

Домашняя работа №7

1. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Составить ряд и функцию распределения СВ ξ - число выпадений числа очков кратного 3. Указать вид закона распределения.

Решение:

$$p = P(\text{число кратно } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Бросаем 2 кости одновременно:

Случайная величина: количество “кратных 3” на двух костях.

- 0 кратных 3: обе кости не кратны 3 $\rightarrow (1-p)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
- 1 кратное 3: ровно одна кость кратна 3 $\rightarrow 2 \cdot p \cdot (1-p) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
- 2 кратных 3: обе кости кратны 3 $\rightarrow p^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

То есть на одном броске две кости дают распределение:

k	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Бросаем два раза

Пусть ξ = общее число выпадений “кратных 3” за два броска двух костей.

- Каждый бросок даёт случайную величину X (0, 1, 2) с вероятностями $(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9})$.
- Всего два броска $\rightarrow$ независимые величины X_1 и X_2 .
- Тогда $\xi = X_1 + X_2$.

Максимум: $2 + 2 = 4$, минимум: $0 + 0 = 0 \rightarrow$ возможные значения $\xi = 0, 1, 2, 3, 4$.

Ряд распределения

Вероятности для суммы $\xi = X_1 + X_2$:

- $P(\xi = 0) = P(X_1 = 0 \text{ и } X_2 = 0) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
- $P(\xi = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{32}{81}$
- $P(\xi = 2) = P(X_1 = 0, X_2 = 2) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 0) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4+16+4}{81} = \frac{24}{81}$
- $P(\xi = 3) = P(X_1 = 1, X_2 = 2) + P(X_1 = 2, X_2 = 1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{81}$
- $P(\xi = 4) = P(X_1 = 2, X_2 = 2) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$

Итого:

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

Функция распределения $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$

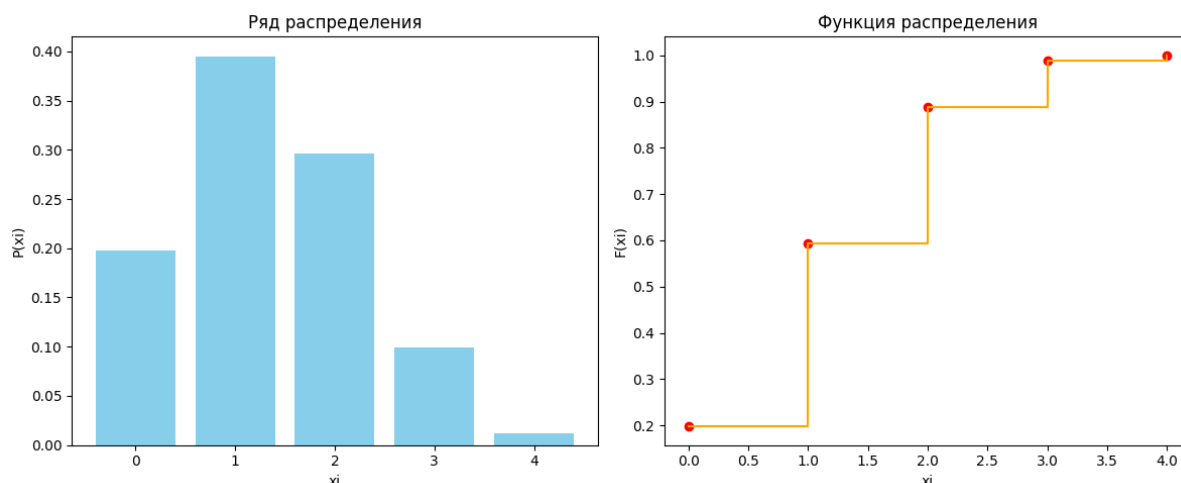
x	$F_\xi(x)$
0	$\frac{16}{81}$
1	$\frac{48}{81}$
2	$\frac{72}{81}$

3	$\frac{80}{81}$
4	1

Вид закона распределения

Это дискретная сумма двух независимых случайных величин с биномиальным распределением, но каждая из них сама является распределением суммы двух независимых Бернулли с $p = \frac{1}{3} \rightarrow$ сводится к многократной биномиальной схеме (мультибиномиальный).

Говоря проще: ξ – дискретная, конечная, суммируемая случайная величина, аналогичная сумме 4 Бернулли с $p = \frac{1}{3}$ (так как всего за два броска 2 кости $\rightarrow$ 4 “испытывания”).



2. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить ряд и функцию распределения СВ ξ - число стандартных среди отобранных. Указать вид закона распределения.

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

где $k = 0, 1, 2$.

