2\varepsilon_t \rightarrow \Delta a = \varepsilon_a \cdot a$$

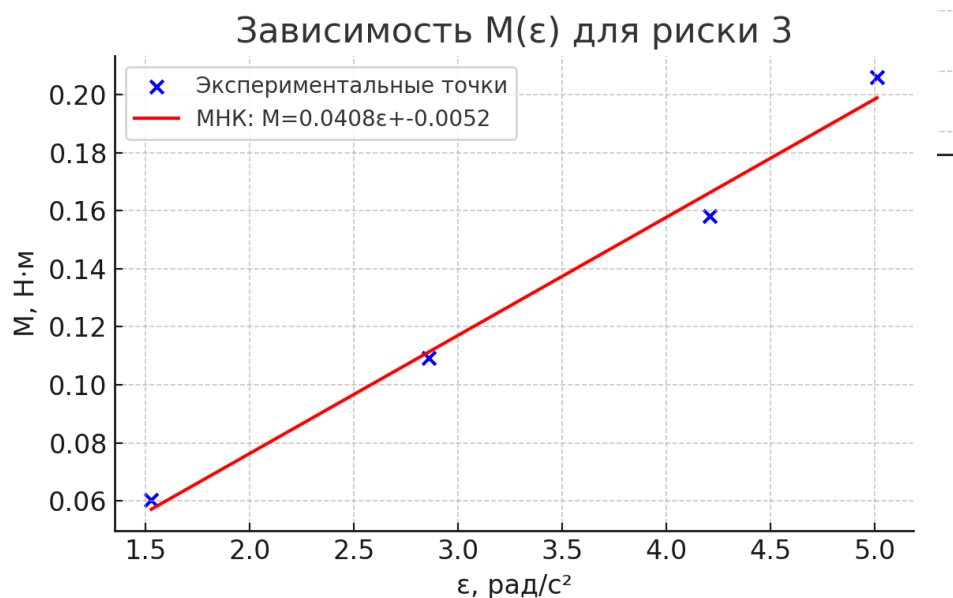
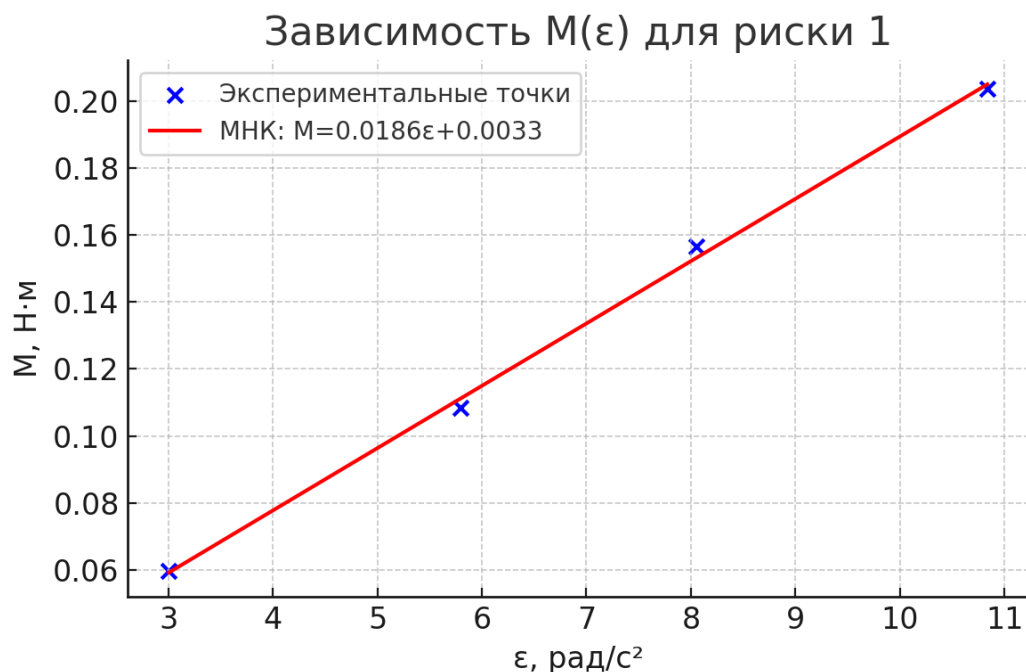
$$2) \text{ Для } \varepsilon = \frac{2a}{d}: \varepsilon_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_d^2} \rightarrow \Delta\varepsilon = \varepsilon_\varepsilon \cdot \varepsilon$$

$$3) \text{ Для } M = \left(\frac{md}{2}\right)(g - a): \varepsilon M = \sqrt{((\Delta m/m)^2 + (\Delta d/d)^2 + (\Delta a/(g - a))^2)} \rightarrow \Delta M = \varepsilon M \cdot M$$

