

Задачи

Закон Кулона. Принцип суперпозиции

1. На шелковой нити подвешен шар массы m , заряд которого q_1^+ . Рассчитать на какое расстояние необходимо поднести положительно заряженный шар, с зарядом q_2^+ , чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое.

Решение:

На шар действуют следующие силы:

- Сила тяжести: $F_g = mg$ (действует вниз)
- Сила натяжения нити: T (действует вдоль нити)
- Сила электрического отталкивания $F_e = k \frac{q_1 q_2}{l^2}$ (действует горизонтально, если шар q_2 подносят сбоку)

Теперь нить отклонилась на угол θ с вертикалью (под действием электрической силы).

Найдем компоненты:

- Вертикальная: $T \cos \theta = mg$
- Горизонтальная: $T \sin \theta = F_e = k \frac{q_1 q_2}{l^2}$

Так как натяжение нити уменьшилось вдвое: $T = \frac{mg}{2}$.

Подставим в вертикальную компоненту:

$$T \cos \theta = mg \Rightarrow \frac{mg}{2} \cos \theta = mg \Rightarrow \cos \theta = 2$$

Так как $\cos \theta$ не может быть больше 1, мы понимаем, что что-то не так...

Используем теорему Пифагора для сил:

$$T = \sqrt{(mg)^2 + F_e^2}$$

- Изначально $F_e = 0 \Rightarrow T_0 = mg$
- Теперь $T = \frac{mg}{2}$

$$T = \sqrt{(mg)^2 + F_e^2} = \frac{mg}{2} \Rightarrow F_e^2 + (mg)^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2$$

$$F_e^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2 - (mg)^2 = \frac{m^2 g^2}{4} - m^2 g^2 = -\frac{3m^2 g^2}{4}$$

Получилось отрицательное число...

То есть:

$$F_e = T_0 - T = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2}$$

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{l^2} = \frac{mg}{2}$$

Отсюда:

$$l^2 = \frac{2kq_1 q_2}{mg} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{2kq_1 q_2}{mg}}$$

Ответ: $l = \sqrt{\frac{2kq_1^+ q_2^+}{mg}}$

2. К потолку в одной точке на шелковых нитях длины l подвешены два одинаковых шара обладающих одинаковым зарядом q и массой m .

Расстояние между шарами $x \ll l$. Рассчитать скорость утечки зарядов $\frac{dq}{dt}$ с каждого шара, если скорость их сближения, как функция от x имеет вид: $v(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ (α - некоторая постоянная).

Решение:

Для одного шарика вертикальная и горизонтальная составляющие сил дают:

- вертикальная: $T \cos \theta = mg$
- горизонтальная: $T \sin \theta = F_e$

где F_e - кулоновская сила отталкивания между шариками:

$$F_e = k \frac{q^2}{x^2}$$

При малом отклонении $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x}{l} = \frac{x}{2l}$ (смещение одного шарика по горизонтали равно $\frac{x}{2}$). Подставим $T \approx mg$ (поскольку $\cos \theta \approx 1$) в горизонтальное уравнение:

$$mg \cdot \frac{x}{2l} \approx F_e = k \frac{q^2}{x^2}$$

Отсюда найдем зависимость q от x :

$$k \frac{q^2}{x^2} = \frac{mgx}{2l} \Rightarrow q^2 = \frac{mg}{2kl} x^3$$

Значит

$$q(x) = \sqrt{\frac{mg}{2kl}} x^{\frac{3}{2}}$$

По цепному правилу:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Вычислим производную по x :

$$\frac{dq}{dx} = \sqrt{\frac{mg}{2kl}} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь используем заданную скорость. Поскольку $v(x)$ дана как модуль скорости сближения, скорость изменения расстояния x равна

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{\sqrt{x}}$$

Подставляем:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{mg}{2kl}} x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{x}} \right) = -\frac{3}{2} \alpha \sqrt{\frac{mg}{2kl}}$$

Ответ: $\frac{dq}{dt} = \frac{3\alpha}{2} \sqrt{\frac{mg}{2kl}}$

3. Радиус векторы двух положительных зарядов q_1 и q_2 соответственно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Рассчитать отрицательный заряд q_3 и его радиус-вектор $\vec{r}_3$

точки в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из зарядов была равна 0.