Вычисляем вероятности

- $k = 0$ (0 стандартных деталей):

$$P(X = 0) = \frac{\binom{8}{0} \binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{45} = \frac{1}{45}$$

- $k = 1$ (1 стандартная деталь):

$$P(X = 1) = \frac{\binom{8}{1} \binom{2}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45}$$

- $k = 2$ (2 стандартные детали):

$$P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \binom{2}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{28 \cdot 1}{45} = \frac{28}{45}$$

Ряд распределения

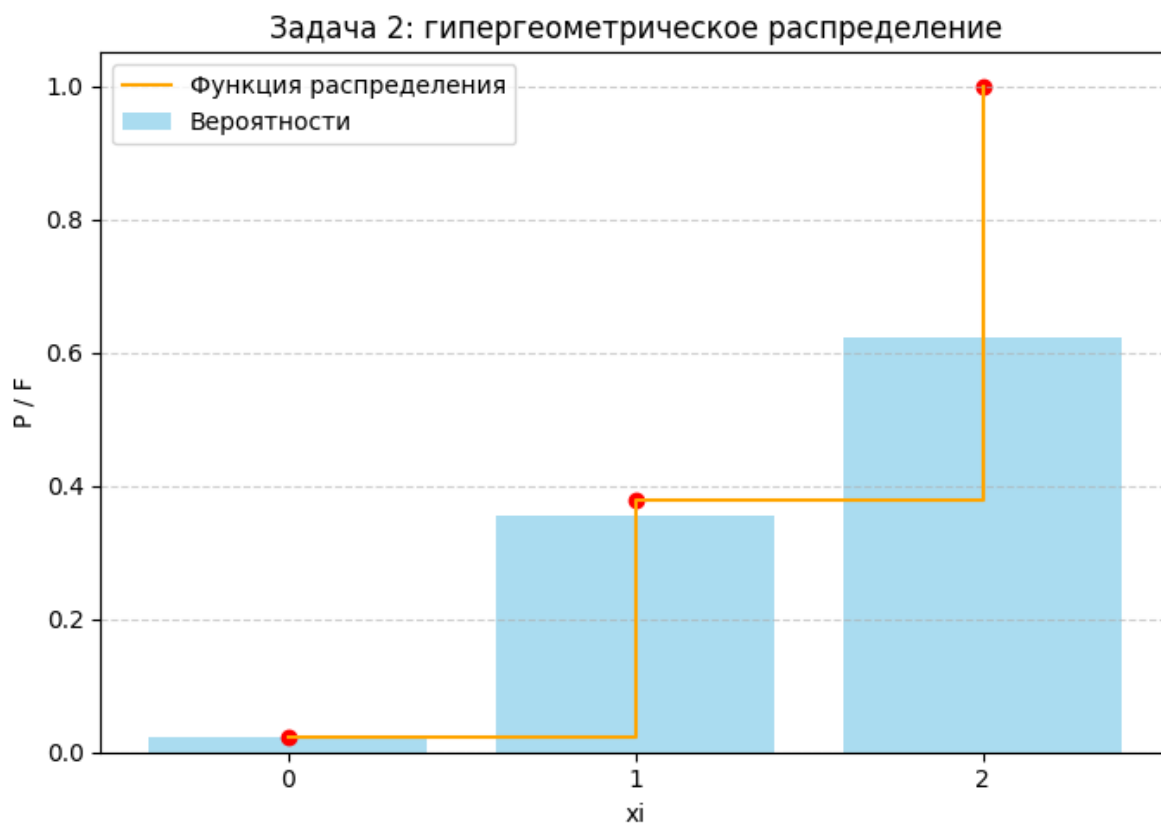
ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Функция распределения $F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$

x	$F_{\xi}(x)$
0	$\frac{1}{45}$
1	$\frac{17}{45}$
2	1

Вид закона распределения

Это гипергеометрическое распределение, так как выборка делается без возвращения из конечной совокупности объектов с двумя типами элементов.



3. Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы до тех пор, пока не обнаружит незнание. Вероятность ответа на один дополнительный вопрос равна 0.9. Составить ряд: а) СВ ξ - число заданных вопросов; б) СВ ξ - число заданных вопросов, если их не более 5. Указать вид закона распределения.

а) Число заданных вопросов (ξ неограничено)

Это классическая задача на геометрическое распределение:

$$P(\xi = k) = P(\text{первые } k-1 \text{ ответы правильные, } k\text{-й неправильный})$$

- Вероятность неправильного ответа: $q = 1 - p = 0.1$

- Тогда:

$$P(\xi = k) = p^{k-1} \cdot q, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ряд распределения:

ξ	1	2	3	4	5
...	P	0.1	0.09	0.081	0.0729
0.06561	...				

Функция распределения:

$$F_{\xi}(k) = P(\xi \leq k) = 1 - p^k$$

Например:

$$F_{\xi}(1) = 0.1, \quad F_{\xi}(2) = 0.1 + 0.09 = 0.19, \dots$$

Вид закона распределения: дискретное, геометрическое распределение.