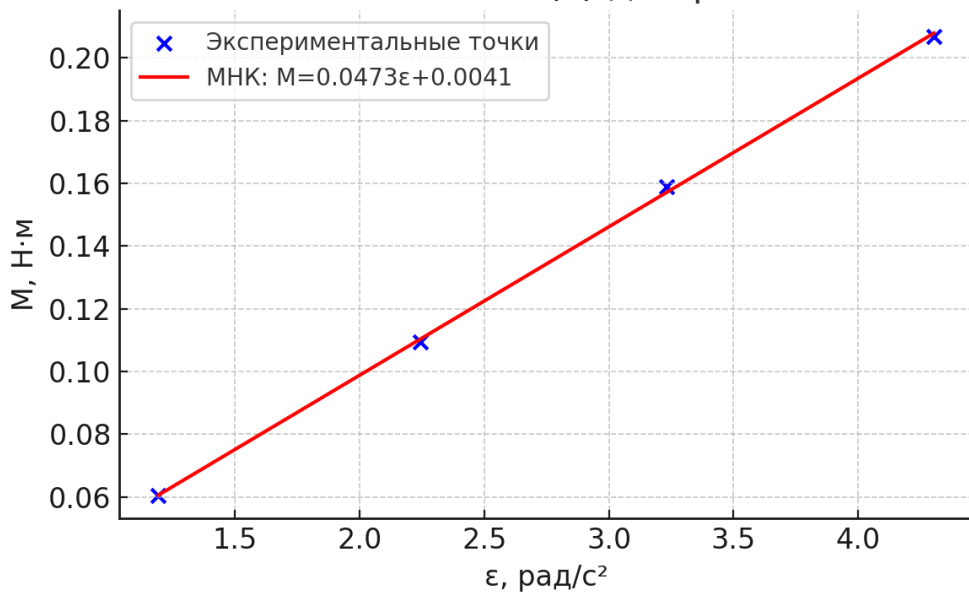
10.3. Образец расчёта ($p = 1, m_1$)

$$\begin{aligned}
 t_{\text{ср}} &= 4.50 \text{ с}, \Delta t = 0.17 \text{ с}; d = 0.046 \pm 0.0005 \text{ м}; m_1 = 0.267 \text{ кг}, \Delta m_1 = 0.00071 \text{ кг} a = \frac{1.4}{4.50^2} \\
 &= 0.06914 \text{ м/с}^2, \varepsilon a \approx 0.0756, \Delta a = 0.00522 \text{ м/с}^2 \varepsilon = 2 a/d = 3.006 \text{ рад/с}^2, \varepsilon_{\varepsilon} \\
 &= 0.0763, \Delta \varepsilon = 0.229 \text{ рад/с}^2 M = 0.05982 \text{ Н} \cdot \text{м}, \varepsilon M = 0.0112, \Delta M = 0.00067 \text{ Н} \cdot \text{м} a \\
 &= (0.069 \pm 0.005) \text{ м/с}^2, \varepsilon = (3.01 \pm 0.23) \text{ рад/с}^2, M = (0.0598 \pm 0.0007) \text{ Н} \cdot \text{м}
 \end{aligned}$$