Решение:

Чтобы сила на q_1 была нуль, векторная сумма сил от q_2 и q_3 на q_1 должна быть нулём. Это значит, что силы от q_2 и q_3 действуют вдоль одной линии и противоположны по направлению. Отсюда следует, что $\vec{r}_3$ лежит на прямой, проходящей через $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Аналогично для равновесия q_2 . Поэтому $\vec{r}_3$ лежит на отрезке между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

Пусть $L = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ — расстояние между первыми двумя зарядами. Обозначим

$$d_{13} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|, \quad d_{23} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|.$$

Тогда $d_{13} + d_{23} = L$

Уравнения равновесия

Сила Кулона по модулю между точками i и j (в масштабе k):

$$F_{ij} = k \frac{|q_i q_j|}{d_{ij}^2}.$$

Для заряда q_1 : силы от q_2 и q_3 должны компенсировать друг друга, значит по модулю

$$k \frac{q_1 q_2}{L^2} = k \frac{q_1 |q_3|}{d_{13}^2}.$$

Отсюда (сокращая k и q_1 , $q_1 > 0$):

$$\frac{q_2}{L^2} = \frac{|q_3|}{d_{13}^2}.$$

Помня, что q_3 отрицателен, можно записать

$$q_3 = -q_2 \frac{d_{13}^2}{L^2}. \quad (1)$$

Аналогично для заряда q_2 :

$$k \frac{q_1 q_2}{L^2} = k \frac{q_2 |q_3|}{d_{23}^2},$$

откуда (сократив k и q_2):

$$\frac{q_1}{L^2} = \frac{|q_3|}{d_{23}^2} \Rightarrow q_3 = -q_1 \frac{d_{23}^2}{L^2}. \quad (2)$$

Приравняем правые части (1) и (2) — обе равны q_3 :

$$-q_2 \frac{d_{13}^2}{L^2} = -q_1 \frac{d_{23}^2}{L^2} \Rightarrow q_2 d_{13}^2 = q_1 d_{23}^2.$$

Возвращаемся к параметризации расстояний: положим $d_{13} = t$. Тогда $d_{23} = L - t$. Подставим:

$$q_2 t^2 = q_1 (L - t)^2.$$

Возьмём корни (положительные, так как $t > 0$, $L - t > 0$):

$$\sqrt{q_2} t = \sqrt{q_1} (L - t).$$

Решаем относительно t :

$$t(\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}) = \sqrt{q_1} L \Rightarrow t = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} L.$$

Теперь вернёмся к векторной форме: точка $\vec{r}_3$ находится на отрезке $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$ на расстоянии t от $\vec{r}_1$. Значит

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \frac{t}{L}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 + \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Разворачивая:

$$\vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1} \vec{r}_2 + \sqrt{q_2} \vec{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

Наконец, подставим $\frac{t}{L} = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$ в (1) для q_3 :

$$q_3 = -q_2 \left(\frac{t}{L} \right)^2 = -q_2 \left(\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \right)^2 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}.$$

Ответ: $q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}, \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1} \vec{r}_2 + \sqrt{q_2} \vec{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$

4. Точечный заряд $q = 50$ мкКл расположен в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Найти напряженность $\vec{E}$ электрического поля и ее модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Координаты векторов заданы в метрах.

Решение:

Найдём вектор $\vec{R}$ – радиус-вектор от заряда до точки наблюдения:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (8 - 2, -5 - 3) = (6, -8)_\text{м}.$$

Длина вектора

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10_\text{м}.$$

Постоянная Кулона (в СИ):

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.9875517923 \times 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Поле точечного заряда:

$$\vec{E}(\vec{r}) = kq \frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Вычислим по шагам.

$$1. kq = 8.9875517923 \times 10^9 \cdot 50 \times 10^{-6} = 449377.589615.$$

$$2. R^3 = 10^3 = 1000.$$

3. множитель перед вектором $\vec{R}$:

$$\frac{kq}{R^3} = \frac{449377.589615}{1000} = 449.377589615.$$

4. Компоненты поля:

$$E_x = 449.377589615 \cdot 6 = 2696.26553769 \text{ В/м},$$

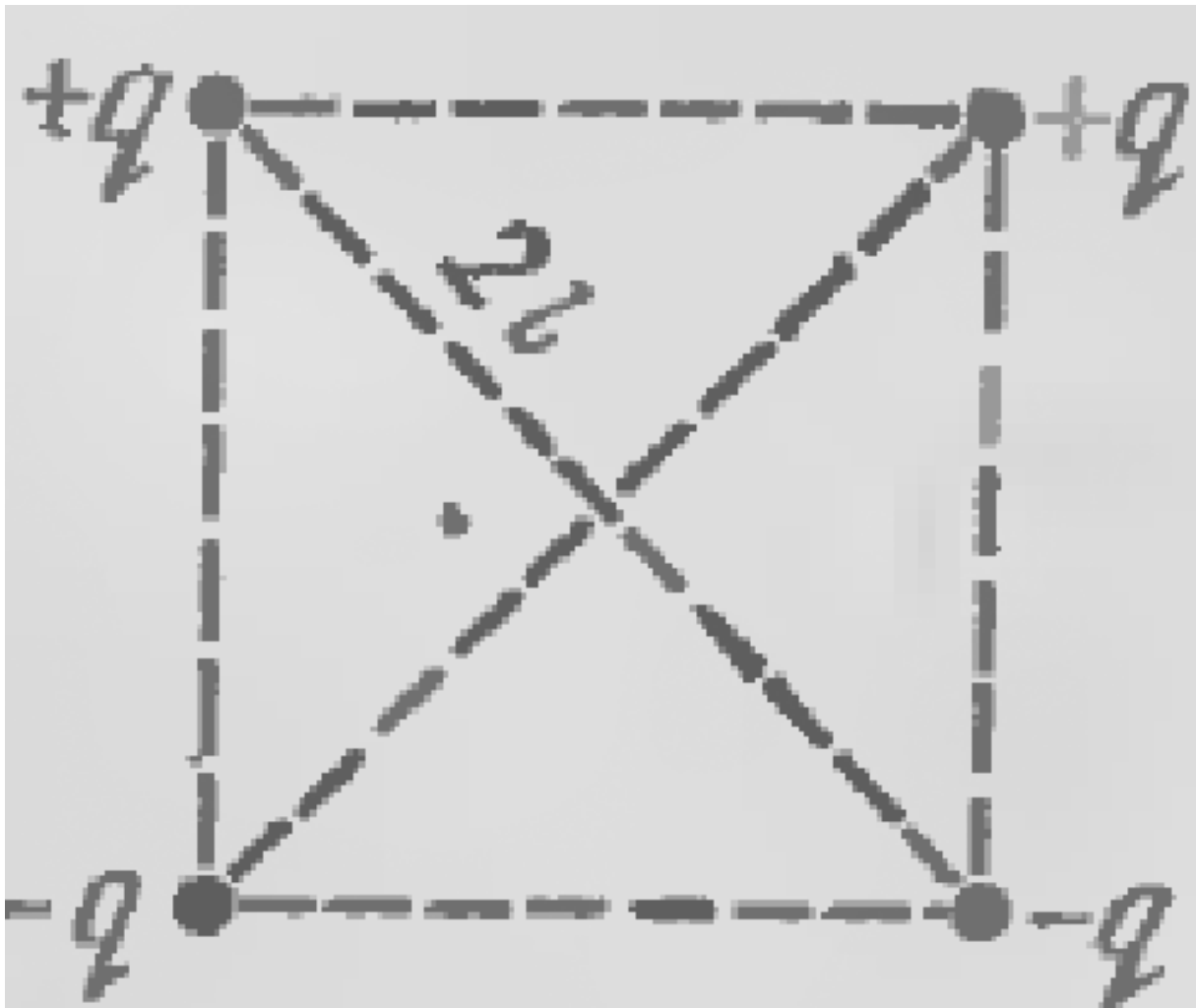
$$E_y = 449.377589615 \cdot (-8) = -3595.02071692 \text{ В/м}.$$

5. Модуль поля:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{2696.2655^2 + (-3595.0207)^2} = 4493.77589615 \text{ В/м.}$$

Ответ: $E = 4.5 \text{ кВ/м; } \vec{E} = 2.7\vec{i} - 3.6\vec{j}$

5. Точечные заряды $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ расположены по углам квадрата, диагональ которого равна $2l$. Найти модуль напряженности электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от плоскости квадрата, симметрично относительно его вершин.



Решение:

Положение вершин и параметры

Диагональ квадрата $= 2l$. Пусть центр квадрата — начало координат, стороны параллельны осям x, y . Тогда координаты вершин можно взять как

$$(\pm a, \pm a, 0),$$

где

$$a = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Пусть заряды:

- в верхних вершинах $(-a, +a, 0)$ и $(+a, +a, 0)$ — по $+q$;
- в нижних вершинах $(-a, -a, 0)$ и $(+a, -a, 0)$ — по $-q$.