б) Число заданных вопросов, если их не более 5

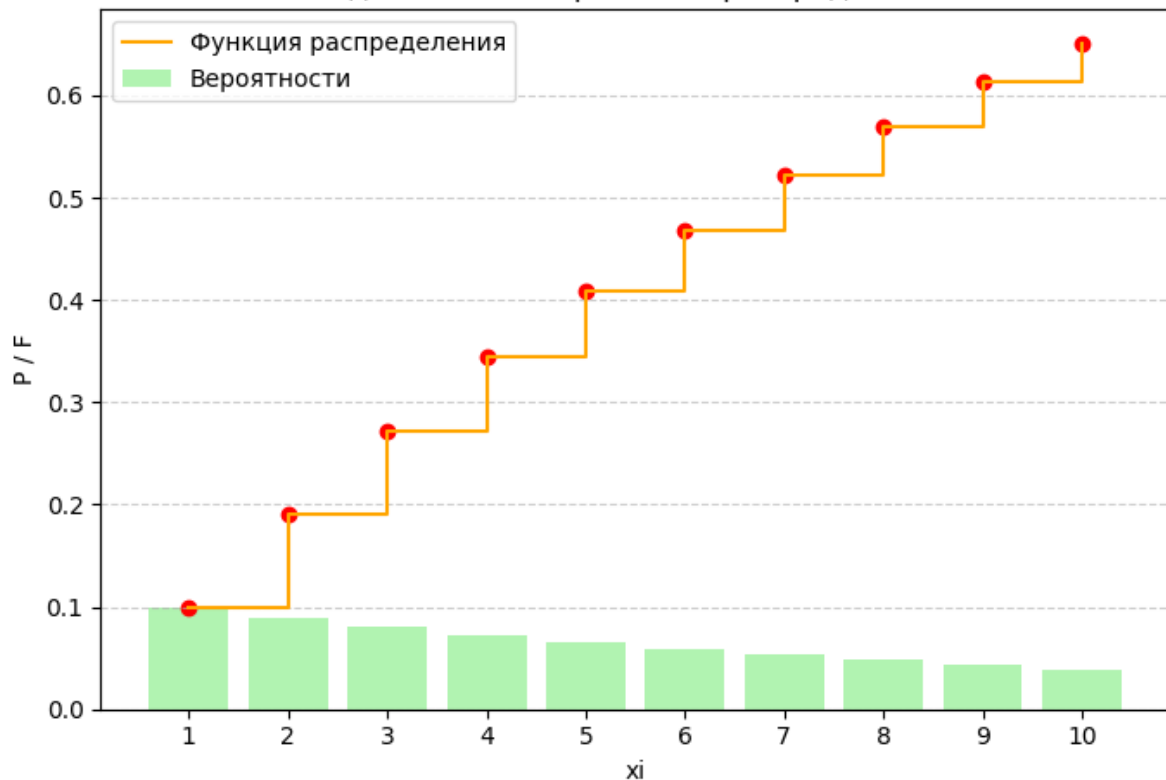
Теперь ограничиваемся максимум 5 вопросами. Тогда для $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$P(\xi = k) = \begin{cases} p^{k-1}q, & k = 1, 2, 3, 4 \\ p^4, & k = 5 \text{ (т.е. все 5 правильных)} \end{cases}$$

ξ	1	2	3	4	5
P	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

Вид закона распределения: дискретное усечённое геометрическое распределение.

Задача 3: геометрическое распределение



4. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого из них за время T равна 0.002. Составить ряд СВ ξ - число отказавших элементов за время T . Указать вид закона распределения.

Каждый элемент — это независимая «Биномиальная попытка»:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{элемент отказал} \\ 0, & \text{элемент не отказал} \end{cases}$$

Тогда $\xi = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$.

Это биномиальная случайная величина с параметрами $n = 1000$, $p = 0.002$:

$$P(\xi = k) = \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 1000$$

Приближение

Так как n большое, p маленькое, удобно использовать приближение Пуассона:

$$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0.002 = 2$$

Тогда можно приближённо считать:

$$P(\xi = k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Это распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$.

Ряд распределения (первые значения)

$$P(\xi = 0) \approx \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} \approx 0.1353$$

$$P(\xi = 1) \approx \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 2e^{-2} \approx 0.2707$$

$$P(\xi = 2) \approx \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 2e^{-2} \approx 0.2707$$

$$P(\xi = 3) \approx \frac{2^3 e^{-2}}{6} \approx 0.1804$$

$$P(\xi = 4) \approx \frac{16e^{-2}}{24} \approx 0.0902$$

$$P(\xi = 5) \approx \frac{32e^{-2}}{120} \approx 0.0361$$

Вид закона распределения

- Точное: биномиальное $B(n = 1000, p = 0.002)$
- Приближённое: распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$

Это классический пример редких событий (малое p , большое n) $\rightarrow$ удобно использовать Пуассона.