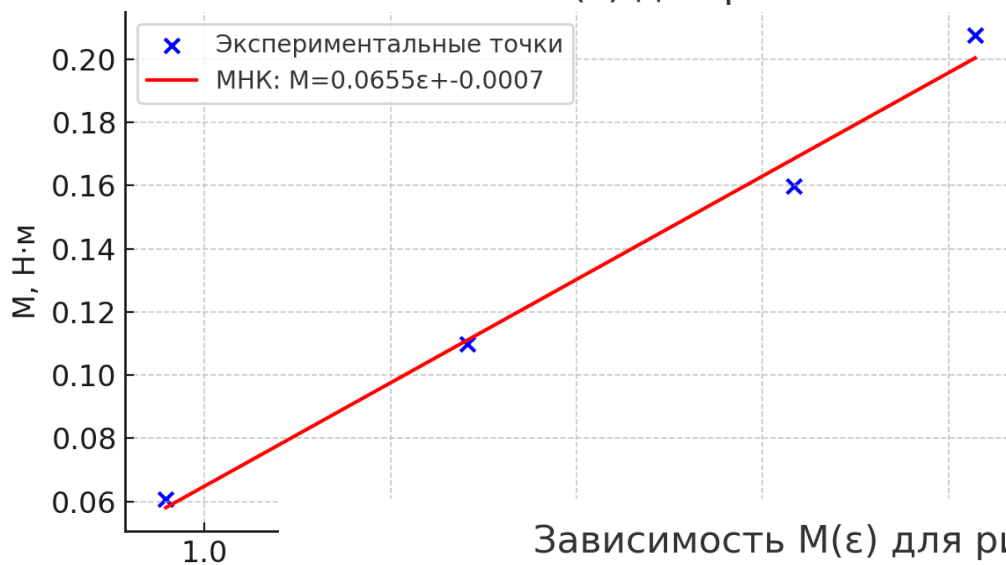
11. Графики (перечень графиков, которые составляют Приложение 2).



Зависимость $M(\epsilon)$ для риски 4



Зависимость $M(\epsilon)$ для риски 5



Зависимость $M(\epsilon)$ для риски 6

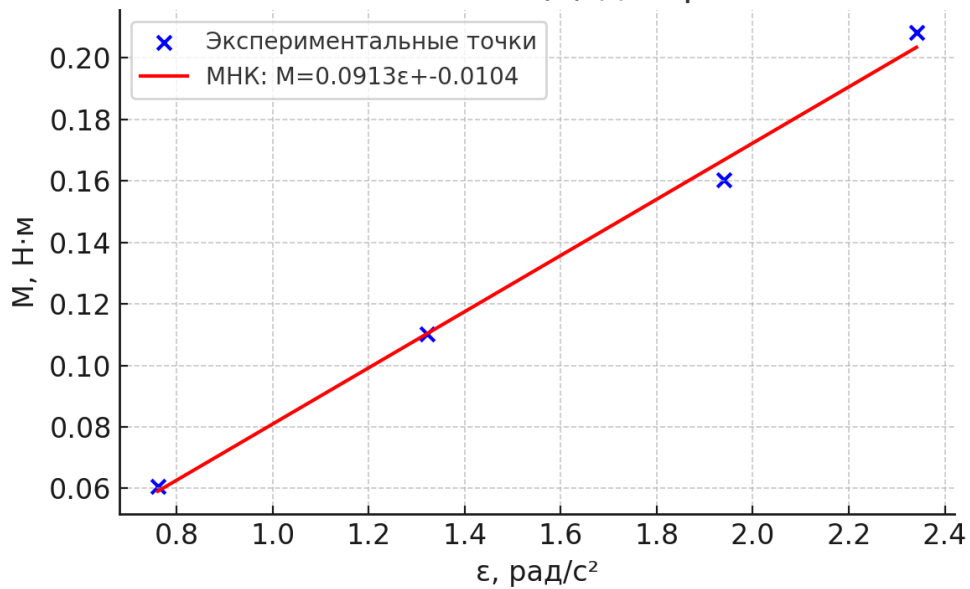


Рис. X (для каждой риски). Зависимость момента силы натяжения нити M от углового ускорения ε . На графике нанесены экспериментальные точки и проведена аппроксимирующая прямая методом наименьших квадратов. Наклон прямой соответствует моменту инерции крестовины I , а отрезок, отсекаемый на оси ординат, — моменту силы трения $M_{тр}$.