Точка наблюдения (вершина «пирамиды») находится на оси, проходящей через центр и перпендикулярно плоскости квадрата:

$$P(0, 0, x).$$

Расстояние от любой вершины до точки P :

$$R = \sqrt{a^2 + a^2 + x^2} = \sqrt{2a^2 + x^2} = \sqrt{l^2 + x^2}.$$

Поле от одной вершины — векторная форма

Поле точечного заряда q_i в точке P равно

$$\vec{E}_i = k \frac{q_i}{R^3} \vec{R}_i,$$

где $\vec{R}_i$ — вектор от вершины к точке P .

Возьмём, например, вершину $(+a, +a, 0)$ с зарядом $+q$. Тогда

$$\vec{R} = (0 - a, 0 - a, x - 0) = (-a, -a, x).$$

Компоненты поля от этой вершины:

$$E_x^{(1)} = k \frac{q(-a)}{R^3}, \quad E_y^{(1)} = k \frac{q(-a)}{R^3}, \quad E_z^{(1)} = k \frac{qx}{R^3}.$$

Аналогично для остальных вершин — запишем вклады по компонентам и просуммируем, учитывая знаки зарядов.

Суммирование вкладов — симметрия

Из симметрии видно:

- x - компоненты от вершин попарно отменяются (пары $(+a, +a)$ и $(+a, -a)$ дают противоположные x -компоненты с одинаковыми

коэффициентами и одинаковыми зарядами по модулю — суммарно ноль).

- вертикальные (z) компоненты: верхние вершины дают вклад $+k \frac{qx}{R^3}$ каждая, нижние — дают вклад $-q$ каждое, то есть вклад нижних равен $-k \frac{qx}{R^3}$ для каждой; суммарно $E_z = k \frac{qx}{R^3} + k \frac{qx}{R^3} - k \frac{qx}{R^3} - k \frac{qx}{R^3} = 0$. Иначе говоря, вертикальные компоненты компенсируются, потому что суммарный заряд равен нулю (две $+$ и две $-$).
- y - компоненты не компенсируются, а складываются с одинаковым знаком. Посчитаем их.

Возьмём по очереди все четыре угла. Для вершины $(+a, +a)$ с $+q$ её y - компонента равна

$$E_y^{(+a, +a)} = k \frac{q(-a)}{R^3}.$$

Для вершины $(-a, +a)$ с $+q$: $E_y^{(-a, +a)} = k \frac{q(-a)}{R^3}$. Их сумма даёт $2 \cdot k \frac{q(-a)}{R^3}$.

Для нижних вершин с зарядом $-q$:

- вершина $(+a, -a)$: вектор $\vec{R} = (-a, +a, x)$ (заметим: её y - компонента равна $+a$), и заряд $-q$ даёт вклад $E_y^{(+a, -a)} = (-q) \cdot k \frac{+a}{R^3} = -k \frac{qa}{R^3}$.
- вершина $(-a, -a)$: аналогично даёт $-k \frac{qa}{R^3}$.

Сумма вкладов от нижних вершин: $-2k \frac{qa}{R^3}$. Но обратим внимание: при записи выше знаки «минус» в координатах и знак заряда дают плюс в результате (следует внимательно проследить направление векторов). Если аккуратно пройти по всем четырём, то итоговая сумма y -компонент равна

$$E_y = 4k \frac{qa}{R^3}.$$

(Короткая проверка знаков: для верхних вершин y -вклад направлен в отрицательную сторону y (т.к. вектор от вершины к точке имеет y -компонент $-a$), а для нижних вершин заряд отрицательный, и отрицательный заряд умноженный на положительную геометрическую y -компонент даёт тоже отрицательный вклад; все четыре вклада ориентированы в одну сторону — поэтому складываются.)

Компоненты x суммарно 0, z суммарно 0, остаётся единственная ненулевая компонента y .

Подставляем $a = \frac{l}{\sqrt{2}}$ и $R = \sqrt{l^2 + x^2}$

$$E = |E_y| = 4k \frac{qa}{R^3} = 4k \frac{q}{R^3} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} = k \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{ql}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Упростим коэффициент:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $E = k \frac{2\sqrt{2}ql}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$