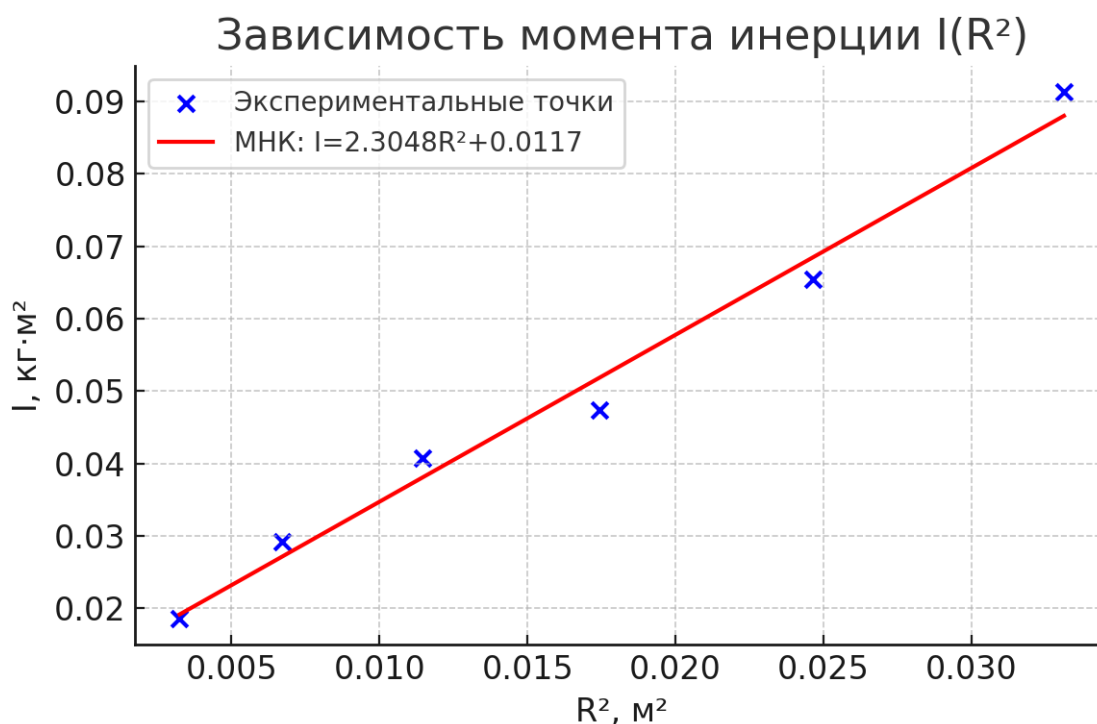


Рис. Y.

Зависимость момента инерции I от квадрата расстояния утяжелителей до оси R^2 . Экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую, что подтверждает справедливость теоремы Штейнера: $I = I_0 + 4m_{ут}R^2$. Наклон прямой равен $4m_{ут}$, а пересечение с осью ординат даёт значение собственного момента инерции I_0 .

12. Окончательные результаты.

По результатам аппроксимации зависимостей $M(\varepsilon)$ методом наименьших квадратов для каждого положения утяжелителей (риски 1–6) получены значения момента инерции I и момента силы трения $M_{тр}$.

Риска	Момент инерции I ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$)	Момент силы трения $M_{тр}$ ($\text{Н} \cdot \text{м}$)
1	0.01359	0.01894
2	0.02132	0.01334
3	0.02936	0.01560
4	0.03632	0.01642
5	0.04805	0.01657
6	0.06100	0.01418

Полученные значения подтверждают линейную зависимость $M(\varepsilon)$, а также рост момента инерции I при удалении утяжелителей от оси вращения.

Проверка теоремы Штейнера

По зависимости $I(R^2)$ установлено, что экспериментальные данные хорошо аппроксимируются линейной функцией. Наклон прямой соответствует $4m_{\text{ут}}$, пересечение с осью ординат — собственному моменту инерции I_0 .

13. Выводы и анализ результатов работы.

1. В ходе работы экспериментально подтвержден основной закон динамики вращательного движения: момент силы натяжения нити M прямо пропорционален угловому ускорению ε крестовины. Построенные графики $M(\varepsilon)$ представляют собой прямые линии.

2. По результатам аппроксимации методом наименьших квадратов найдены моменты инерции I и моменты силы трения $M_{\text{тр}}$ для разных положений утяжелителей. Установлено, что I возрастает с увеличением расстояния утяжелителей от оси вращения.

3. Зависимость момента инерции I от квадрата расстояния утяжелителей R^2 носит линейный характер. Это подтверждает справедливость теоремы Штейнера: $I = I_0 + 4m_{\text{ут}} \cdot R^2$.

4. Расхождения между теоретическими и экспериментальными результатами находятся в пределах экспериментальной погрешности. Возможные причины отклонений: трение в опорах, неидеальная фиксация утяжелителей, неточность измерений времени.

